2 次関数

1．2 次方程式／方程式を解く

相反方程式とその解き方

相反方程式

整式の方程式を降べきの順あるいは昇べきの順に整理したとき，

係数が左右対称となる方程式

逆数方程式ともいう。

相反方程式の分類

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a \neq 0)$　・・・①（偶数次の相反方程式）

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a \neq 0)$　・・・②（奇数次の相反方程式）

解き方は，方程式が偶数次（①）と奇数次（②）で異なる。

相反方程式の解き方

注意

$x=0$ が相反方程式の解でないことを示してから，

偶数次あるいは奇数次の相反方程式を解く作業に入ること。

1．偶数次の相反方程式（①）の解き方

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

↓　両辺を $x^2\ (x \neq 0)$ で割る。

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

↓　係数について整理する。

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

$$a\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

↓　$x+\dfrac{1}{x}=y$ とおき，y についての 2 次方程式にする。

$a\left(y^2-2\right)+by+c=0$

$ay^2+by-2a+c=0$

↓

解 y と $y=x+\dfrac{1}{x}$ から解 x を求める。

2. 奇数次の相反方程式（②）の解き方

解き方のポイント：因数分解し，偶数次の相反方程式をつくる。

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ に $x=-1$ を代入すると，

$-a+b-c+c-b+a=0$ となるから，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ は $x=-1$ を解にもつ。

すなわち，$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ は $x+1$ で割り切れる。

よって，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a\}$

ゆえに，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ は，

$(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a\}=0$

と変形できる。

よって，

$x=-1$ 以外の解は，

偶数次の相反方程式：$ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a=0$

を解いて求めればよい。

重要

$x+\dfrac{1}{x}$ には，$x>0$ の条件が付けられていることがよくあるので注意しなければならない。

たとえば，

$y=x+\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のとき，$ay^2+by-2a+c$ $(a>0)$ の最小値を求めよ。

といった問題では，

相加平均≧相乗平均より，$y=x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ だから，

$y\geq 2$ の範囲で最小値を求めなければならない。

ともかく，

正の数が出てきたら，条件反射的に「相加平均≧相乗平均」を意識しよう。

3．2 次不等式／実数解をもつ・もたない

（イ）

(3)

①，②の少なくとも一方は実数解をもたない ≡ ①または②が実数解をもたない

（ロ）の別解について

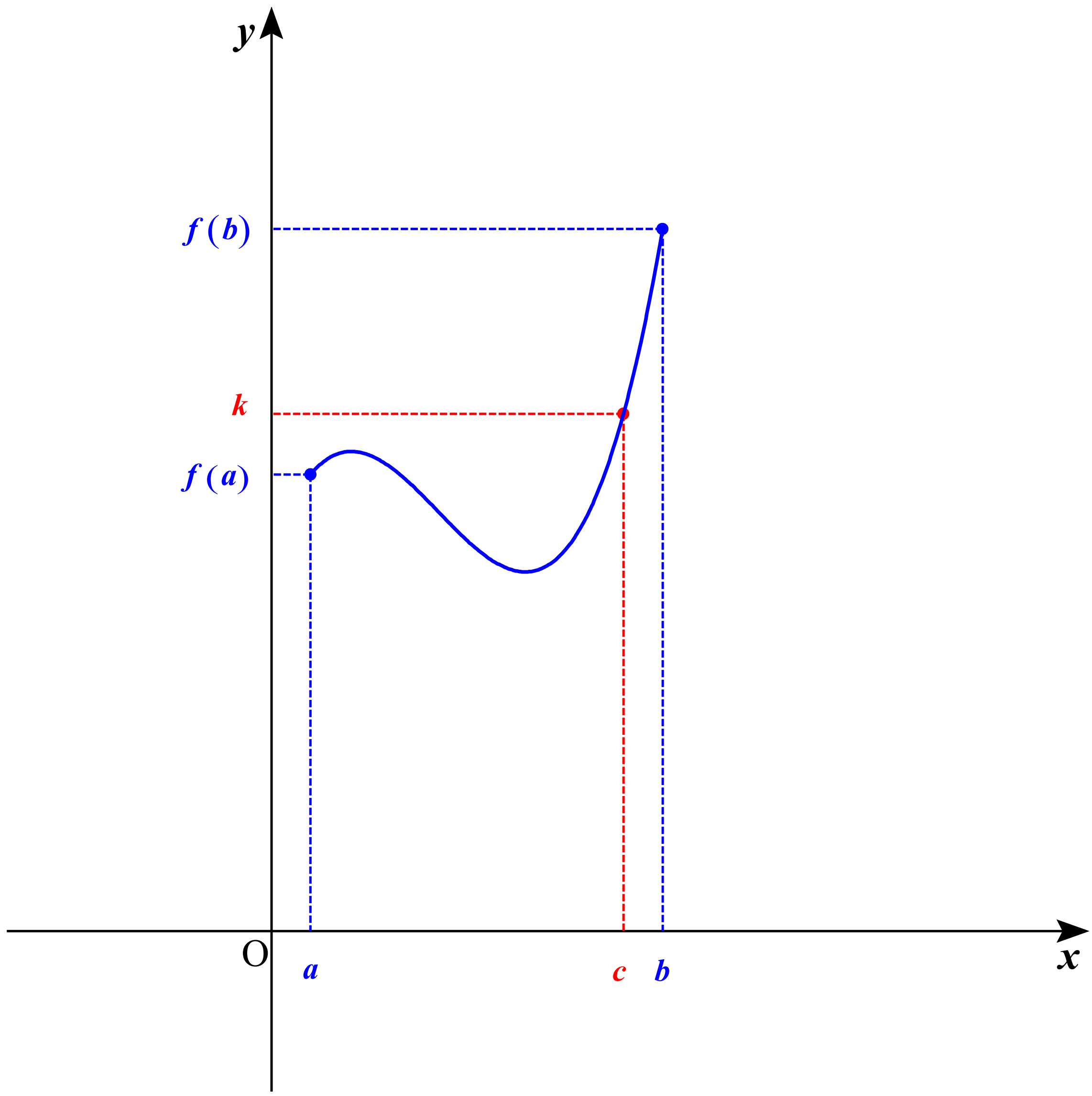
中間値の定理をもとにしている。

中間値の定理

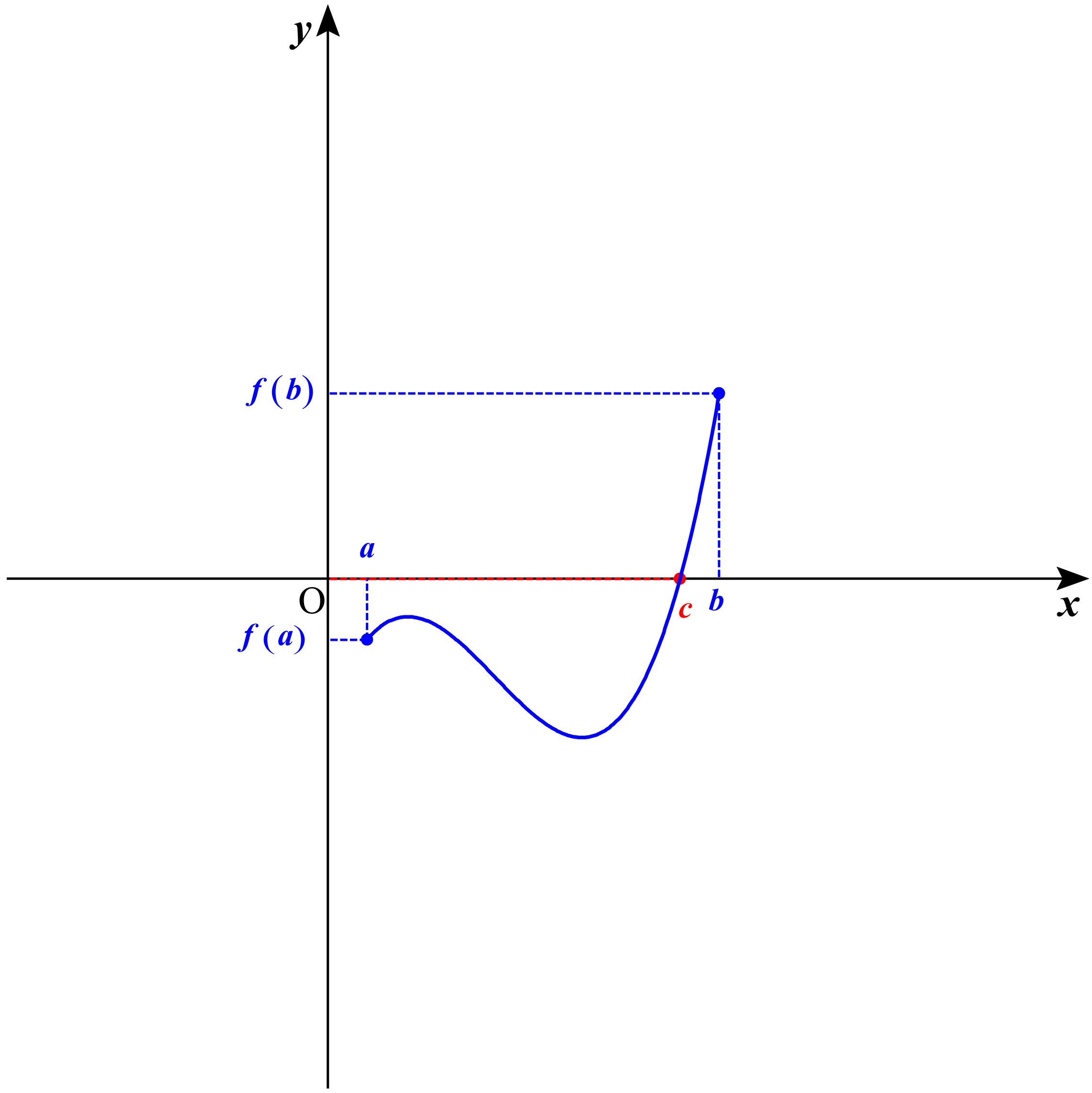
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ のとき，

