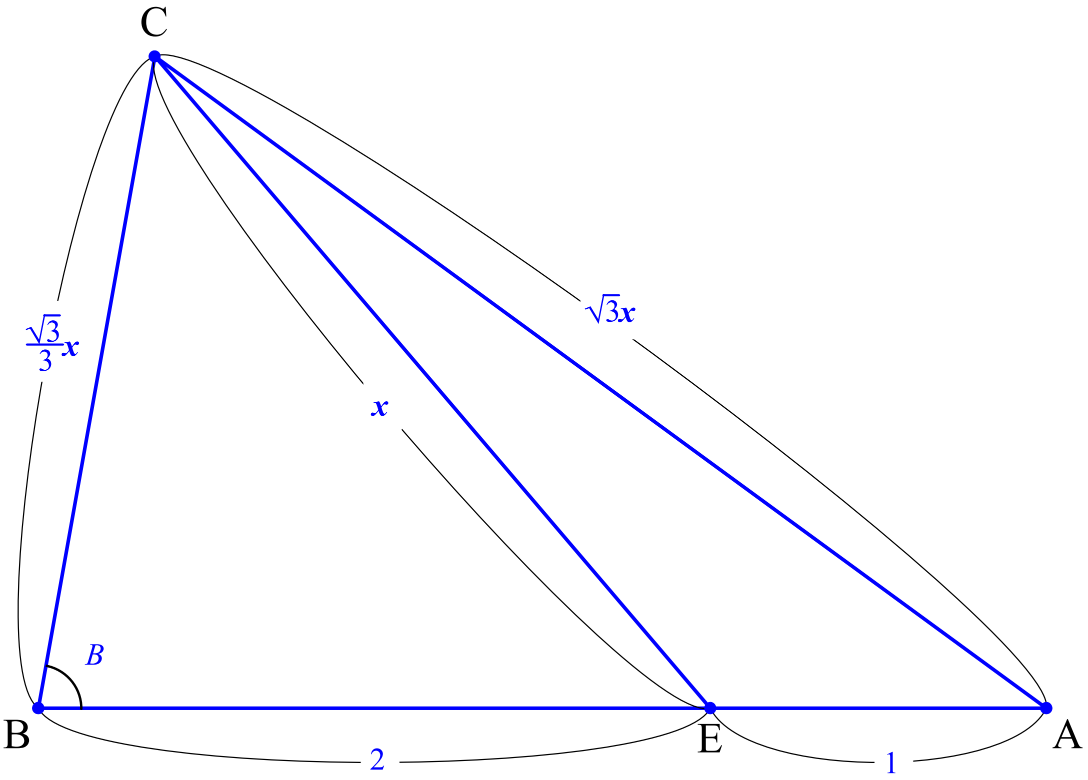
図形と計量

例題 2　余弦定理



三角形 CBE について余弦定理より，

$$\cos B = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 + 2^2 - x^2}{2\cdot 2\cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x} = \frac{6-x^2}{2\sqrt{3}x} \quad \cdots ①$$

三角形 CBA について余弦定理より

$$\cos B = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 + 3^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2}{2\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x} = \frac{27-8x^2}{6\sqrt{3}x} \quad \cdots ②$$

①＝②より，

$$\frac{6-x^2}{2\sqrt{3}x}=\frac{27-8x^2}{6\sqrt{3}x}$$

$$\therefore 3\left(6-x^2\right)=27-8x^2$$

$$\therefore 5x^2=9$$

$x>0$ より，

$$x=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

例題 5　形状決定

(1)

角度で解くと，

$$\begin{aligned}
&\sin C(\cos A+\cos B)-(\sin A+\sin B)\\
&=\sin\{\pi-(A+B)\}(\cos A+\cos B)-(\sin A+\sin B)\\
&=\sin(A+B)(\cos A+\cos B)-(\sin A+\sin B)\\
&=(\sin A\cos B+\sin B\cos A)(\cos A+\cos B)-(\sin A+\sin B)\\
&=\sin A\cos B\cos A+\sin A\cos^2 B+\sin B\cos^2 A+\sin B\cos A\cos B-(\sin A+\sin B)\\
&=\cos A\cos B(\sin A+\sin B)+\sin A(1-\sin^2 B)+\sin B(1-\sin^2 A)-(\sin A+\sin B)\\
&=\cos A\cos B(\sin A+\sin B)-\sin A\sin B(\sin A+\sin B)\\
&=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\sin A+\sin B)\\
&=\cos(A+B)(\sin A+\sin B)\\
&=0
\end{aligned}$$

