式と証明

例題 2　整式の割り算／剰余の定理・置き換え

(ロ)

$x^2 = X$ とおくと，

$x^{10} + 2x^2 + 3 = X^5 + 2X + 3$

$x^4 - x^2 + 1 = X^2 - X + 1$

より，

$X^5 + 2X + 3$ を $X^2 - X + 1$ で割った商を $Q(X)$，余りを $aX + b$ とすると，

$X^5 + 2X + 3 = (X^2 - X + 1)Q(X) + aX + b$　・・・①

ここで，$X^2 - X + 1 = 0$ の解を ω とおくと，$\omega^2 - \omega + 1 = 0$　・・・②

$\therefore \omega^2 = \omega - 1$　・・・③

また，$(X+1)(X^2 - X + 1) = X^3 + 1$ より，$\omega^3 + 1 = 0$　$\therefore \omega^3 = -1$　・・・④

①について，$X = \omega$ のとき，②，③，④より，

左辺 $= \omega^5 + 2\omega + 3 = \omega^3 \cdot \omega^2 + 2\omega + 3 = -\omega^2 + 2\omega + 3 = -(\omega - 1) + 2\omega + 3 = \omega + 4$

右辺 $= (\omega^2 - \omega + 1)Q(\omega) + a\omega + b = a\omega + b$

$\therefore \omega + 4 = a\omega + b$

$\therefore a = 1$，$b = 4$

$\therefore aX + b = X + 4 = x^2 + 4$

例題 4　整式の割り算／周期性に着目

別解

$x^{100}=\left(x^2+x+1\right)Q(x)+ax+b$ とおく。

$x^2+x+1=0$ の解を ω とすると，$\omega^2+\omega+1=0$　・・・①

また，$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ より，$\omega^3-1=0$　$\therefore \omega^3=1$　・・・②

①，②より，

$\omega^{100}=\left(\omega^2+\omega+1\right)Q(\omega)+a\omega+b$

$\therefore \left(\omega^3\right)^{33}\cdot\omega=a\omega+b$

$\therefore \omega=a\omega+b$

$\therefore a=1$，$b=0$

これより，$x^{100}=\left(x^2+x+1\right)Q(x)+x$

$\therefore \left(x^2+x+1\right)Q(x)=x^{100}-x$

ここで，$x^{100}-x=x\left(x^{99}-1\right)$

$x^3=X$ とおくと，$x^{99}-1=X^{33}-1=(X-1)\left(X^{32}+X^{31}+X^{30}+\cdots+X^2+X+1\right)$

$\therefore x^{99}-1=\left(x^3-1\right)\left(x^{96}+x^{93}+x^{90}+\cdots+x^{99-3k}+\cdots+x^6+x^3+1\right)$

$\qquad\qquad=(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^{96}+x^{93}+x^{90}+\cdots+x^{99-3k}+\cdots+x^6+x^3+1\right)$

$\therefore \left(x^2+x+1\right)Q(x)=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^{96}+x^{93}+x^{90}+\cdots+x^{99-3k}+\cdots+x^6+x^3+1\right)$

$\therefore Q(x)=x(x-1)\left(x^{96}+x^{93}+x^{90}+\cdots+x^{99-3k}+\cdots+x^6+x^3+1\right)$

$\qquad\quad=\left(x^2-x\right)\left(x^{96}+x^{93}+x^{90}+\cdots+x^{99-3k}+\cdots+x^6+x^3+1\right)$　$(k=1,2,3,\cdots,33)$