$f(a)$ と $f(b)$ との間の任意の値を k とすれば，

$f(c)=k\ (a<c<b)$ となるような c がこの区間に少なくとも 1 つ存在する。



とくに，関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で， $f(a)f(b<0)$ ならば，
つまり $f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，
$f(c)=0$ となるような c がこの区間に少なくとも 1 つ存在する。



中間値の定理は，
方程式 **$f(x)=0$** の実数解の個数や，実数解の存在範囲を求める問題に用いられる。

7．2 次関数の最大・最小／定義域が一定区間

$y=f(x)=x^2-2ax-2 \quad (1\le x\le 3)$ とおくと，$f(x)=(x-a)^2-(a^2+2) \quad (1\le x\le 3)$

最大値 M について

軸 $x=a$ の a の値が

区間 $1\le x\le 3$ の中点 $x=2$ 以下のとき，すなわち $a\le 2$ のとき，$M=f(3)=-6a+7$

区間 $1\le x\le 3$ の中点 $x=2$ 以上のとき，すなわち $2\le a$ のとき，$M=f(1)=-2a-1$

最小値 m について

軸 $x=a$ の a の値が

区間 $1\le x\le 3$ の最小値 $x=1$ 以下のとき，すなわち $a\le 1$ のとき，$m=f(1)=-2a-1$

区間 $1\le x\le 3$ を満たすとき，すなわち $1\le a\le 3$ のとき，$m=f(a)=-(a^2+2)$

区間 $1\le x\le 3$ の最大値 $x=3$ 以上のとき，すなわち $3\le a$ のとき，$m=f(3)=-6a+7$

以上を表にまとめると，以下のようになる。

a		1		2		3	
M		$-6a+7$		|		$-2a-1$	
m	$-2a-1$	|		$-(a^2+2)$		|	$-6a+7$
$M-m$	$-4a+8$	|	$(a-3)^2$	|	$(a-1)^2$	|	$4a-8$
増減	減少	|	減少	極小	増加	|	増加

よって，

$M-m$ が最小となるのは，$a=2$ のときである。

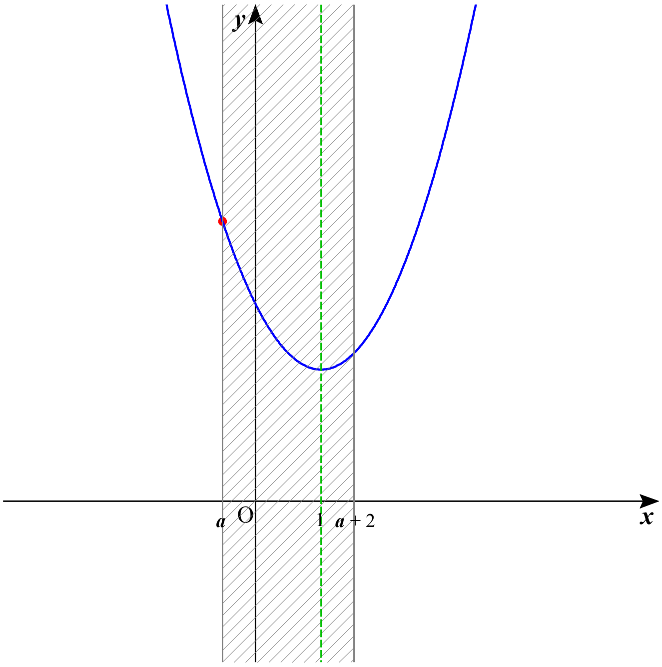
8．2 次関数の最大・最小／定義域が動く場合

最大値

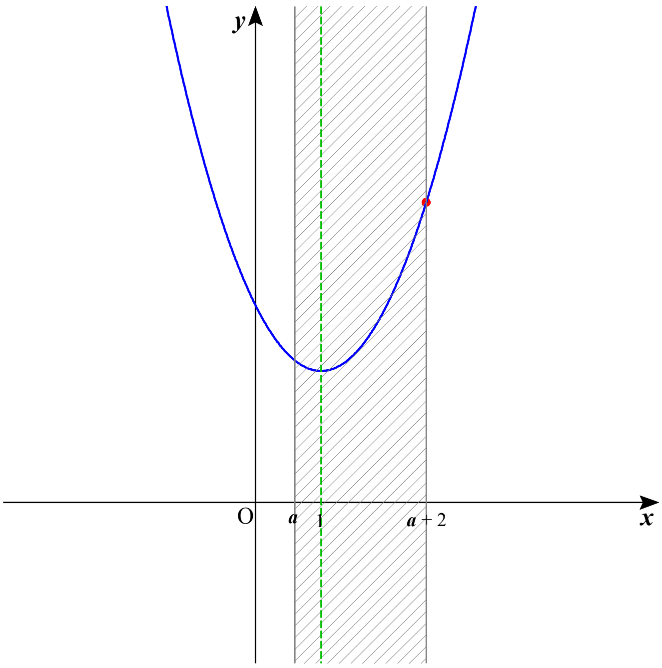
$f(x)$ の軸 $x=1$ と定義域の中点 $x=a+1$ の関係について，