$0<A,B,C<\pi$，　$A+B+C=\pi$ より，　$\sin A+\sin B>0$

$\therefore \cos(A+B)=0$

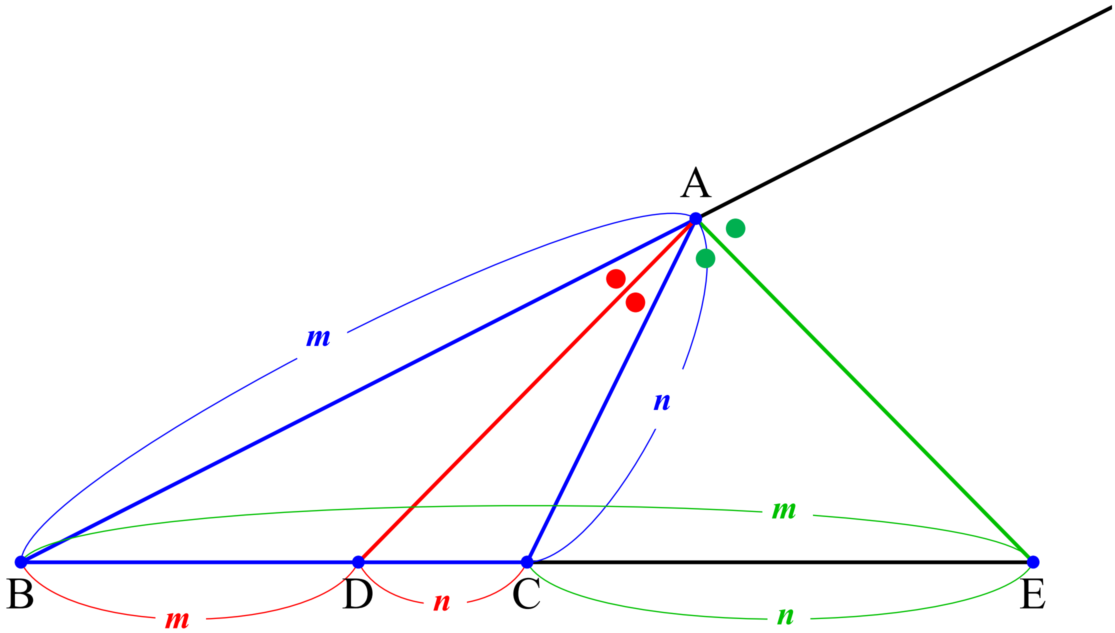
$\therefore A+B=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore C=\pi-(A+B)=\dfrac{\pi}{2}$

