

## 複素数と方程式

## 例題 3 べき乗計算 / 次数が大きいとき

ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n \text{ は整数})$$

証明

まず、 $0 \leq n$  の整数についてド・モアブルの定理が成り立つことを証明する。

(i)

$n=0$  のとき

$$\text{左辺} = (\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1, \quad \text{右辺} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \text{ より成立}$$

(ii)

$n=k$  のとき  $(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$  が成り立つとすると、

$n=k+1$  のとき

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta) + i(\cos k\theta \sin \theta + \sin k\theta \cos \theta) \\ &= \cos(k\theta + \theta) + i \sin(k\theta + \theta) \\ &= \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta \end{aligned}$$

より、 $n=k+1$  のときも成り立つ。

(i), (ii) より、 $0 \leq n$  の整数についてド・モアブルの定理が成り立つ。

続いて、 $n < 0$  のときも成り立つことを証明する。

$n < 0$  のとき、 $n = -m$  とおくと、

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{-m} \\ &= \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^m} \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} \quad (\because 0 < m) \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{\cos m\theta - i \sin m\theta} \\ &= \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta} \\ &= \cos m\theta - i \sin m\theta \\ &= \cos(-n\theta) - i \sin(-n\theta) \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

となり、 $n < 0$  のときも成り立つ。

以上より、すべての整数についてド・モアブルの定理が成り立つ。

(1)

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sqrt{3} + i}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
&= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \\
\alpha^{100} &= \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{100} \\
&= \cos \frac{100}{6} \pi + i \sin \frac{100}{6} \pi \\
&= \cos \frac{50}{3} \pi + i \sin \frac{50}{3} \pi \\
&= \cos \frac{2 \cdot 3 \cdot 8\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{2 \cdot 3 \cdot 8\pi + 2\pi}{3} \\
&= \cos \left( 8 \cdot 2\pi + \frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left( 8 \cdot 2\pi + \frac{2}{3} \pi \right) \\
&= \cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\therefore \alpha^{100} &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{50} - \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{50} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{50} - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{50} \\
&= \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{50} - \left\{ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right\}^{50} \\
&= \cos \frac{50}{4} \pi + i \sin \frac{50}{4} \pi - \cos \left( -\frac{50}{4} \pi \right) - i \sin \left( -\frac{50}{4} \pi \right) \\
&= 2i \sin \frac{50}{4} \pi \\
&= 2i \sin \frac{2 \times 4 \times 6\pi + 2\pi}{4} \\
&= 2i \sin \left( 6 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= 2i
\end{aligned}$$

## 例題4 剰余定理と虚数

(2)

$x^{2002}$  を  $x^4 - 1$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $R(x)$  ( $R(x)$  の次数は3以下) とすると,

$$\begin{aligned}x^{2002} &= (x^4 - 1)Q(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)Q(x) + R(x)\end{aligned}$$

(1)より,  $x^2 + 1$  で割った余りが  $-1$  だから, 定数  $p, q$  を用いて

$$R(x) = px(x^2 + 1) + q(x^2 + 1) - 1 \text{ と表せる。}$$

よって,

$$x^{2002} = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)Q(x) + px(x^2 + 1) + q(x^2 + 1) - 1$$

$$x = 1 \text{ を代入すると, } 1 = 2p + 2q - 1 \quad \therefore p + q = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x = -1 \text{ を代入すると, } 1 = 2p - 2q - 1 \quad \therefore p - q = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$p = 0, \quad q = 1$$

$$\text{よって, } R(x) = x^2$$

## 例題7 解と係数の関係／方程式をつくる

(口)

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + a \cdot \frac{1}{x} + b \left( \frac{1}{x} \right)^2 + \left( \frac{1}{x} \right)^3 = 0$$

$t = \frac{1}{x}$ とおくと、 $1 + at + bt^2 + t^3 = 0$ となり、その解は $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ である。

$t$ を $x$ に書き改めると、

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} \text{を解にもつ方程式は、} x^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \text{となる。}$$