$a+1\leq 1$，すなわち $a\leq 0$ のときと $1\leq a+1$，すなわち $0\leq a$ のときとに分けると，

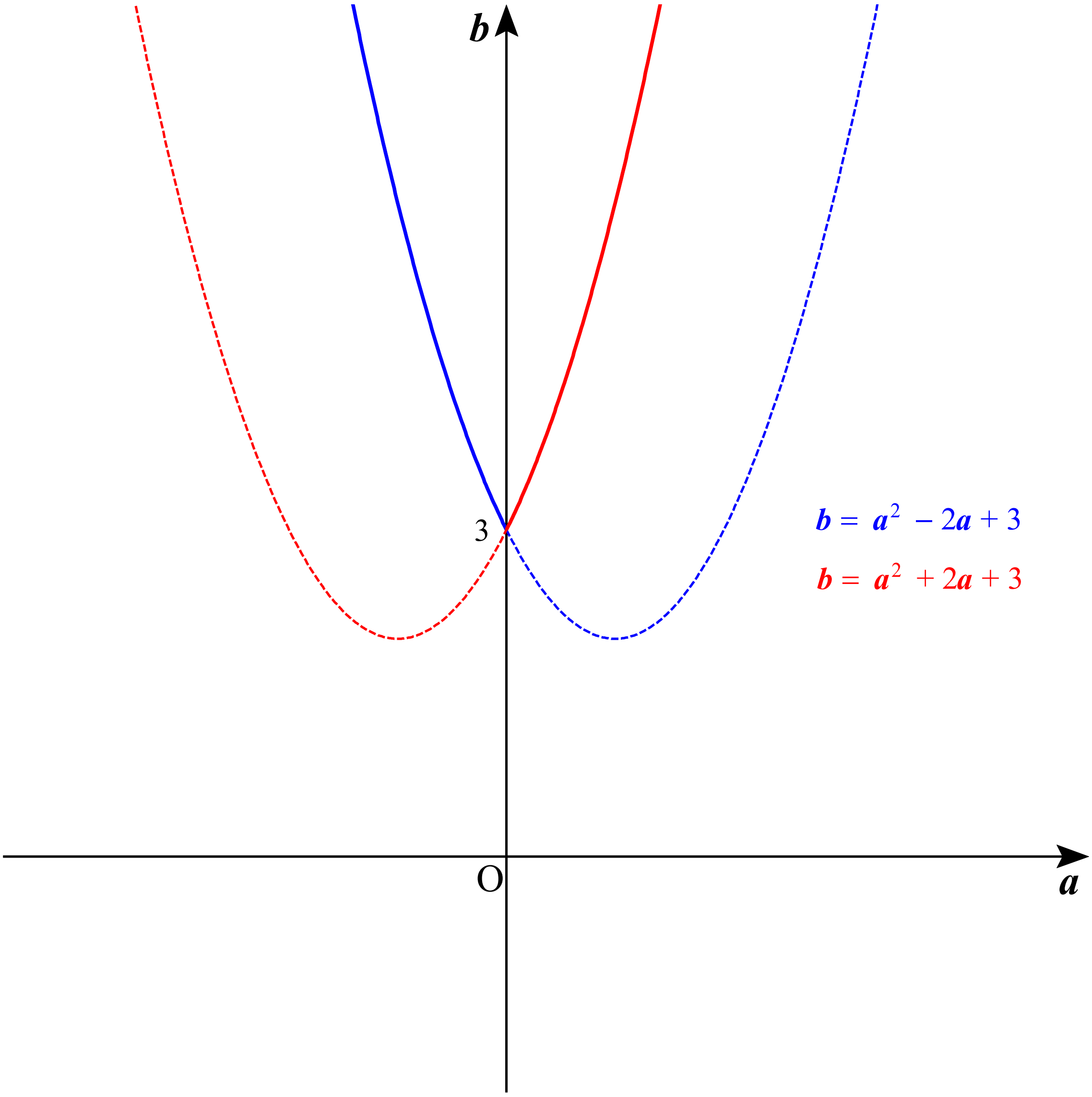
$a\leq 0$ のとき：$M(a)=f(a)=a^2-2a+3$



$0\leq a$ のとき：$M(a)=f(a+2)=a^2+2a+3$



実線が $b=M(a)$ のグラフである。



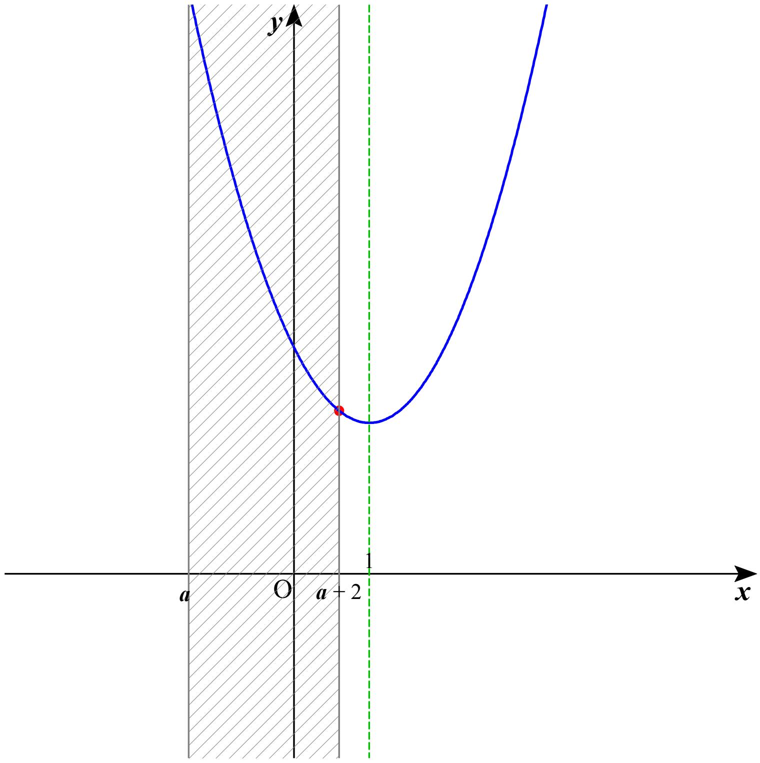
最小値

$f(x)$ の軸 $x=1$ と定義域 $a \leq x \leq a+2$ の関係について，

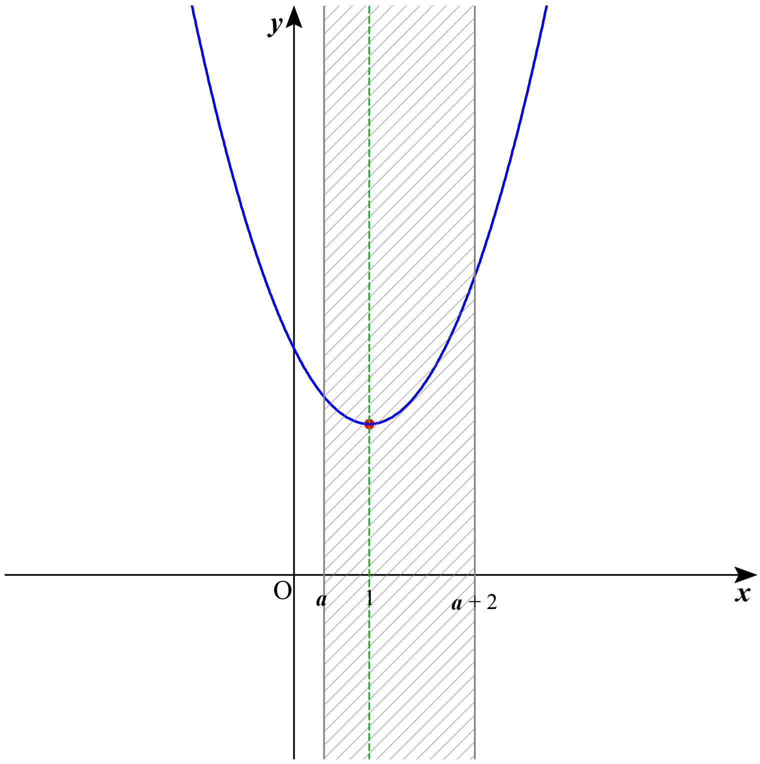
$a+2 \leq 1$，すなわち $a \leq -1$ のときと $a \leq 1 \leq a+2$ のとき，すなわち $-1 \leq a \leq 1$ のときと

$1 \leq a$ のときとに分けると，

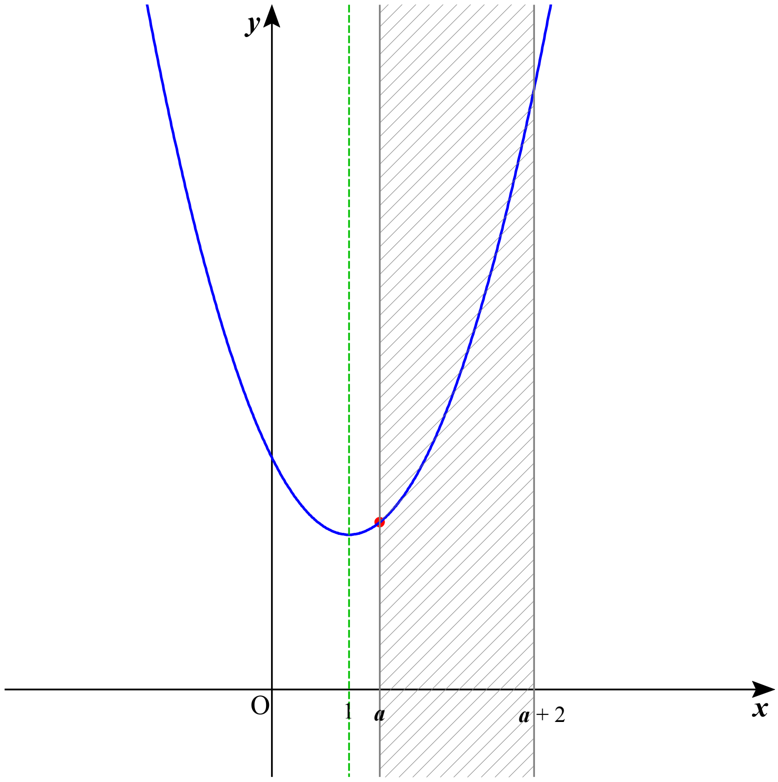
$a \leq -1$ のとき： $m(a) = f(a+2) = a^2 + 2a + 3$



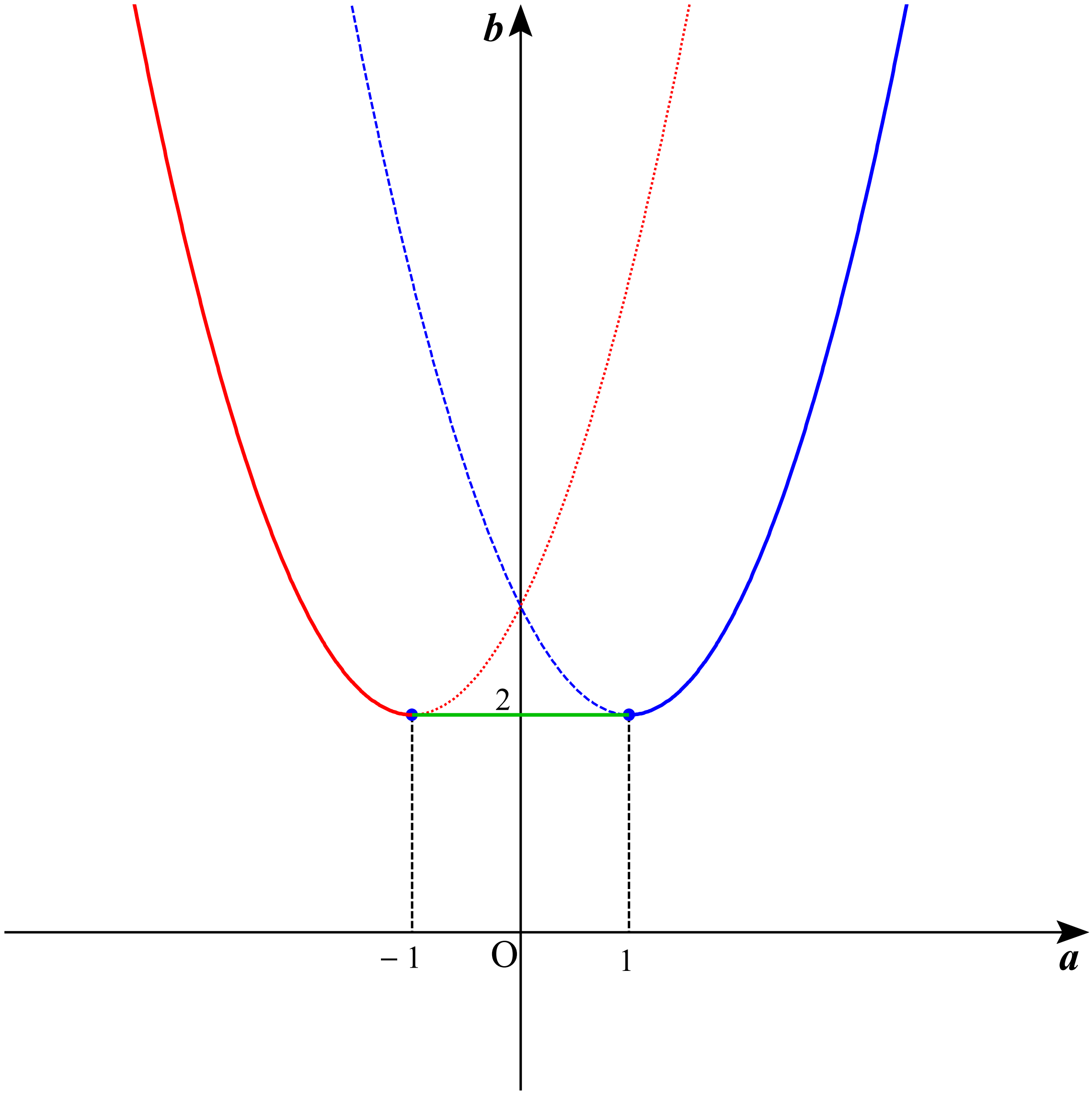
$-1 \leq a \leq 1$ のとき： $m(a) = f(1) = 2$