例題 6　角の二等分線

三角形の角の二等分線とアポロニウスの円

三角形の角の二等分線



点 D は三角形 ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点

点 E は直線 BC と∠A の外角の二等分線との交点とする。

このとき，

点 D は線分 BC を AB：AC に内分する点である。

よって，BD：DC＝AB：AC

点 E は線分 BC を AB：AC に外分する点である。

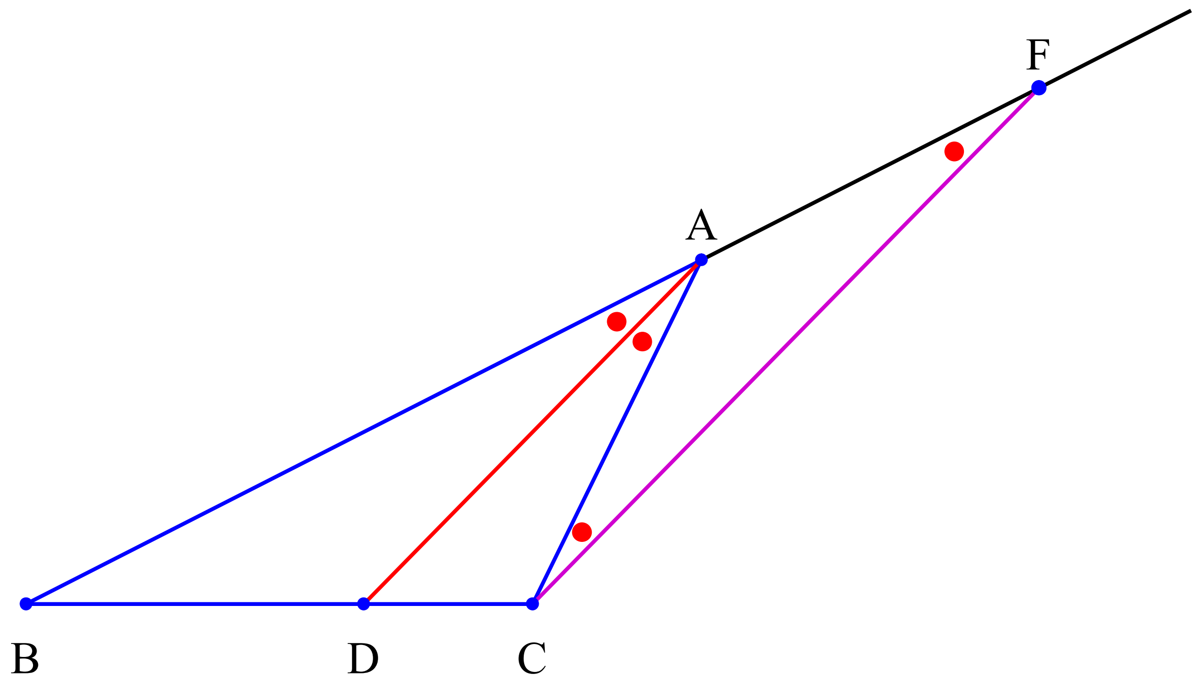
よって，BE：EC＝AB：AC

要するに，

内角の二等分線　⇒　AB：AC に内分する点

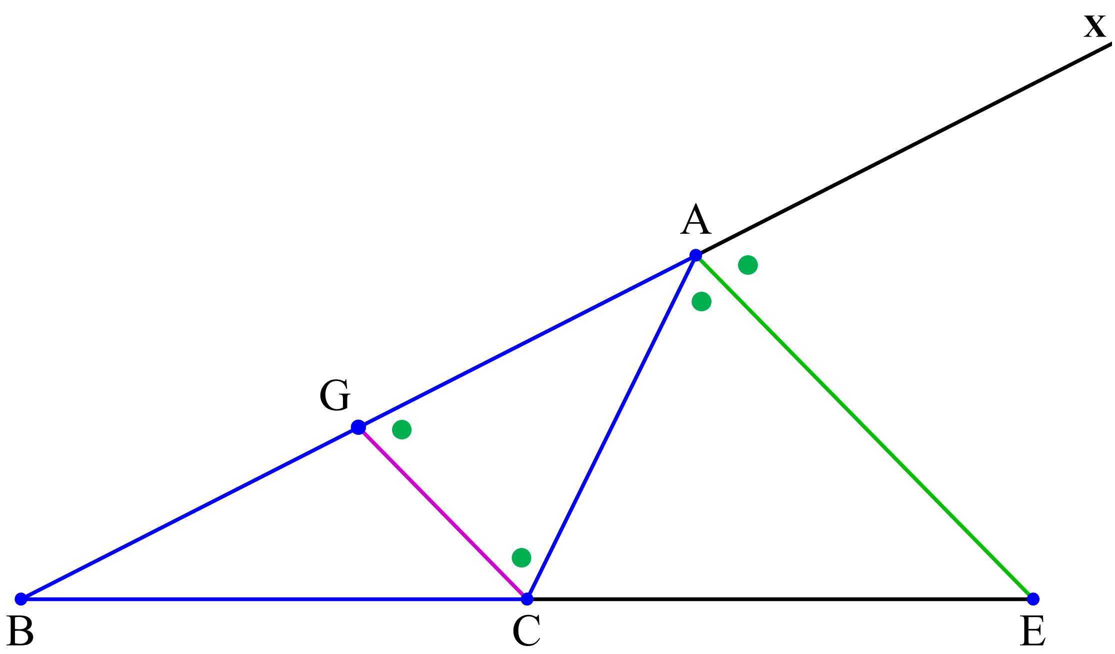
外角の二等分線　⇒　AB：AC に外分する点

証明
内角の二等分線の場合



半直線 BA と点 C を通り，線分 DA と平行な直線との交点を F とすると，
DA//CF より，
　∠BAD＝∠AFC（同位角），∠DAC＝∠ACF（錯角）だから，AC=AF
　よって，AB：AC＝AB：AF　・・・①
　平行線と線分の比より，
　AB：AF＝BD：DC　・・・②
①，②より，
AB：AC＝BD：DC