一方、条件より、 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ を解にもつ方程式は、 $x^3 + cx^2 + dx + 1 = 0$ だから、

$$c = b, \quad d = a$$

具体的に解く

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha}, \quad \beta' = \frac{1}{\beta}, \quad \gamma' = \frac{1}{\gamma} \text{とおくと、}$$

$$\alpha = \frac{1}{\alpha'}, \quad \beta = \frac{1}{\beta'}, \quad \gamma = \frac{1}{\gamma'}$$

$\alpha, \beta, \gamma$ は $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ の解だから、

$$\left( \frac{1}{\alpha'} \right)^3 + a \left( \frac{1}{\alpha'} \right)^2 + b \left( \frac{1}{\alpha'} \right) + 1 = 0 \quad \therefore 1 + a\alpha' + b\alpha'^2 + \alpha'^3 = 0$$

$$\text{同様に、} 1 + a\beta' + b\beta'^2 + \beta'^3 = 0, \quad 1 + a\gamma' + b\gamma'^2 + \gamma'^3 = 0$$

よって、 $\alpha', \beta', \gamma'$ 、すなわち $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ を解にもつ方程式は、 $x^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ となる。

条件より、 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ を解にもつ方程式は、 $x^3 + cx^2 + dx + 1 = 0$ だから、 $c = b, \quad d = a$

3 次方程式の 3 つの解  $\alpha, \beta, \gamma$  を変換してできた数を解とする方程式の作り方の他の例

$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$  の実数解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき,

$\alpha - p, \beta - p, \gamma - p$  ( $p$  は定数) を解とする 3 次方程式

方法 1

$\alpha' = \alpha - p, \beta' = \beta - p, \gamma' = \gamma - p$  とおくと,

$\alpha = \alpha' + p, \beta = \beta' + p, \gamma = \gamma' + p$  より,

$$(\alpha' + p)^3 + a(\alpha' + p)^2 + b(\alpha' + p) + 1 = 0$$

同様に,  $(\beta' + p)^3 + a(\beta' + p)^2 + b(\beta' + p) + 1 = 0, (\gamma' + p)^3 + a(\gamma' + p)^2 + b(\gamma' + p) + 1 = 0$

よって,  $(x + p)^3 + a(x + p)^2 + b(x + p) + 1 = 0$

方法 2

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0 \Leftrightarrow \{(x - p) + p\}^3 + a\{(x - p) + p\}^2 + b\{(x - p) + p\} + 1 = 0$$

$x - p = t$  とおくと,  $(t + p)^3 + a(t + p)^2 + b(t + p) + 1 = 0$  となり,

その解は,  $\alpha - p, \beta - p, \gamma - p$  である。

$t$  を  $x$  に書き改めると,  $\alpha - p, \beta - p, \gamma - p$  を解にもつ方程式は,

$$(x + p)^3 + a(x + p)^2 + b(x + p) + 1 = 0$$

## 例題9 2次方程式の判別式/複数の方程式・解の符号

(イ)

「少なくとも1つは実数解をもつ」とあるから、背理法で証明する。

①, ②, ③の判別式をそれぞれ $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ とおき,

①, ②, ③のいずれも実数解をもたないと仮定すると,

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 2b + 1 < 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{D_2}{4} = b^2 - 2c + 1 < 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\frac{D_3}{4} = c^2 - 2a + 1 < 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

より,

$$(a^2 - 2b + 1) + (b^2 - 2c + 1) + (c^2 - 2a + 1) < 0$$

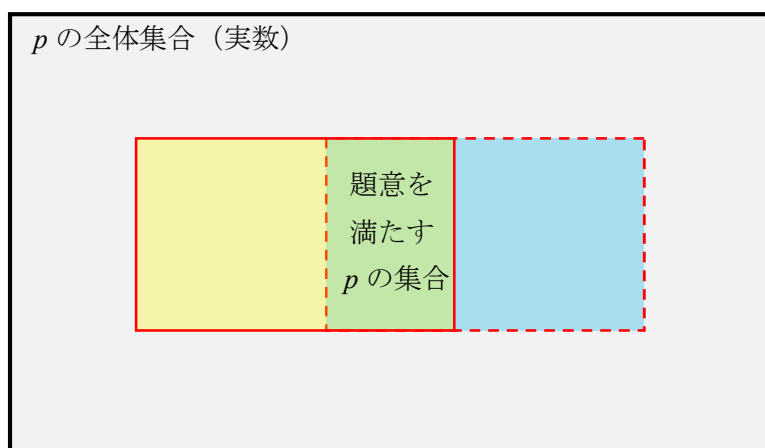
$$\therefore (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 < 0$$