$1 \leq a$ のとき： $m(a) = f(a) = a^2 - 2a + 3$



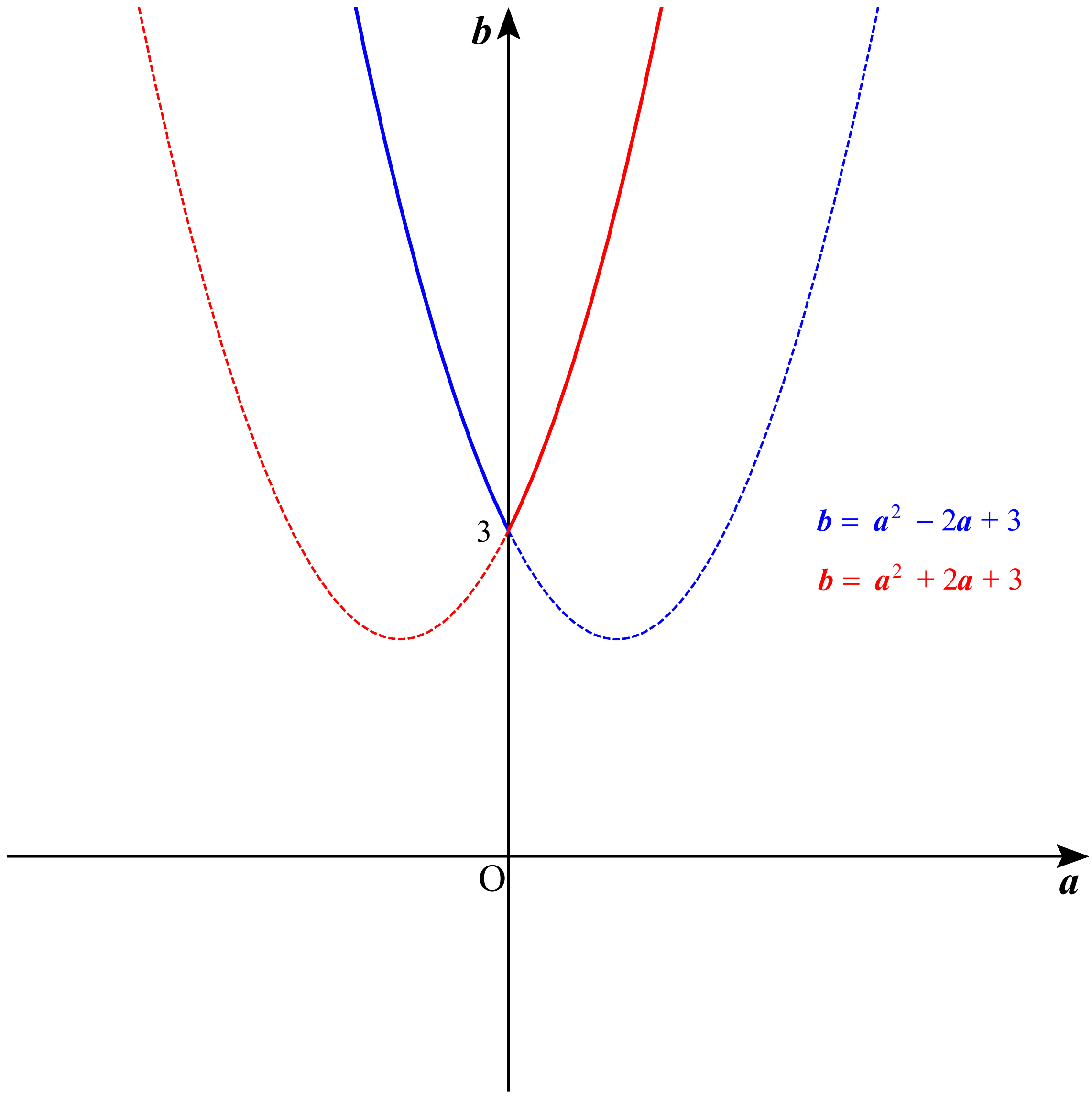
実線が $b=m(a)$ のグラフである。



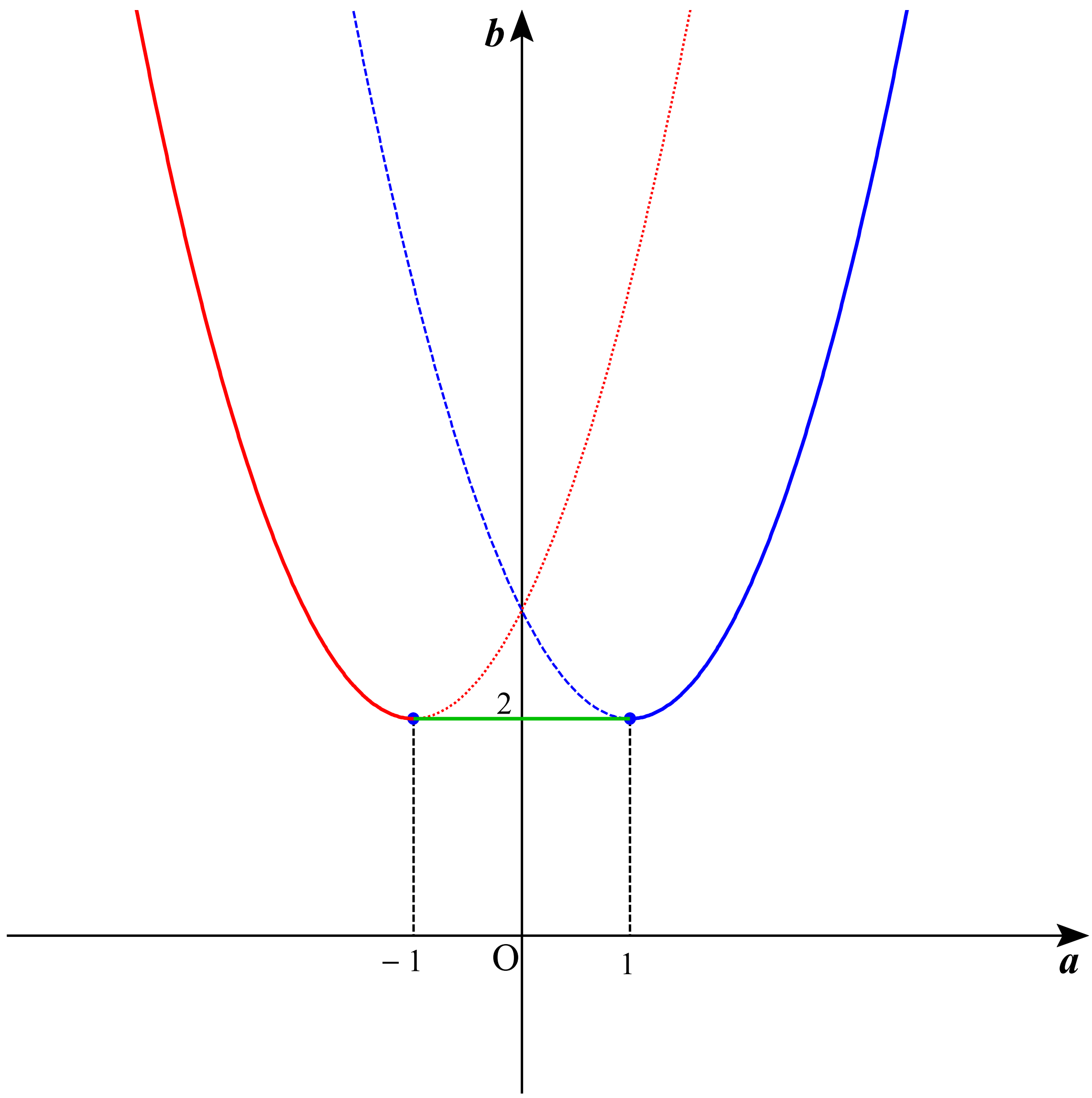
補足

$M(a)$は，定義域の端点における $f(x)$ の値の大きい方，

つまり，$f(a)=a^2-2a+3$ と $f(a+2)=a^2+2a+3$ のうち値の大きい方である。



$m(a)$ は，
$f(x)$ の軸 $x=1$ が定義域内にあるとき，
すなわち $a \leq 1 \leq a+2$ より，$-1 \leq a \leq 1$ のとき，$m(a)=f(1)=2$
そうでないとき，すなわち $a<-1$ あるいは $1<a$ のとき，
定義域の端点における $f(x)$ の値が小さい方，
つまり，$f(a)=a^2-2a+3$ と $f(a+2)=a^2+2a+3$ のうち値の小さい方である。