外角の二等分線の場合



点 C を通り AE と平行な直線と線分 AB との交点を G とすると,

AE//GC より,

∠XAE＝∠AGC（同位角）, ∠EAC＝∠ACG（錯角）だから, AC＝AG

よって, AB：AC＝AB：AG　・・・③

平行線と線分の比より,

AB：AG＝EB：EC　・・・④

③, ④より,

AB：AC＝BE：EC

アポロニウスの円

平面上で 2 定点への距離の比が一定の点の軌跡がつくる円をアポロニウスの円という。

たとえば,

2 定点 B，C からの距離の比が $m:n\ (m \neq n)$ である点を A

線分 BC を $m:n$ に内分する点を D,

線分 BC を $m:n$ に外分する点を E

とすると，点 A の軌跡は，線分 DE を直径とする円を描く。

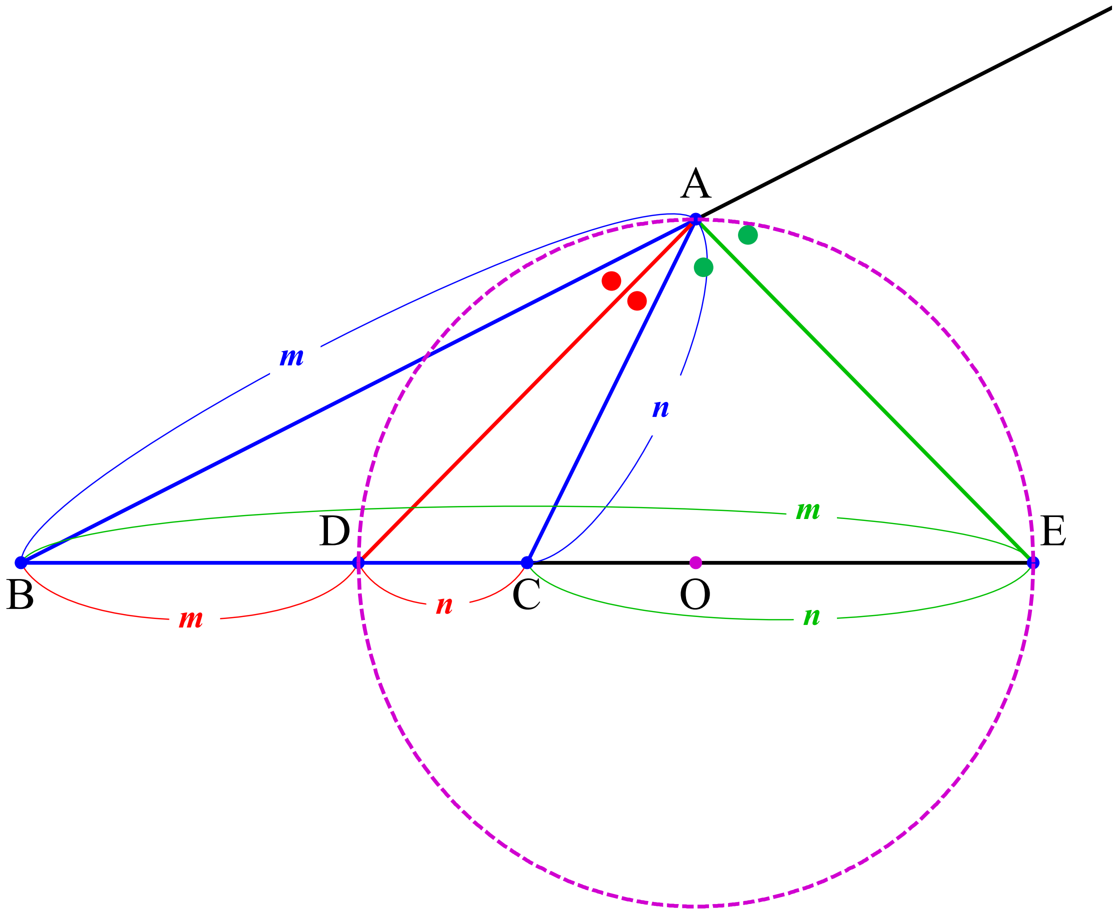
解説

AB：AC＝BD：DC＝$m:n$，AB：AC＝BE：EC＝$m:n$ より，

AD は∠A の二等分線，AE は∠A の外角の二等分線である。

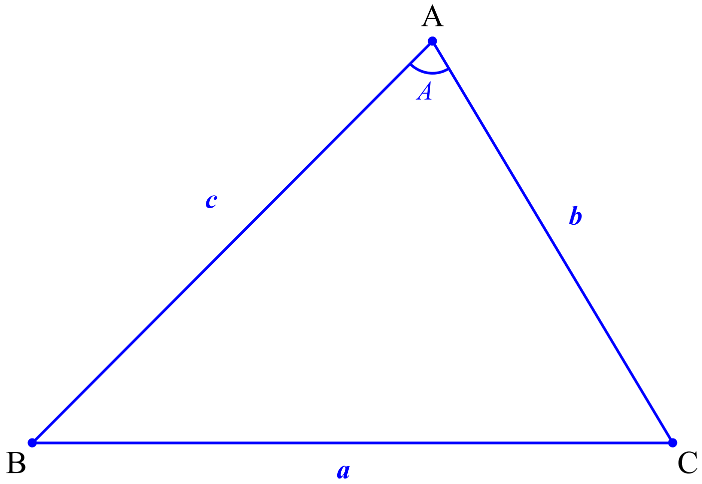
よって，∠DAE＝∠DAC＋∠CAE＝90°　（直径の円周角）

ゆえに，A は線分 DE を直径とする円周上の点である。



例題 7　内接円・外接円の半径

ヘロンの公式の導き方



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$\begin{aligned}
\sin^2 A&=1-\cos^2 A\\
