指数・対数・三角関数

指数関数と対数関数が互いに逆関数であることを利用した置き換え

置き換え 1： $\boldsymbol{x = \log_a a^x}$

$$x \underset{\log_a y}{\overset{a^x}{\rightleftarrows}} y$$

より，$y = a^x$，$x = \log_a y$

よって，

$x = \log_a a^x$

これはよく見かける置き換えであり，なんてことはない。

大事なのは，置き換え 2 である。

置き換え 2： $\boldsymbol{x = a^{\log_a x}}$

$$x \underset{a^y}{\overset{\log_a x}{\rightleftarrows}} y$$

より，$y = \log_a x$，$x = a^y$

よって，

$x = a^{\log_a x}$

特に数学Ⅲの積分において，この置き換えは重要である。

例

$p = a^{\log_a p}$

$p = e^{\log p}$

$p^q = a^{\log_a p^q} = a^{q \log_a p}$

$p^q = e^{\log p^q} = e^{q \log p}$

例題 4　対数方程式・不等式

指数の大小

x, y は 1 でない正数とする。

1. 指数が有理数の場合

例：$x^{\frac{a}{b}}$ と $y^{\frac{c}{d}}$ の大小

手順 1

指数を通分してから，同じ指数の式に変形する。

$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$，$\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$ より，

$x^{\frac{a}{b}}=x^{\frac{ad}{bd}}=\left(x^{ad}\right)^{\frac{1}{bd}}$，$y^{\frac{c}{d}}=y^{\frac{bc}{bd}}=\left(y^{bc}\right)^{\frac{1}{bd}}$

手順 2

x^{ad} と y^{bc} の大小関係から，$\left(x^{ad}\right)^{\frac{1}{bd}}$ と $\left(y^{bc}\right)^{\frac{1}{bd}}$ の大小関係を求める。

（$t=s^{\frac{1}{bd}}$ のグラフの概形を描き大小関係を調べると楽）

2. 指数が無理数の場合

無理数指数を大小関係を調べる上で有効な有理数ではさみ，
有理数指数の大小関係にもっていく。

例：$x^{\sqrt{a}}$ と $y^{\sqrt{b}}$ の大小

たとえば，$p<\sqrt{a}<q$，$r<\sqrt{b}<s$ とすると，

$1<x$，$1<y$ のとき

$x^p<x^{\sqrt{a}}<x^q$，$y^r<y^{\sqrt{b}}<y^s$ であり，$x^q<y^r \Rightarrow x^{\sqrt{a}}<y^{\sqrt{b}}$

$0<x<1$，$0<y<1$ のとき

$x^p>x^{\sqrt{a}}>x^q$，$y^r>y^{\sqrt{b}}>y^s$ であり，$x^p<y^s \Rightarrow x^{\sqrt{a}}<y^{\sqrt{b}}$

対数の大小

対数の底をそろえ，真数の大小を調べる。

$\log_a p<\log_a q<\log_a r$ において，

$0<a<1$ のとき $p>q>r$，$1<a$ のとき $p<q<r$ となることに注意する。

例題 5　指数・対数／連立方程式・不等式

(ロ)

別解

底を a とする対数をとると，

$a+b=24\log_a b \quad \therefore \log_a b=\dfrac{a+b}{24}$　・・・①

$(a+b)\log_a b=6 \quad \therefore \log_a b=\dfrac{6}{a+b}$　・・・②

①，②より，

$\dfrac{a+b}{24}=\dfrac{6}{a+b} \quad \therefore (a+b)^2=144$

a,b は 1 でない正数だから，$a+b=12$　・・・③

よって，$\therefore \log_a b=\dfrac{a+b}{24}=\dfrac{1}{2} \quad \therefore a=b^2$　・・・④

③，④より，$a=9$，$b=3$

例題 8　三角方程式・不等式

(イ)

単位円の周上の点を (x,y) とすると，$\cos\theta=x$，$\sin\theta=y$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ より，

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{3} \qquad \therefore y=-\dfrac{2}{3}x+1$