10．2 次関数のグラフ／係数との関係，移動

（イ）

$y=f(x)=ax^2+bx+c\ (c\neq 0)$のグラフが題意を満たすためには，

上に凸かつx軸の 0 以上の異なる 2 点で交わることである。

上に凸であるためには，$a<0$

異なる 2 点で交わるためには，$b^2-4ac>0$

x軸との共有点を$\alpha,\beta\ (0\leq\alpha<\beta)$とすると，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}>0$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}\geq 0$

これと$a<0$，$c\neq 0$より，$b>0$，$c<0$

以上より，

$a<0$，$b>0$，$c<0$，$b^2-4ac>0$

（ロ）

順を変えても問題ないから，$y=-3x^2+12x-7$は$y=3x^2$のグラフを

x軸に対称に折り返してから，x軸方向にp，y軸方向にqだけ平行移動したものとすると，

$y=-3(x-p)^2+q$が$y=-3x^2+12x-7$であるから，

$-3x^2+6px-3p^2+q\equiv-3x^2+12x-7$より，

$p=2,q=5$

注意

座標軸は象限に含まれない。

第 1 象限：$x>0,y>0$

第 2 象限：$x<0,y>0$

第 3 象限：$x<0,y<0$

第 4 象限：$x>0,y<0$

12．2 変数関数／等式の条件がない場合，ある場合

（イ）

別解 1

$x^2+y^2=1$ を媒介変数 θ $(0\le\theta<2\pi)$ を使って表示すると，

$(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ だから，

$x^2+4y=\cos^2\theta+4\sin\theta=1-\sin^2\theta+4\sin\theta=-(\sin\theta-2)^2+5$

よって，

$\sin\theta=1$ のとき，すなわち $(x,y)=(0,1)$ のとき最大値 4

$\sin\theta=-1$ のとき，すなわち $(x,y)=(0,-1)$ のとき最小値 -4

補足

円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ の媒介変数表示

$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ は，

$x^2+y^2=r^2$ を x 方向に p，y 方向に q だけ平行移動したものであり，

$x^2+y^2=r^2$ 上の点は，$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$　$(0\le\theta<2\pi)$ と表せるから，

$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 上の点は，

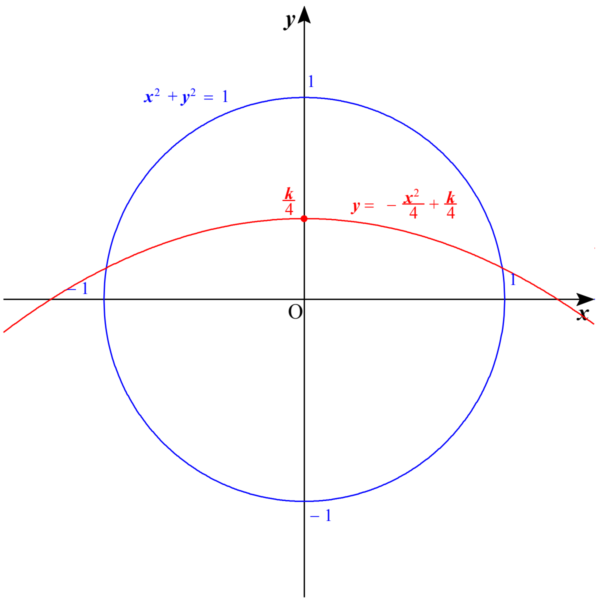
$(x,y)=(p+r\cos\theta,q+r\sin\theta)$　$(0\le\theta<2\pi)$ と表せる。

別解 2

$x^2+4y=k$ とおくと，$y=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{k}{4}$

(x,y) は，$y=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{k}{4}$ と $x^2+y^2=1$ の共有点であることを利用して，

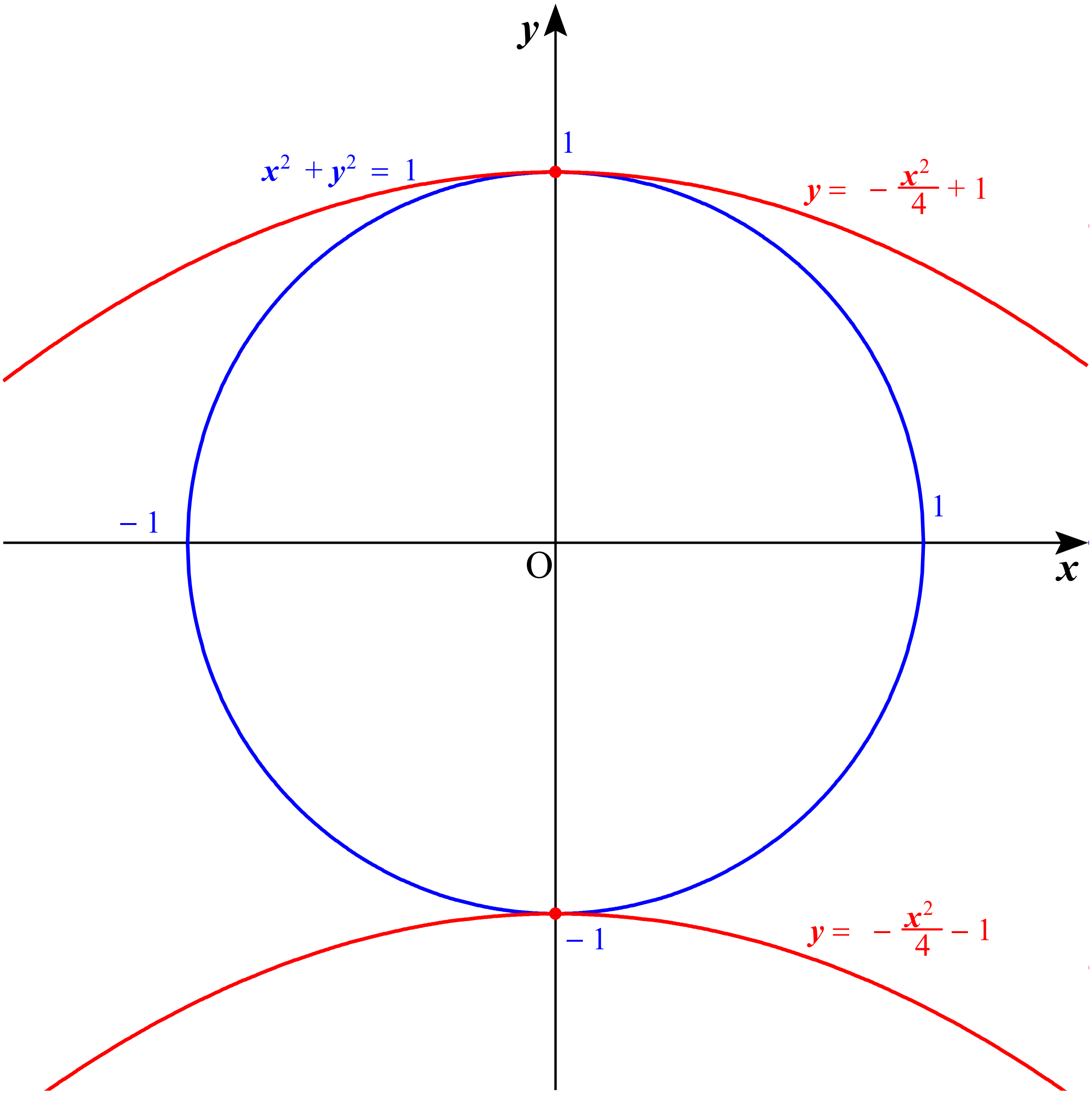
グラフから x^2+y の最大値と最小値を求める。



図より，$x^2+y^2=1$ と $y=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{k}{4}$ が共有点をもつとき，

$-1\leq\dfrac{k}{4}\leq 1$，すなわち $-4\leq k\leq 4$ であり，

$(x,y)=(0,1)$ のとき，k すなわち x^2+4y は最大値 4 をとり，
$(x,y)=(0,-1)$ のとき，k すなわち x^2+4y は最小値 -4 をとる。



（ロ）

別解 1

楕円 $\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{3}=1$ を媒介変数 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を使って表示すると，

$(a,b)=\left(4\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta\right)$ だから，