&=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\\
&=\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\
&=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\cdot\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\\
&=\frac{\{a^2-(b-c)^2\}\{-a^2+(b+c)^2\}}{4b^2c^2}\\
&=\frac{\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\{-a+(b+c)\}\{a+(b+c)\}}{4b^2c^2}\\
&=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4b^2c^2}\\
&=\frac{(a+b+c)(-a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}
\end{aligned}$$

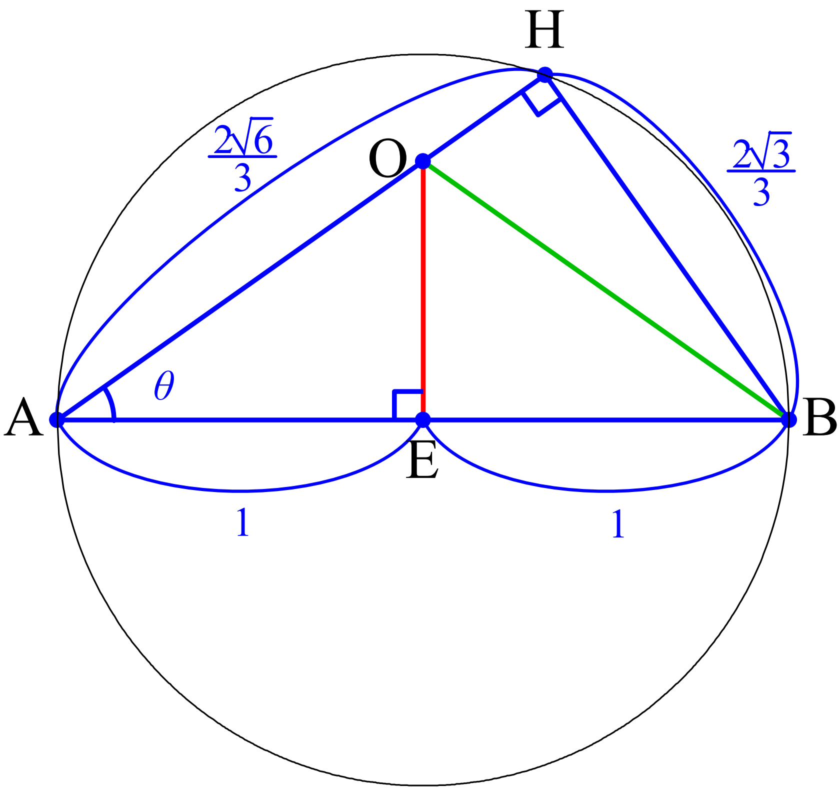
より，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{2^4}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)
\end{aligned}
$$