x^{88} の係数

$x^2\cdot x^{99-3k}=x^{88}$ のとき，$99-3k+2=88$　$\therefore 3k=13$　k は自然数だから不適

$-x\cdot x^{99-3k}=-x^{88}$ のとき，$99-3k+1=88$　$\therefore 3k=12$　$\therefore k=4$

よって，係数は-1

x^{33} の係数

$x^2\cdot x^{99-3k}=x^{33}$ のとき，$99-3k+2=33$　$\therefore 3k=68$　k は自然数だから不適

$-x\cdot x^{99-3k}=-x^{88}$ のとき，$99-3k+1=33$　$\therefore 3k=67$　k は自然数だから不適

よって，x^{33} の項は存在しない。すなわち x^{33} の係数は 0

例題 5　整式の割り算／2 つの余りの条件

（イ）

整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)(x-3)$ で割ったとき，

商を $Q(x)$（$Q(x)$ は 0 次以上の整式），余りを $R(x)$（$R(x)$ は 2 次以下の整式）とすると，

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)Q(x)+R(x)$ と表せる。

また，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りが $7x$ であることより，

余り $R(x)$ は，$R(x)=a(x-1)(x+2)+7x$ と表せる。

よって，

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)Q(x)+a(x-1)(x+2)+7x$

$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは，剰余定理より $P(3)=1$

これと $P(3)=10a+21$ より，$10a+21=1$

$\therefore a=-2$

よって，求める余りは，$-2(x-1)(x+2)+7x=-2x^2+5x+4$

（ロ）

解法 1

整式 $f(x)$ を $(x^2+3)(x^2+x+2)$ で割ったとき，

商を $Q(x)$（$Q(x)$ は 0 次以上の整式），余りを $R(x)$（$R(x)$ は 3 次以下の整式）とすると，

$f(x)=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+R(x)$ と表せる。

また，$f(x)$ を x^2+3 で割ると $x+3$ 余ることより，

$R(x)=(ax+b)(x^2+3)+x+3$ と表せる。

よって，$f(x)=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+(ax+b)(x^2+3)+x+3$　・・・①

$f(x)$ を x^2+x+2 で割ったときの商を $S(x)$ とすると，余りは $3x+5$ だから，

$f(x)=(x^2+x+2)S(x)+3x+5$　・・・②　とも表せる。

ここで，$x^2+x+2=0$ を満たす解を α とおくと，$\alpha^2+\alpha+2=0$　・・・③

①，③より，

$f(\alpha)=(a\alpha+b)(\alpha^2+3)+\alpha+3$

ここで，③より，$\alpha^2=-\alpha-2$ だから，

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)=(a\alpha+b)(\alpha^2+3)+\alpha+3 &= (a\alpha+b)\{(-\alpha-2)+3\}+\alpha+3 \\
&= (a\alpha+b)(-\alpha+1)+\alpha+3 \\
&= -a\alpha^2+a\alpha-b\alpha+b+\alpha+3 \\
&= -a(-\alpha-2)+a\alpha-b\alpha+\alpha+b+3 \\
&= (2a-b+1)\alpha+2a+b+3
\end{aligned}
$$

$\therefore f(\alpha)=(2a-b+1)\alpha+2a+b+3$　・・・④

一方，②，③より，$f(\alpha)=3\alpha+5$　・・・⑤

④，⑤より，$2a-b+1=3$，$2a+b+3=5$　$\therefore a=1, b=0$

よって，①より，

$f(x)=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+(x+2)(x^2+3)+x+3$

$\quad=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+x^3+4x+3$

これを満たす整式 $f(x)$ のうち，次数が最も低いものは，

商 $Q(x)=0$ のときの $f(x)=x^3+4x+3$ である。

解法 2

整式 $f(x)$ を $(x^2+3)(x^2+x+2)$ で割ったとき，

商を（$Q(x)$ は 0 次以上の整式），余りを $R(x)$（$R(x)$ は 3 次以下の整式）とすると，

$f(x)=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+R(x)$ と表せる。

また，$f(x)$ を x^2+3 で割ると $x+3$ 余ることより，

$R(x)=(ax+b)(x^2+3)+x+3$ と表せる。

よって，

$f(x)=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+(ax+b)(x^2+3)+x+3$

$\quad=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+ax^3+bx^2+(3a+1)x+3b+3$　・・・①

$f(x)$ を x^2+x+2 で割ったときの余りについて

①より，

$ax^3+bx^2+(3a+1)x+3b+3$ を x^2+x+2 で割った余りと等しいから，

割り算により，その余りは，$(2a-b+1)x+2a+b+3$　・・・②

条件より，

$3x+5$　・・・③

②，③より，

$2a-b+1=3$，$2a+b+3=5$　$\therefore a=1, b=0$

よって，①より，

$f(x)=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+(x+2)(x^2+3)+x+3$

$\quad=(x^2+3)(x^2+x+2)Q(x)+x^3+4x+3$

これを満たす整式 $f(x)$ のうち，次数が最も低いものは，

商 $Q(x)=0$ のときの $f(x)=x^3+4x+3$ である。

例題 7　恒等式／次数の決定

$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+g(x)$（$a\neq 0$，$g(x)$は$n-2$次以下の整式）とおくと，

$$(t+1)f(t+1)=a(t+1)^{n+1}+b(t+1)^n+(t+1)g(t+1)$$
$$=a\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k t^{n+1-k}+b\sum_{k=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_k t^{n-k}+(t+1)g(t+1)$$
$$=a\left\{t^{n+1}+(n+1)t^n+\sum_{k=2}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k t^{n+1-k}\right\}+b\left(t^n+\sum_{k=1}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_k t^{n-k}\right)+(t+1)g(t+1)$$

$$(t-1)f(t-1)=a(t-1)^{n+1}+b(t-1)^n+(t-1)g(t-1)$$
$$=a\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k(-1)^k t^{n+1-k}+b\sum_{k=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_k(-1)^k t^{n-k}+(t+1)g(t+1)$$
$$=a\left\{t^{n+1}-(n+1)t^n+\sum_{k=2}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k(-1)^k t^{n+1-k}\right\}+b\left(t^n+\sum_{k=1}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_k(-1)^k t^{n-k}\right)+(t+1)g(t+1)$$