これは $a, b, c$ は実数であることに反する。

よって、背理法により題意が示された。

## 例題 10 虚数係数の方程式

題意を満たす実数  $p$  の値を直接もとめるのが難しいから、ベン図を描いて、どこから攻めるか検討する。



赤色実線枠：実数解をもつときの  $p$  の集合

赤色破線枠：虚数解をもつときの  $p$  の集合

ベン図より、題意を満たす  $p$  の集合は、

実数解をもつとき（虚数解をもつとき）の  $p$  の集合の部分集合である。

そこで、まず2次方程式が実数解（虚数解）をもつときの  $p$  の値をもとめ、その中から題意を満たす  $p$  を選ばばよい。

実数解をもつときの  $p$  を求めることから始める方が楽なのは明らかなので、2次方程式が実数解をもつときの  $p$  の値を求めることから始める。

$$x^2 + (p-1+2i)x - 19p + 50 - 2pi = 0 \text{ より,}$$

$$x^2 + (p-1)x - 19p + 50 + 2(x-p) \cdot i = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$x$  が実数のとき、

$$x^2 + (p-1)x - 19p + 50 \text{ と } x-p \text{ は実数だから,}$$

$x$  が実数解をもつとき

$$x^2 + (p-1)x - 19p + 50 = 0 \text{ かつ } x-p=0 \text{ でなければならない。}$$

$$x-p=0 \text{ の解は } x=p \text{ であり,}$$

これが  $x^2 + (p-1)x - 19p + 50 = 0$  を満たすとき、

$$p^2 + (p-1)p - 19p + 50 = 0$$

$$\therefore p^2 - 10p + 25 = 0$$

$$\therefore (p-5)^2 = 0$$

$$\therefore p = 5$$

次に、 $p=5$  のとき、2次方程式が題意を満たすかどうかについて検討する。

$p=5$  を①に代入すると,

$$x^2 + 4x - 45 + 2(x-5) \cdot i = 0$$

$$\therefore (x-5)(x+9) + 2(x-5) \cdot i = 0$$

$$\therefore (x-5)(x+9+2i) = 0$$

$$\therefore x=5, \quad -9-2i$$

よって,  $p=5$  は, 題意を満たす。

以上より,  $p=5, \quad x=5, \quad -9-2i$



例題 11  $x^2 \pm x + 1 = 0$  の解

(2)

$$b^2 - b + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{と条件より, } b = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } (b+1)(b^2 - b + 1) = 0$$

$$\therefore b^3 = -1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$S_{20} = b + 2b^2 + 3b^3 + \dots + 20b^{20} \text{ とおくと,}$$

$$bS_{20} = b^2 + 2b^3 + 3b^4 + \dots + 19b^{20} + 20b^{21}$$

$$\therefore (1-b)S_{20} = b + b^2 + \dots + b^{20} - 20b^{21}$$

これと①, ③より,

$$(1-b)S_{20} = b + b^2 + \dots + b^{20} - 20b^{21}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{20} b^k - 20b^{21} \\ &= \frac{b^1 - b^{21}}{1-b} - 20b^{21} \\ &= \frac{b - (b^3)^7}{1-b} - 20(b^3)^7 \\ &= \frac{b - (-1)^7}{1-b} - 20(-1)^7 \\ &= \frac{1+b}{1-b} + 20 \\ &= \frac{21-19b}{1-b} \end{aligned}$$

$$\therefore S_{20} = \frac{21-19b}{(1-b)^2}$$

これと①, ②, ③より,

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{21-19b}{b^2 - 2b + 1} \\ &= \frac{21-19b}{(b^2 - b + 1) - b} \\ &= \frac{-21+19b}{b} \\ &= -\frac{21}{b} + 19 \\ &= \frac{-21 + 21\sqrt{3}i}{2} + 19 \\ &= \frac{17 + 21\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