例題 8　外接球・内接球

(1)

外接球の半径を直接求めてみる。



△ABH は∠H＝90°だから，H は AB と直径とする円周上の点である。

また，AB＝2，BH＝$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ より，AH＝$\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

よって，$\angle BAH=\theta$ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

ここで，外接球の中心を O とすると，

OA＝OB より，O は線分 AB の垂直二等分線上の点であるから，

線分 AB の中点を E とすると，外接球の半径 $OA=\dfrac{AE}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(2)

外接球の半径から，内接球の半径を求めてみる。

図 3 で，直線 BO と線分 AM の交点を H' とすると，

MH＝MH'，MA＝MB より，

MO は∠BMH'の二等分線だから，

BO ： OH'＝MB ： MH'＝3：1

BO は外接球の半径，OH' は内接球の半径だから，

内接球の半径 $OH'=\frac{1}{3}BO=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

よって，

BO ： OH'＝3：1

補足

H が△BCD の重心である理由

図 1 で，△AHB≡△AHC≡△AHD（証明略）

よって，CH＝DH

これと CB＝DB より，直線 BH は辺 CD の垂直二等分線だから，

直線 BH は辺 CD の中線である。

同様に，直線 CH は辺 DB の中線，直線 DH は辺 BC の中線である。

したがって，H は中線の交点，すなわち重心である。

例題 9　正四角錐

(1)

別解（略解）

内接球の半径を r とすると，図 2 で，△PMN の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{PM}+\mathrm{MN}+\mathrm{MP})=\frac{1}{2}r(6\sqrt{2}+6+6\sqrt{2})=3(2\sqrt{2}+1)\cdot r$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{MN}\cdot\mathrm{PH}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{7}=9\sqrt{7}$$

より，$3(2\sqrt{2}+1)\cdot r=9\sqrt{7}$

$$\therefore r=\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}+1}=\frac{3\sqrt{7}(2\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}=\frac{6\sqrt{14}-3\sqrt{7}}{7}$$