より，

左辺$(t+1)f(t+1)-(t-1)f(t-1)$の最高次の項は，$2a(n+1)t^n$である。

一方，右辺の最高次の項はt^2であるから，

$$2a(n+1)t^n=t^2$$

$$\therefore n=2,\quad a=\frac{1}{6}$$

よって，

$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+g(x)$の$g(x)$は定数項となるから，これをcとおくと，

$$f(x)=\frac{1}{6}x^2+bx+c$$

与式に$t=0$を代入すると，$f(1)+f(-1)=1$

よって，

$$\frac{1}{6}+b+c+\left(\frac{1}{6}-b+c\right)=1$$

$$\therefore c=\frac{1}{3}$$

$$\therefore f(0)=c=\frac{1}{3}$$

例題 8　分数式／恒等式・部分分数分解

部分分数分解

有理関数 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$（$Q(x)$ は $P(x)$ より低次の多項式）を

$\dfrac{A}{(x-a)^m}$，$\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$ の形の分数の和で表すことを，

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ の部分分数分解という。

A,B,C,a,b,c は定数，x^2+bx+c は実数の範囲で因数分解できない（$b^2-4c<0$）とする。
色々な有理関数を部分分数分解した形を以下に示す。

ただし，A_i，B_i，C_i , a_i で表された文字は数列ではなく，ただの定数です。

1．分母が互いに異なる 1 次式の積形の場合

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$ を部分分数分解した形は，

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

2．分母が $(x-\alpha)^n\ (n\geq 2)$ および互いに異なる 1 次式の積形の場合

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x)}{(x-a_1)^n(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$ を部分分数分解した形は，

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_n}{(x-a_1)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a_1)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{B_2}{x-a_2}+\frac{B_3}{x-a_3}+\cdots+\frac{B_n}{x-a_n}$$

3．分母が x^2+bx+c および互いに異なる 1 次式の積形の場合

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x)}{\left(x^2+bx+c\right)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$ を部分分数分解した形は，

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

4．分母が $\left(x^2+bx+c\right)^n\ (n\geq 2)$，$(x-\alpha)^m\ (m\geq 2)$ および互いに異なる 1 次式の積形の場合

$\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x)}{\left(x^2+bx+c\right)^n(x-a_1)^m(x-a_2)\cdots(x-a_l)}$ を部分分数分解した形は，

$$\begin{aligned}\frac{Q(x)}{P(x)}&=\frac{B_nx+C_n}{\left(x^2+bx+c\right)^n}+\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{\left(x^2+bx+c\right)^{n-1}}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}\\&\quad+\frac{A_m}{(x-a_1)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-a_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a_1}\\&\quad+\frac{B_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{B_l}{x-a_l}\end{aligned}$$

補足

部分分数分解 $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$ において，

$\dfrac{C}{(x+2)^2}$ の分母が 2 次式であるのに，分子が 1 次式ではなく，定数 C となる理由

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x+2)^2}&=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{(x+2)^2}\\
&=\frac{a}{x-1}+\frac{b(x+2)-2b+c}{(x+2)^2}\\
&=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{-2b+c}{(x+2)^2}\\
&=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

という風に処理したからである。

おまけ

分母が階乗の部分分数展開

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

例題 9　分数式／分子を分母より低次にする・整数になる条件

(2)

$\dfrac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+2}=x+1+\dfrac{x+2}{x^2+2}$ より，

$\dfrac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+2}$ が整数となるための必要十分条件は，$\dfrac{x+2}{x^2+2}$ が整数となることである。

$\dfrac{x+2}{x^2+2}=k$ （k は整数）とおくと，$kx^2-x+2k-2=0$

この x についての方程式を満たす整数解を α,β とすると，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=\dfrac{1}{k}$，$\alpha\beta=2-\dfrac{2}{k}$

$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，k は整数だから，k がとる値の必要条件は，$k=-1$，1

$k=-1$ のとき

$-x^2-x-4=0$　$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$　よって不適

$k=1$ のとき

$x^2-x=0$　$\therefore x=0.1$

これは，x が負でない整数という条件を満たす。

よって，$x=0$，1

例題 12　$A \geqq B \Leftrightarrow A - B \geqq 0$

(2)