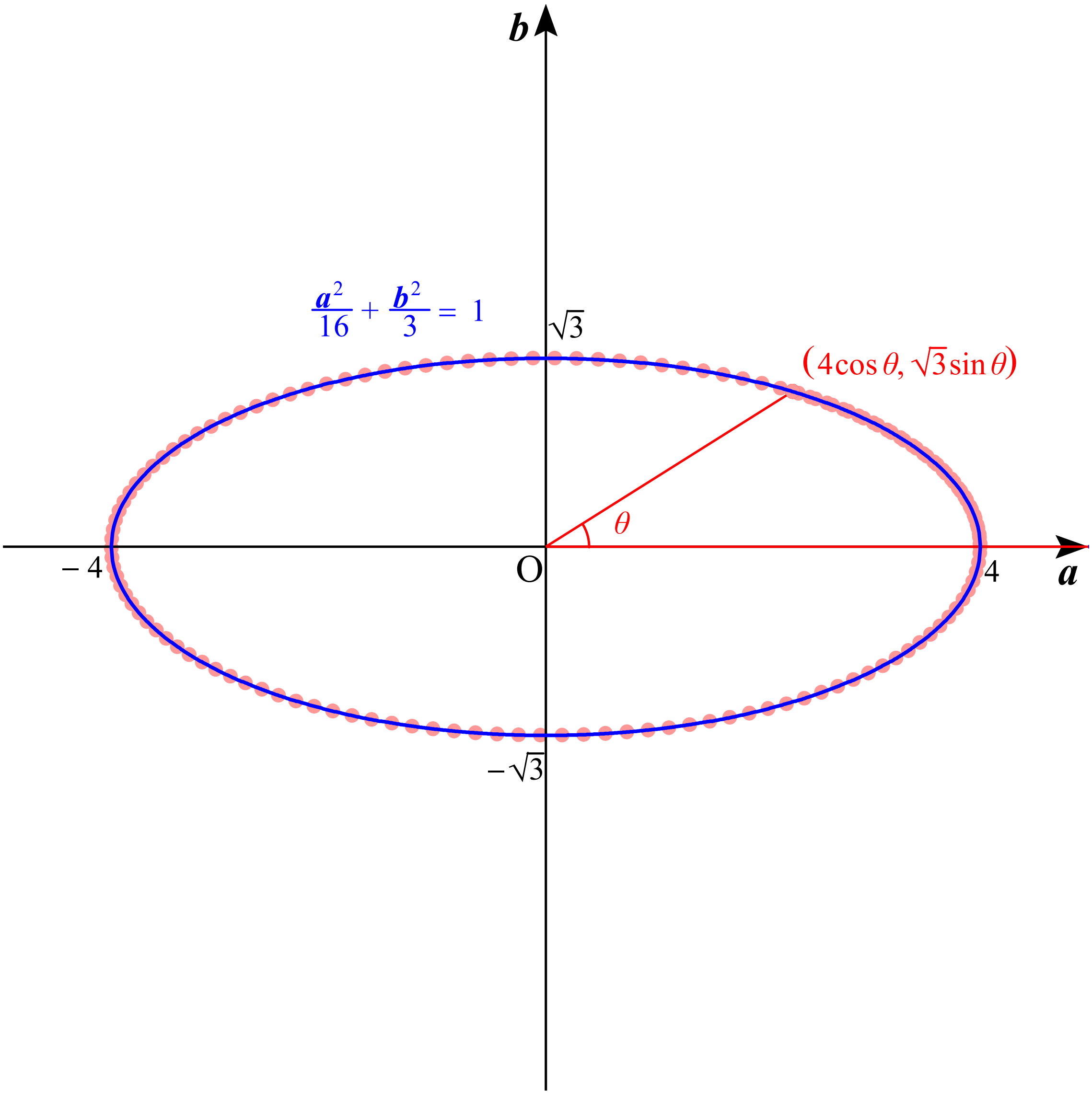
$a+\sqrt{3}b=4\cos\theta+3\sin\theta=5\sin(\theta+\alpha)$ 　 $\left(\cos\alpha=\dfrac{3}{5}, \sin\alpha=\dfrac{4}{5}\right)$

$-1 \leq \sin(\theta+\alpha) \leq 1$ より，

$a+\sqrt{3}b$ の最大値は 5，最小値は -5

補足

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示 $(x,y)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$

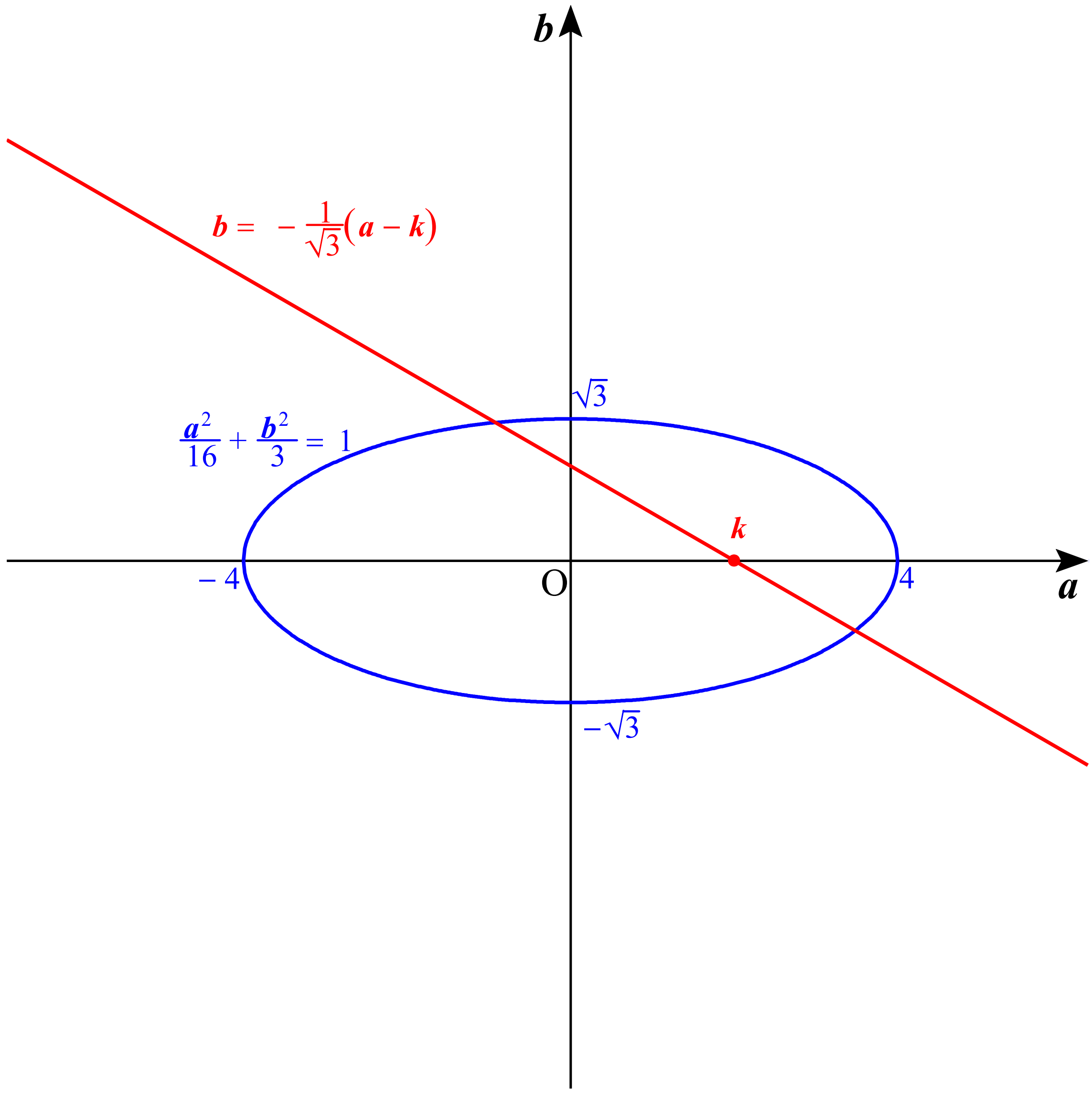


別解 **2**

$a+\sqrt{3}b=k$ とおくと，$b=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(a-k)$

$b=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(a-k)$ と楕円 $\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{3}=1$ が共有点をもつことを利用して，

$a+\sqrt{3}b$ の最大値と最小値を求める。



図より，k が最大または最小となるのは，

$b=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(a-k)$ と $\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{3}=1$ が接するときである。

このとき，$\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{3}=1$ に $b=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(a-k)$ を代入して得られる a についての 2 次方程式