例題 10　最短距離

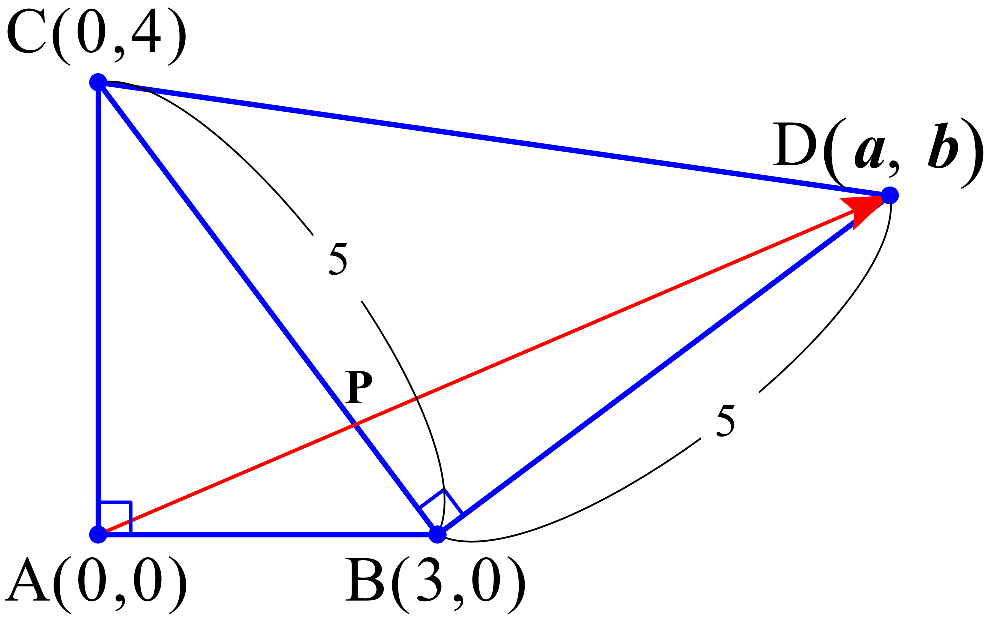
数ベクトル（成分表示ベクトル）で解いてみる

BD は平面 ABC に垂直だから，BC⊥BD

よって，点 A を原点，点 B を x 軸，点 C を y 軸にとると，

展開図の面 ABC と面 BCD の位置関係は下図のようになる。

よって，AP+PD の最小値＝$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|$ であり，このとき，点 P は AD と BC の交点に位置する。



$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$， $\mathrm{D}(a,b)\ (a>0,b>0)$ とすると， $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\begin{pmatrix}a-3\\b\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ より， $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a-3\\b\end{pmatrix}=-3a+9+4b=0$　・・・①

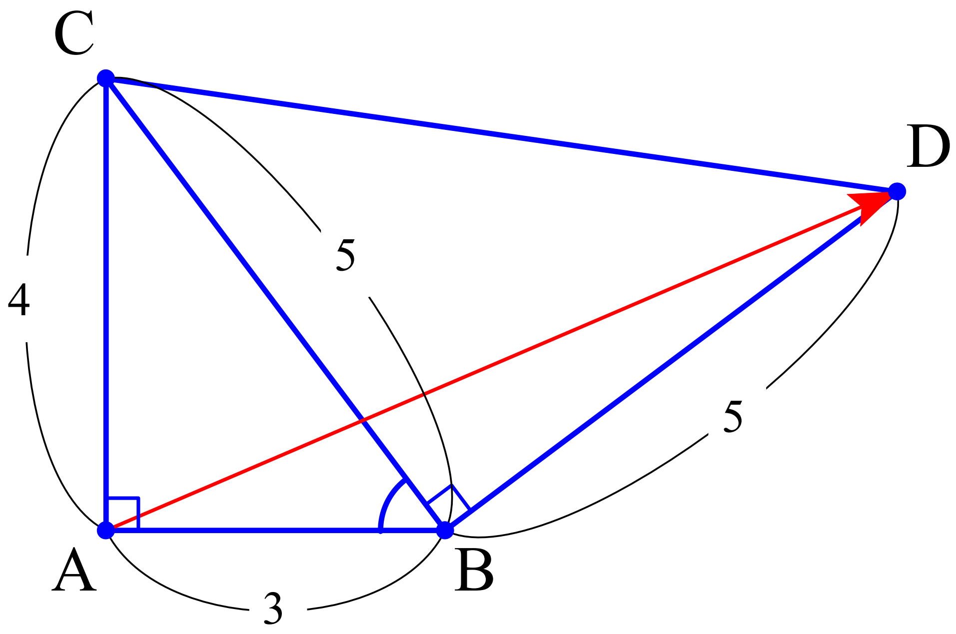
$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=5$ より， $\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\sqrt{(a-3)^2+b^2}=5$　$\therefore (a-3)^2+b^2=25$　・・・②

①より， $b=\dfrac{3}{4}(a-3)$

これを②に代入し，整理すると， $(a-3)^2=16$

$a>0$ より $a=7$， $b=\dfrac{3}{4}(a-3)=3$　よって， $\mathrm{D}(7,3)$

ゆえに，AP+PD の最小値＝$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\sqrt{(7-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{58}$



$$
\begin{aligned}
\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BD}\cos\angle\mathrm{ABD} \\
&= \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BD}\cos\left(\angle\mathrm{ABC} + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BD}^2 + 2\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{ABD} \\
&= 3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{4}{5} \\
&= 58
\end{aligned}
$$

よって，　$\mathrm{AD} = \sqrt{58}$