別解　**(1)**の結果を利用して解く

$a \geq b \geq c$，　$x \geq y \geq z$ および(1)より

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \leq \frac{ax+by}{2} \quad \therefore (a+b)x+(a+b)y \leq 2ax+2by \quad \cdots ①$$

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \leq \frac{by+cz}{2} \quad \therefore (b+c)y+(b+c)z \leq 2by+2czy \quad \cdots ②$$

$$\frac{c+a}{2} \cdot \frac{z+x}{2} \leq \frac{cz+ax}{2} \quad \therefore (c+a)z+(c+a)x \leq 2cz+2ax \quad \cdots ③$$

①，②，③より，

$(2a+b+c)x+(a+2b+c)y+(a+b+2c)z \leq 4ax+4by+4bz$

$\therefore (a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z \leq 3ax+3by+3cz$

$\therefore (a+b+c)(x+y+z) \leq 3(ax+by+cz)$

$\therefore \dfrac{a+b+c}{3} \cdot \dfrac{x+y+z}{3} \leq \dfrac{ax+by+cz}{3}$

例題 14　有名不等式／相加平均・相乗平均の関係

(2)

$$\frac{x+y+z+u}{4}=\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+u}{2}}{2}\geq\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zu}}{2}$$ （等号成立は $x=y$ かつ $z=u$ のとき）

$$\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zu}}{2}\geq\sqrt{\sqrt{xy}\cdot\sqrt{zu}}=\sqrt[4]{xyzu}$$ （等号成立は $\sqrt{xy}=\sqrt{zu}$ のとき）

よって，$\dfrac{x+y+z+u}{4}\geq\sqrt[4]{xyzu}$

等号成立は $x=y$ かつ $z=u$ かつ $\sqrt{xy}=\sqrt{zu}$ のとき，すなわち $x=y=z=u$ のとき

(3)

(2)の u を $u=\dfrac{x+y+z}{3}$ とおくと，

$$\frac{x+y+z+\frac{x+y+z}{3}}{4}\geq\sqrt[4]{xyz\cdot\frac{x+y+z}{3}}$$ （等号成立は $x=y=z$ のとき）

$$\therefore\frac{x+y+z}{3}\geq(xyz)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\geq(xyz)^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{3}\geq xyz$$

$$\therefore\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$$

前問の結果を利用して前問と文字種の数が異なる不等式を証明する方法

前問より文字種が多い不等式の証明のとき

方法 1

前問の 1 つの文字種を異なる文字種からなる式で置換して文字種を増やす。

例

前問の不等式が $a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ で，

$x>0$，$y>0$，$z>0$，$u>0\Rightarrow\dfrac{x+y+z+u}{4}\geq\sqrt[4]{xyzu}$ を証明する場合

$a=\dfrac{x+y}{2}$，$b=\dfrac{z+u}{2}$ とおくと，$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

よって，$\dfrac{\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{z+u}{2}}{2}\geq\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{zu}}{2}$ （等号成立は $x=y$ かつ $z=u$ のとき）

以下 p.10 の例題 14(2)参照

方法 2

前問の不等式を 2 種類またはそれ以上つくり，
それらの不等式間で適当な和積の処理を行う。

p.9 の例題 12(2)別解参照

前問より文字種が少ない不等式の証明のとき

前問の 1 つの文字種を残りの他の文字または残りの他の文字を使った式で置き換える。

p.10 の例題 14(3)参照

例題 15　有名不等式／コーシー・シュワルツの不等式

(2)

(1)より，$z_1{}^2 z_2{}^2 = \left(x_1{}^2 + y_1{}^2 + 1\right)\left(x_2{}^2 + y_2{}^2 + 1\right) \geq \left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + 1\right)^2$

$\therefore \left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + 1\right)^2 - z_1{}^2 z_2{}^2 \leq 0$

$\therefore \left(x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2 + 1\right)\left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + 1\right) \leq 0$

$z_1 z_2 > 0$ より，

$x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2 + 1 < x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + 1$

よって，

$x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2 + 1 \leq 0$

例題 16　絶対値記号と不等式・三角不等式

(2)

$xy-ab=(x-a)(y-b)+ay+bx-2ab=(x-a)(y-b)+a(y-b)+b(x-a)$ より，

$$
\begin{aligned}
|xy-ab| &= |(x-a)(y-b)+a(y-b)+b(x-a)| \\
&\leq |(x-a)(y-b)|+|a(y-b)|+|b(x-a)| \\
&= |x-a||y-b|+|a||y-b|+|b||x-a| \\
&< c^2+|a|c+|b|c \\
&= (c+|a|+|b|)c
\end{aligned}
$$