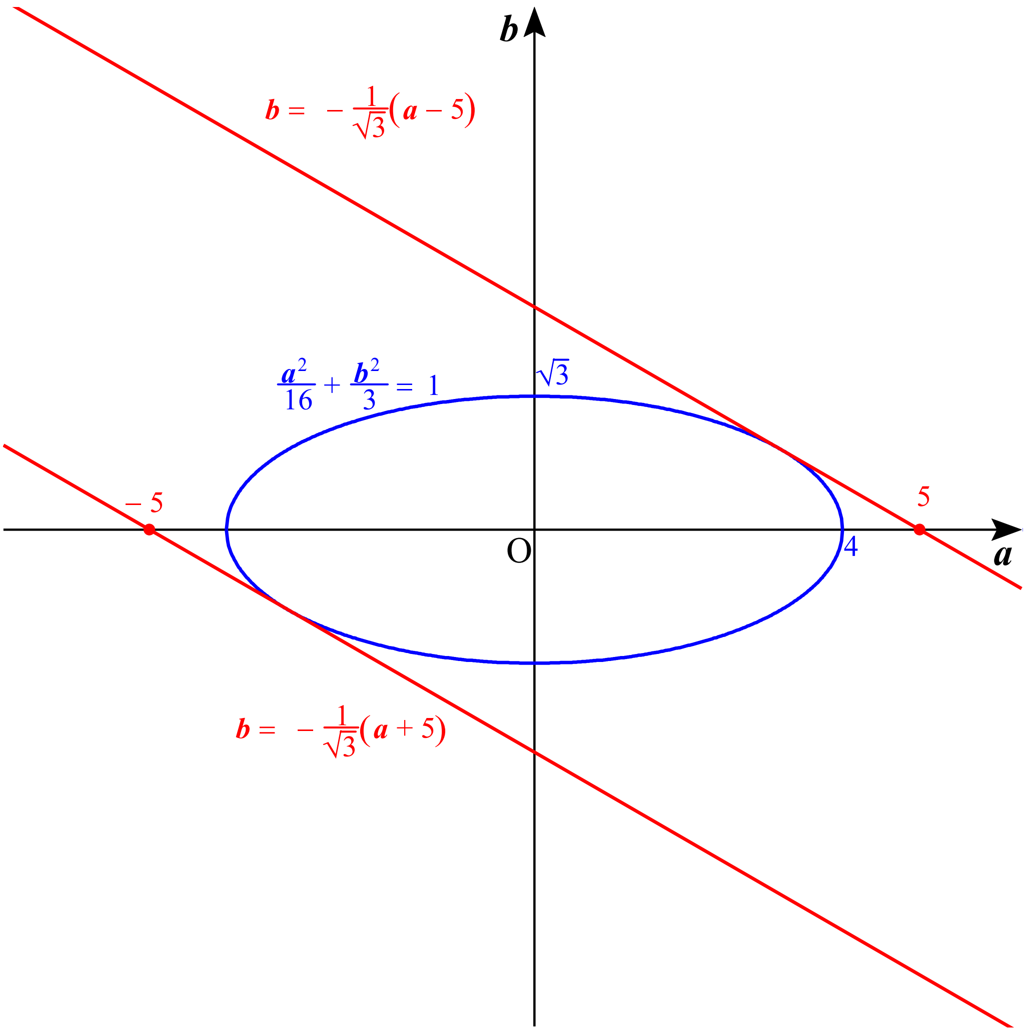
$25a^2-32ka+16(k^2-9)=0$ は重解をもつから，

$\dfrac{D}{4}=16^2k^2-25\cdot16(k^2-9)=16(16k^2-25k^2+25\cdot9)=-9\cdot16(k^2-25)=0$

$\therefore k=5,-5$

よって，$a+\sqrt{3}b$ の最大値は 5，最小値は -5 である。

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{1}{3}\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(a-k)\right\}^2=1\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{a^2-2ka+k^2}{9}=1\Leftrightarrow 9a^2+16a^2-32ka+16k^2=16\cdot9\\ \therefore 25a^2-32ka+16(k^2-9)=0\end{array}\right]$$



13.

補足

x と y が互いに共役な複素数の場合 $x+y$ と xy は実数である。

たとえば，$x=p+qi$，$y=p-qi$（p,q は実数）とすると，

$x+y=2p$，$xy=p^2+q^2$ より，いずれも実数となる。

20．2 次不等式／「すべて」と「ある」がらみ

(1)と(2)は，

$-2\le x\le 2$ の範囲で x の値が同じ場合についての比較である。

つまり，

(1)は，

$-2\le x\le 2$ の範囲で，すべての同じ x に対し，$f(x)-g(x)<0$ である。

(2)は，

$-2\le x\le 2$ の範囲で，ある同じ x に対し，$f(x)-g(x)<0$ である。

あるいは，$f(x)-g(x)<0$ となる x が少なくとも 1 つ存在する。

あるいは，すべての同じ x に対して $f(x)-g(x)\ge 0$ であることの否定。

したがって，

$H(x)=f(x)-g(x)=2x^2-(a+3)$ とおくと，

$-2\le x\le 2$ の範囲で，

(1)は，

常に $H(x)<0$ である。

(2)は，

$H(x)<0$ となる x が少なくとも 1 つ存在する。

あるいは，常に $H(x)\ge 0$ であることの否定

(3)と(4)は，

$f(x)$ と $g(x)$ が $-2\le x\le 2$ の範囲でそれぞれ任意の値をとる場合についての比較である。

(3)は，

$f(x)$ の最大値が $g(x)$ の最小値より小さければよく，

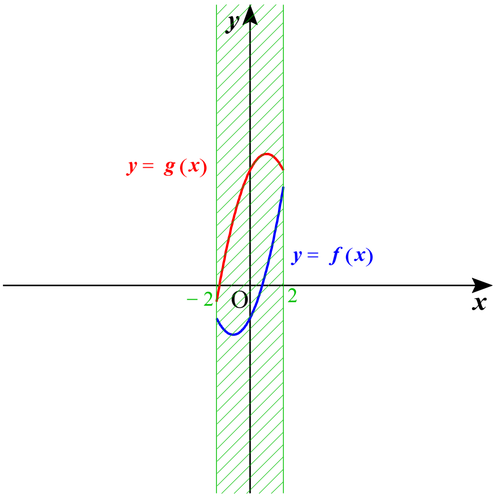
(4)は，

すべての x_1，x_2 の組に対して $f(x_1)\ge g(x_2)$ であることの否定である。

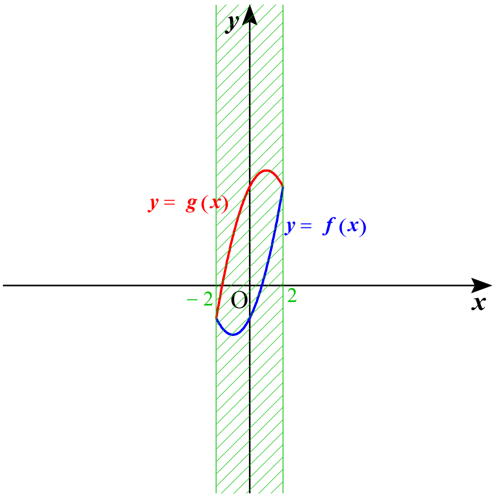
つまり，$f(x)$ の最小値が $g(x)$ の最大値以上であることの否定である。

よって，$f(x)$ の最小値が $g(x)$ の最大値より小さければよい。

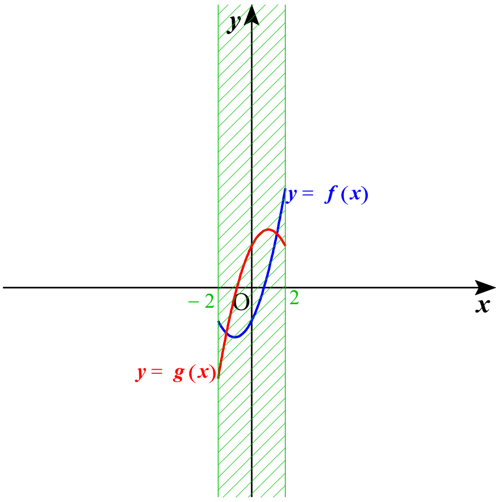
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で見た(1)を満たす状況の例



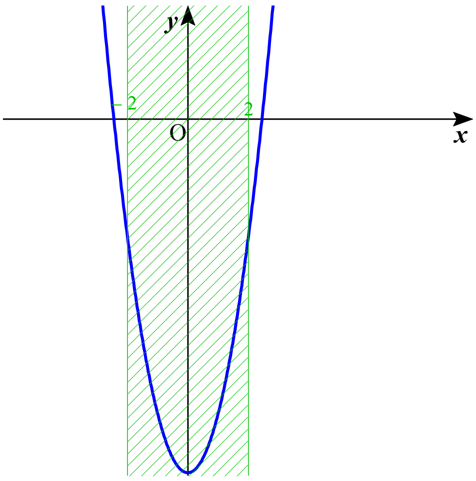
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で見た(1)を満たすか満たさないかの境界の状況の例



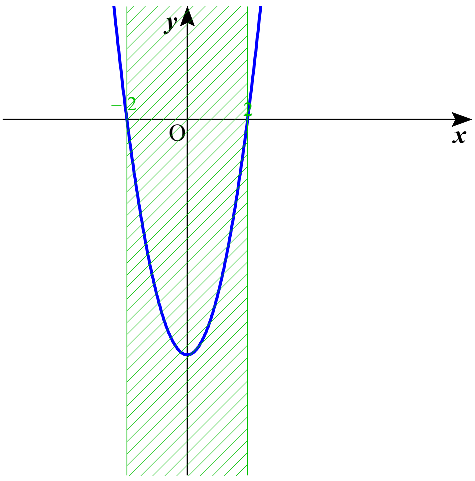
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で見た(1)を満たさない状況の例