## 例題 12 共通解問題

連立方程式を解くとき無意識に行なっている処理

たとえば、連立方程式  $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=-1 \end{cases}$  は、  $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$  と変形できる。

この連立方程式の解は、  $x+y-2=0$  かつ  $x-2y+1=0$  を満たすから、任意の実数を  $p, q$  とすると、

$$p(x+y-2)+q(x-2y+1)=0 \text{ が成り立つ。}$$

よって、

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \text{ の共通解} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ p(x+y-2)+q(x-2y+1)=0 \end{cases} \text{ の共通解} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+1=0 \\ p(x+y-2)+q(x-2y+1)=0 \end{cases} \text{ の共通解} \end{aligned}$$

が成り立つ。

連立方程式を解くとき、このことを無意識に利用している。

つまり、

$$p(x+y-2)+q(x-2y+1)=0 \text{ において、}$$

$$p=2, \quad q=1 \text{ のとき } 3x-3=0$$

$$p=1, \quad q=-1 \text{ のとき } 3y-3=0$$

$$\text{よって、} \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \text{ の共通解} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3=0 \\ 3y-3=0 \end{cases} \text{ の共通解} \Leftrightarrow x=1, \quad y=1$$

として解いている。

これを拡張すると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases} \text{ の共通解} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y)=0 \\ p(x, y)f(x, y)+q(x, y)g(x, y)=0 \end{cases} \text{ の共通解} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x, y)=0 \\ p(x, y)f(x, y)+q(x, y)g(x, y)=0 \end{cases} \text{ の共通解} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases} \text{ の共通解} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ p(x)f(x)+q(x)g(x)=0 \end{cases} \text{ の共通解}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=0 \\ p(x)f(x)+q(x)g(x)=0 \end{cases} \text{ の共通解}$$

とできる。

このことを利用すれば、連立方程式の次数を下げたり、

2円の交点を通る直線など2曲線の交点を通る直線や曲線の方程式を求めたりすることができる。

## 例題 13 共役複素数解

共役複素数の和・差・積・商

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$$

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \quad (\beta \neq 0)$$

これらの関係は3個以上の複素数についても成り立つ。

証明

 $\alpha = a + bi$ ,  $\beta = c + di$  とすると,

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{(a + bi) \pm (c + di)}$$

$$= \overline{(a \pm c) + (b \pm d) \cdot i}$$

$$= (a \pm c) - (b \pm d) \cdot i$$

$$= (a - bi) \pm (c - di)$$

$$= \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$$

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{(a + bi)(c + di)}$$

$$= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$$

$$= (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$= (a - bi)(c - di)$$

$$= \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \cdot \overline{\beta} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha} \quad \therefore \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

このことを使って,

**実数係数の方程式**  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$  が虚数解  $\alpha$  をもてば $\overline{\alpha}$  も解であることを以下のようにして示すことができる。 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  とおくと, $f(\alpha) = 0$  より,  $\overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0$ 

$$\overline{f(\alpha)} = \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n}$$

$$= \overline{a_0\alpha^n} + \overline{a_1\alpha^{n-1}} + \overline{a_2\alpha^{n-2}} + \dots + \overline{a_{n-1}\alpha} + \overline{a_n}$$

$$= a_0\overline{\alpha^n} + a_1\overline{\alpha^{n-1}} + a_2\overline{\alpha^{n-2}} + \dots + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n$$

$$= a_0(\overline{\alpha})^n + a_1(\overline{\alpha})^{n-1} + a_2(\overline{\alpha})^{n-2} + \dots + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n$$

$$= f(\overline{\alpha})$$

$$\therefore f(\overline{\alpha}) = 0$$

よって,  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  が虚数解  $\alpha$  をもてば,  $\overline{\alpha}$  も解である。

2次以上の有理数係数の方程式  $f(x)=0$  が  $x=p+q\sqrt{r}$  ( $p, q$ は有理数) を解にもてば  $x=p-q\sqrt{r}$  も解であることのテキストとは別の方法による証明

有理数係数の2次方程式を  $ax^2+bx+c=0$  とすると,

$$\text{解の公式より, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ここで  $\frac{b}{2a} = p$ ,  $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = q\sqrt{r}$  ( $\sqrt{r}$ は無理数) とすると,