これを $x^2+y^2=1$ に代入し整理すると，$\dfrac{x(13x-12)}{9}=0$

これと $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<x<1 \quad \therefore \cos\theta=x=\dfrac{12}{13}$

$\therefore \sin\theta=y=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{12}{13}+1=\dfrac{5}{13}$，$\qquad \therefore \tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{12}$

(ハ)

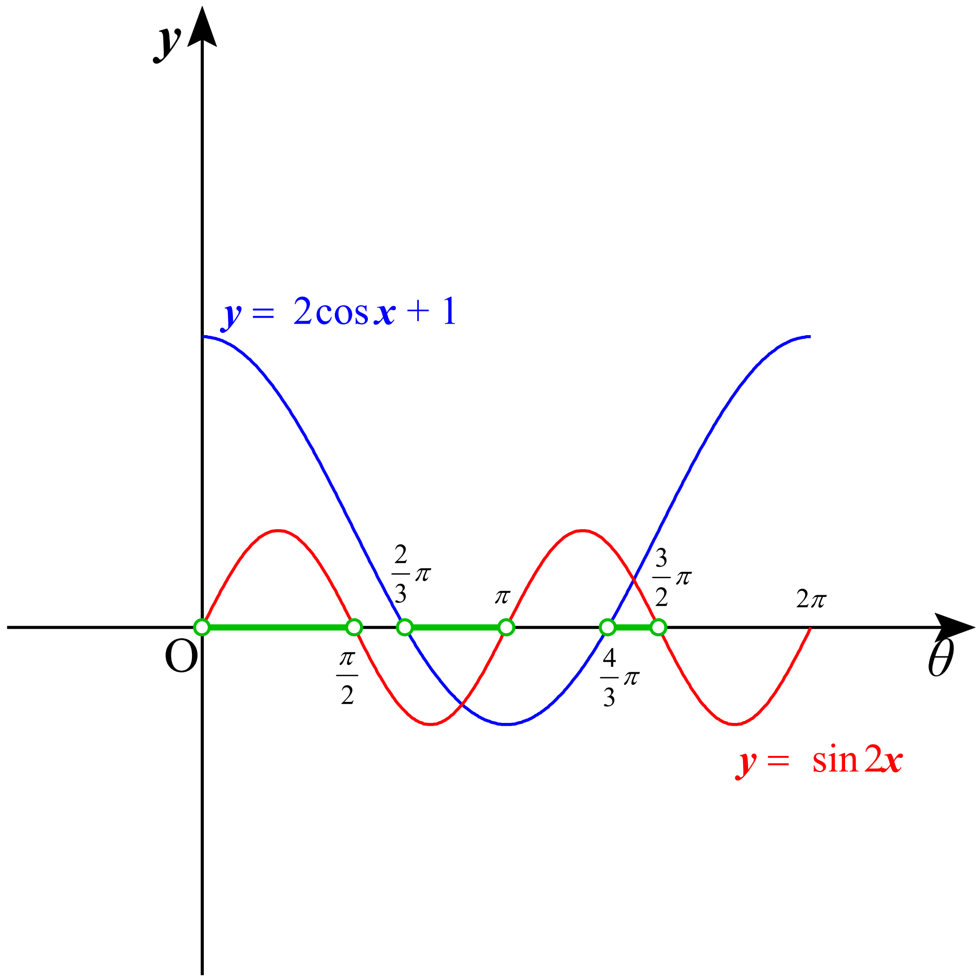
$$\begin{aligned}\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta&=(\sin\theta+\sin3\theta)+\sin2\theta\\&=2\sin\theta\cos\theta+\sin2\theta\\&=\sin2\theta(2\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$\therefore \sin2\theta(2\cos\theta+1)>0$

$\therefore \sin2\theta>0$，$2\cos\theta+1>0$ または $\sin2\theta<0$，$2\cos\theta+1<0$

ここで，$y=\sin2\theta$ と $y=2\cos\theta+1$ のグラフを描いて，解を求めると，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$