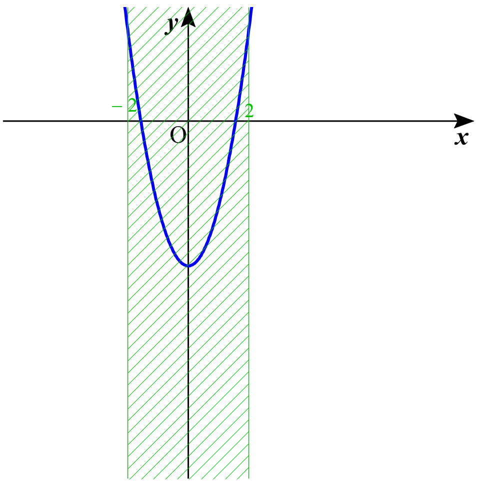
$y=H(x)$で見た(1)を満たす状況の例



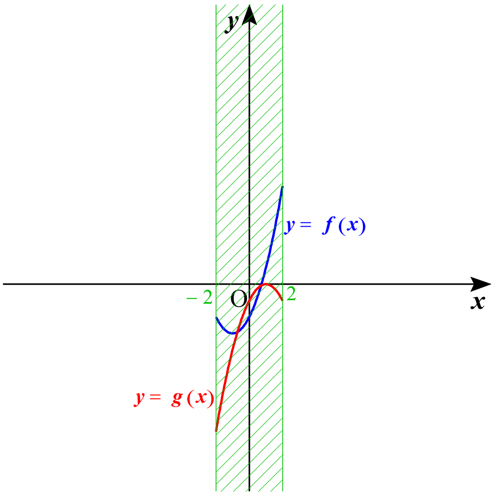
$y=H(x)$で見た(1)を満たすか満たさないかの境界の状況の例



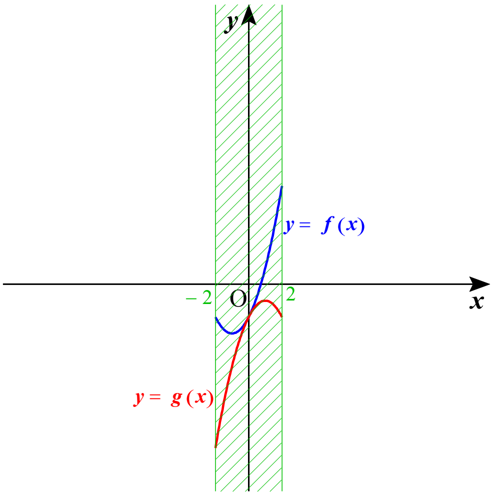
$y=H(x)$で見た(1)を満たさない状況の例



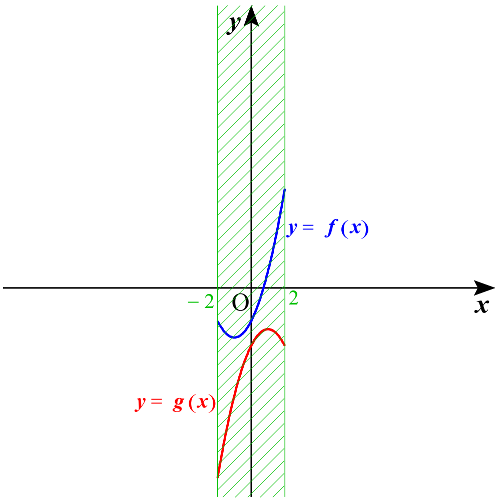
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で見た(2)を満たす状況の例



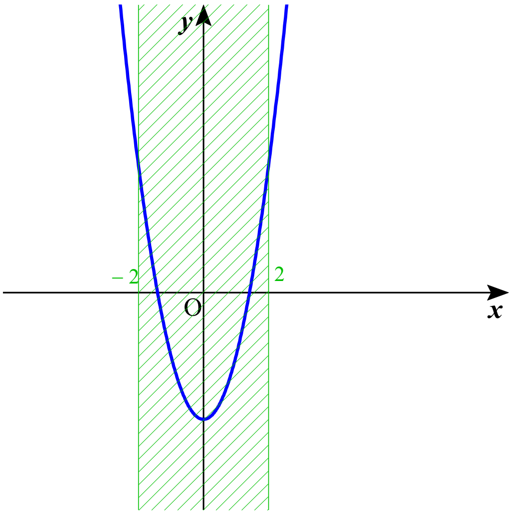
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で見た(2)を満たすか満たさないかの境界の状況の例



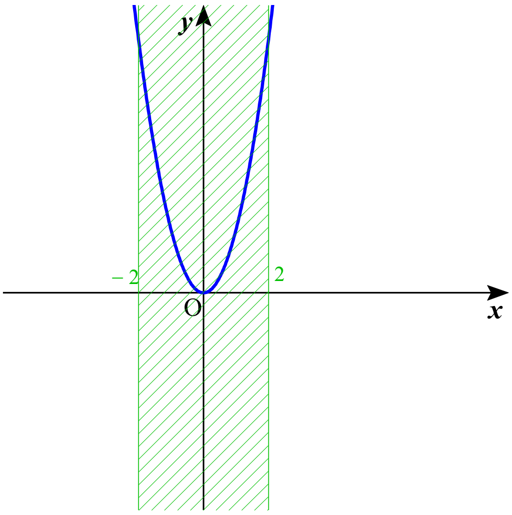
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で見た(2)を満たさない状況の例



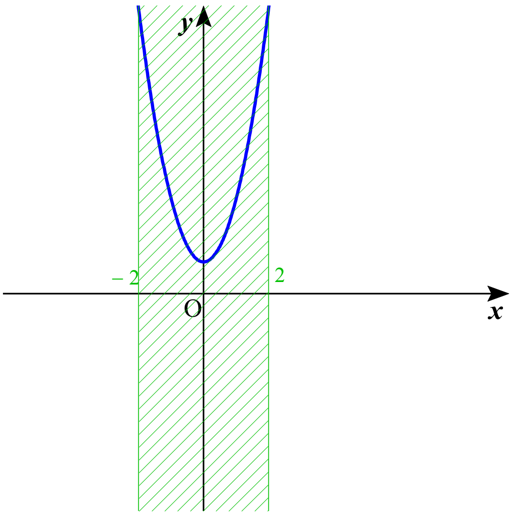
$y=H(x)$で見た(2)を満たす状況の例



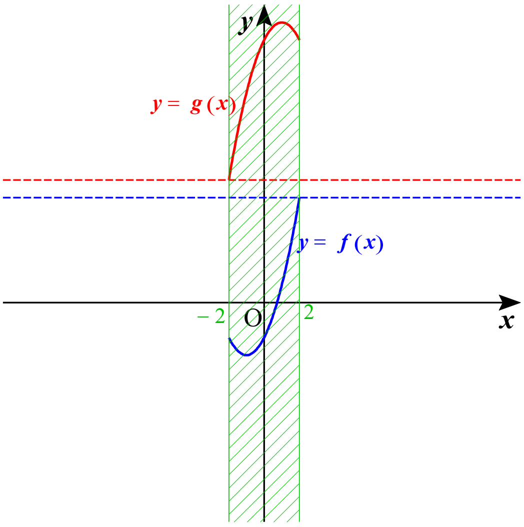
$y=H(x)$で見た(2)を満たすか満たさないかの境界の状況の例



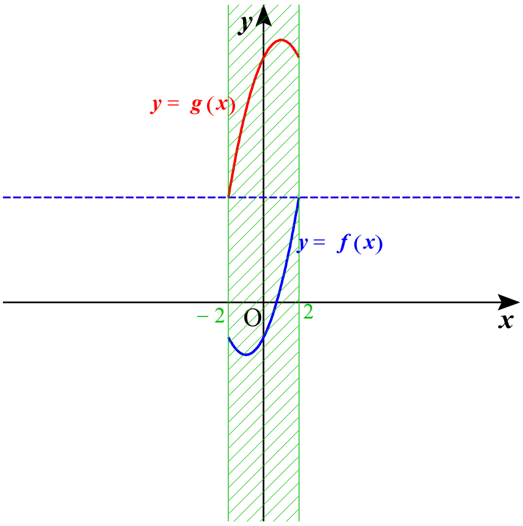
$y=H(x)$で見た(2)を満たさない状況の例



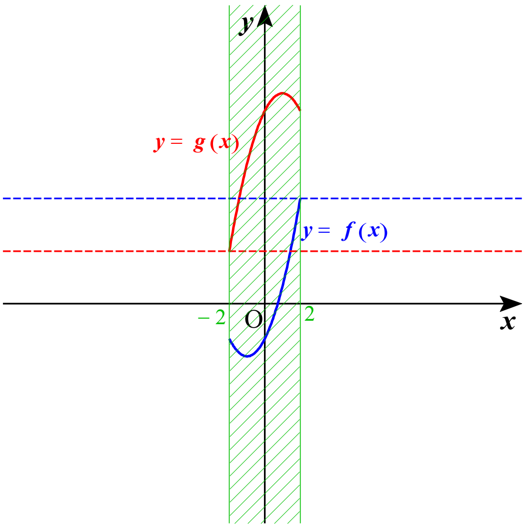
(3)を満たしている状況



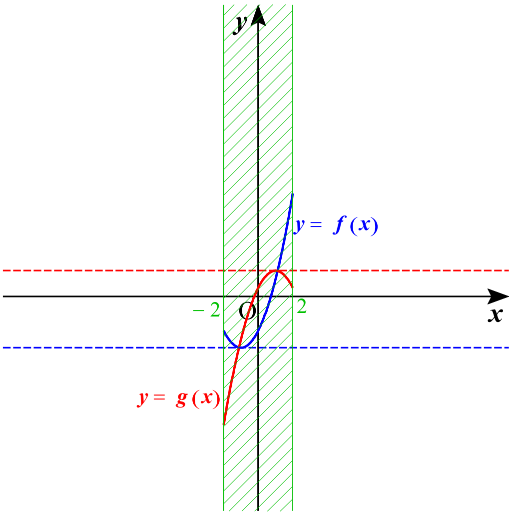
(3)を満たすか満たさないかの境界の状況



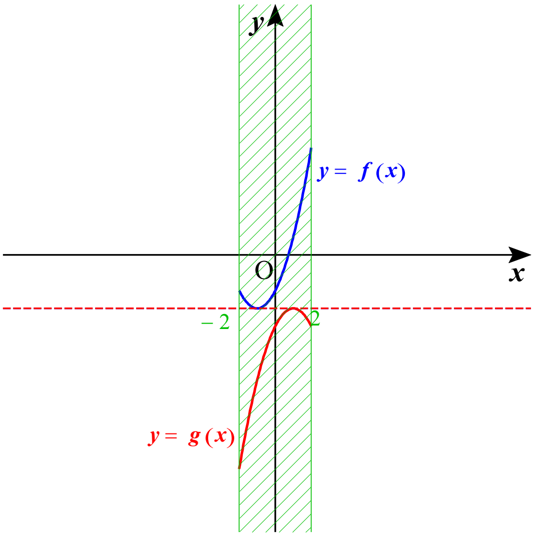
(3)を満たさない状況



(4)を満たす状況



(4)を満たすか満たさないかの境界の状況



(4)を満たさない状況