有理数係数の2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の解について,

$$p+q\sqrt{r} \text{ が解} \Leftrightarrow p-q\sqrt{r} \text{ が解}$$

が成り立つ。

次に,  $p+q\sqrt{r}$  を解にもつ3次以上の方程式を  $f(x)$  とおき,

これを  $ax^2+bx+c$  で割ったときの商を  $g(x)$ , 余りを  $mx+n$  とすると,

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)g(x) + mx + n$$

$$\therefore f(p+q\sqrt{r}) = m(p+q\sqrt{r}) + n$$

$$\therefore f(p+q\sqrt{r}) = (mp+n) + q\sqrt{r}$$

$$f(p+q\sqrt{r}) = 0 \text{ より, } (mp+n) + mq\sqrt{r} = 0$$

ここで  $m \neq 0$  とすると,  $\sqrt{r} = \frac{mp+n}{mq} = \text{有理数}$

これは  $\sqrt{r}$  が無理数であることに反する。

よって,  $m=0$

これと  $(mp+n) + mq\sqrt{r} = 0$  より,  $mp+n=0$

$$\therefore f(p-q\sqrt{r}) = m(p-q\sqrt{r}) + n = (mp+n) - mq\sqrt{r} = 0$$

以上より,

2次以上の有理数係数の方程式  $f(x)=0$  が,

$x=p+q\sqrt{r}$  ( $p, q$ は有理数) を解にもてば

$x=p-q\sqrt{r}$  も解である。

## 例題 15 4次方程式／ノーヒントで解く 相反方程式とその解き方

### 相反方程式

整式の方程式を降べきの順あるいは昇べきの順に整理したとき、  
係数が左右対称となる方程式  
逆数方程式ともいう。

### 相反方程式の分類

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0) \quad \dots \textcircled{1} \text{ (偶数次の相反方程式)}$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0) \quad \dots \textcircled{2} \text{ (奇数次の相反方程式)}$$

解き方は、方程式が偶数次 (①) と奇数次 (②) で異なる。

### 相反方程式の解き方

#### 注意

$x=0$  が相反方程式の解でないことを示してから、  
偶数次あるいは奇数次の相反方程式を解く作業に入る。

#### 1. 偶数次の相反方程式 (①) の解き方

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

↓ 両辺を  $x^2$  ( $x \neq 0$ ) で割る。

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

↓ 係数について整理する。

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

$$a\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\} + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

↓  $x + \frac{1}{x} = y$  とおき、 $y$  についての2次方程式にする。

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

$$ay^2 + by - 2a + c = 0$$

↓

解  $y$  と  $y = x + \frac{1}{x}$  から解  $x$  を求める。

## 2. 奇数次の相反方程式 (2) の解き方

解き方のポイント：因数分解し、偶数次の相反方程式をつくる。

$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$  に  $x = -1$  を代入すると、

$-a + b - c + c - b + a = 0$  となるから、

$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  は  $x = -1$  を解にもつ。

すなわち、 $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$  は  $x + 1$  で割り切れる。

よって、

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = (x + 1)\{ax^4 + (-a + b)x^3 + (a - b + c)x^2 + (-a + b)x + a\}$$

ゆえに、

$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  は、

$$(x + 1)\{ax^4 + (-a + b)x^3 + (a - b + c)x^2 + (-a + b)x + a\} = 0$$

と変形できる。

よって、

$x = -1$  以外の解は、

$$\text{偶数次の相反方程式： } ax^4 + (-a + b)x^3 + (a - b + c)x^2 + (-a + b)x + a = 0$$

を解いて求めればよい。

**重要**

$x + \frac{1}{x}$  には、 $x > 0$  の条件が付けられていることがよくあるので注意しなければならない。

たとえば、

$y = x + \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) のとき、 $ay^2 + by - 2a + c$  ( $a > 0$ ) の最小値を求めよ。

といった問題では、

相加平均  $\geq$  相乗平均より、 $y = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$  だから、

$y \geq 2$  の範囲で最小値を求めなければならない。

ともかく、

正の数が出てきたら、条件反射的に「相加平均  $\geq$  相乗平均」を意識しよう。