補足：単位円を利用するばかりが能じゃない

三角不等式をグラフを利用して簡単に解く方法

例：x についての三角不等式 $A\sin(px+q)<a$　$(-A<a<A,\ 0\leq x<2\pi)$ を解く場合

1．$px+q=X$ $(q\leq X<2p\pi+q)$ とおき，$y=A\sin X$ のグラフを描く。

2．X の不等式 $A\sin X<a$ $(q\leq X<2p\pi+q)$ の解をグラフから求める。

3．$px+q=X$ より，解 x を求める。

例題 11　三角関数／合成

$a\cos\theta + b\sin\theta$ を sin で合成

$a\cos\theta + b\sin\theta = r\sin(\theta+\alpha)$　$(r>0)$とすると，

$r\sin(\theta+\alpha) = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta$ より，

$r\cos\alpha = a$ ，　$r\sin\alpha = b$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{a}{r}$ ，　$\sin\alpha = \dfrac{b}{r}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より，　$\dfrac{a^2}{r^2} + \dfrac{b^2}{r^2} = 1$

$\therefore r = \sqrt{a^2+b^2}$

$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，　$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，　$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a\cos\theta + b\sin\theta$ を cos で合成

$a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta-\alpha)$　$(r>0)$とすると，

$r\sin(\theta+\alpha) = r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta$ より，

$r\cos\alpha = a$ ，　$r\sin\alpha = b$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{a}{r}$ ，　$\sin\alpha = \dfrac{b}{r}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より，　$\dfrac{a^2}{r^2} + \dfrac{b^2}{r^2} = 1$

$\therefore r = \sqrt{a^2+b^2}$

$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$，　$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，　$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

例題 13　三角関数／「和→積」,「積→和」

(ロ)

問題文を以下のように変換していく。

x, y は $0°\leq x\leq 90°$, $0°\leq y\leq 90°$ であり,

$\cos x+\cos y=1$ を満たしている。

$$\Downarrow$$

$\dfrac{x+y}{2}$, $\dfrac{x-y}{2}$ は $0°\leq\dfrac{x+y}{2}\leq 90°$, $-45°\leq\dfrac{x-y}{2}\leq 45°$ であり,

$\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$ を満たしている。

$$\Downarrow$$

$\cos\dfrac{x+y}{2}$, $\cos\dfrac{x-y}{2}$ は, $0\leq\cos\dfrac{x+y}{2}\leq 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq\cos\dfrac{x-y}{2}\leq 1$ であり,

$\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$ を満たしている。

$$\Downarrow$$

$\dfrac{1}{\cos\frac{x+y}{2}}$, $\dfrac{1}{\cos\frac{x-y}{2}}$ は, $1\leq\dfrac{1}{\cos\frac{x+y}{2}}$, $1\leq\dfrac{1}{\cos\frac{x-y}{2}}\leq\sqrt{2}$ であり,

$\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$ を満たしている。

解

$\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$ より, $\cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2\cos\frac{x-y}{2}}$

$1\leq\dfrac{1}{\cos\frac{x-y}{2}}\leq\sqrt{2}$ だから, $\dfrac{1}{2}\leq\cos\dfrac{x+y}{2}\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これは, $0\leq\cos\dfrac{x+y}{2}\leq 1$ に含まれる。

よって, $\dfrac{1}{2}\leq\cos\dfrac{x+y}{2}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$ より，$\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{x+y}{2}}$

$1\leq\dfrac{1}{\cos\dfrac{x+y}{2}}$ だから，$\dfrac{1}{2}\leq\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq\cos\dfrac{x-y}{2}\leq 1$ は $\dfrac{1}{2}\leq\cos\dfrac{x-y}{2}$ に含まれる。

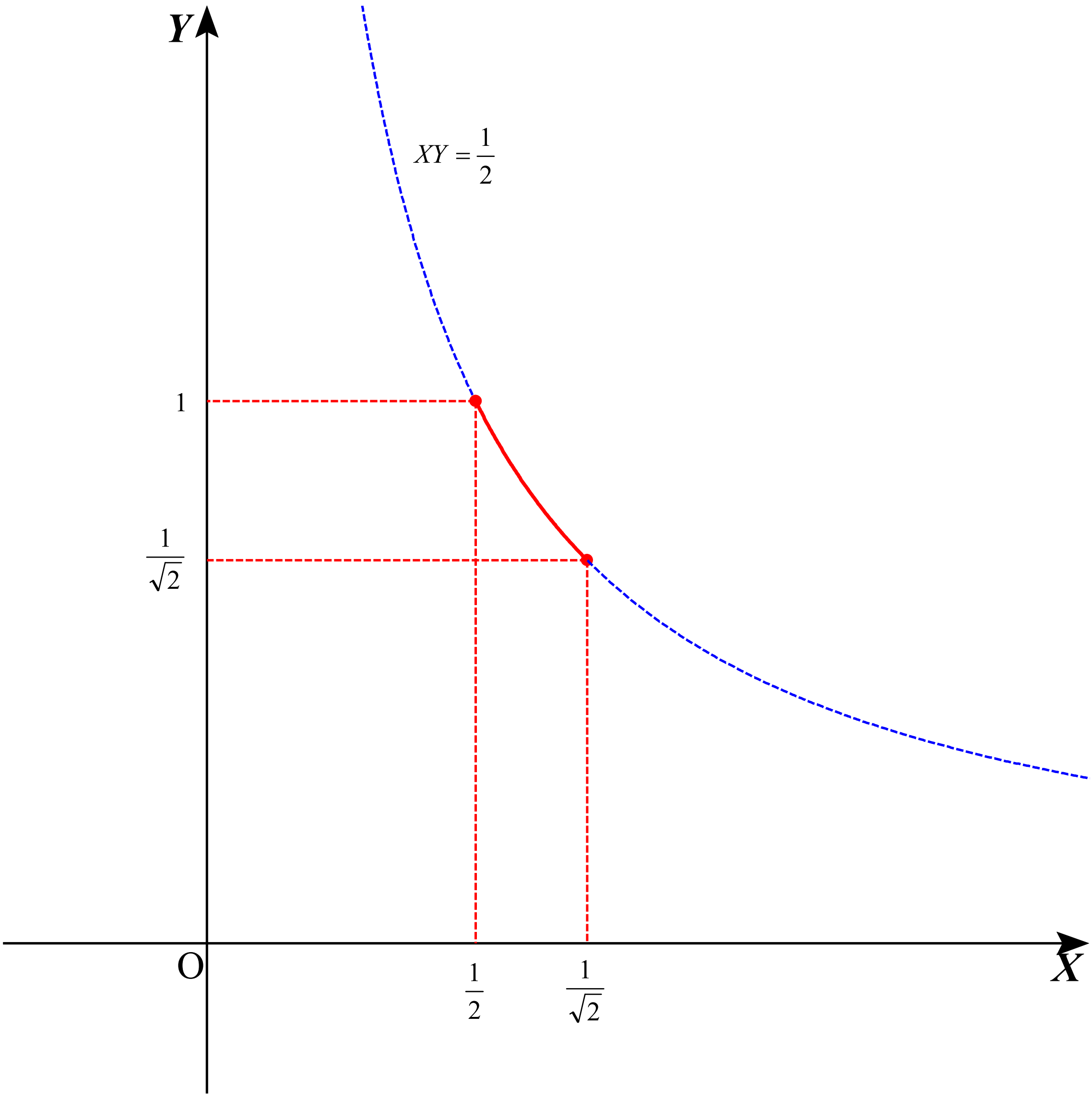
よって，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq\cos\dfrac{x-y}{2}\leq 1$

別解

$\cos\dfrac{x+y}{2}=X$，　$\cos\dfrac{x-y}{2}=Y$ とおくと，

$0\leq X\leq 1$，　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq Y\leq 1$，　$XY=\dfrac{1}{2}$

これを XY 直交座標系に表すと次のようになる。



グラフより，$\dfrac{1}{2}\leq X\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq Y\leq 1$

よって，$\dfrac{1}{2}\leq\cos\dfrac{x+y}{2}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq\cos\dfrac{x-y}{2}\leq 1$