座標

点と直線の距離の公式

点 $\mathrm{A}(p,q)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離 $\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ の別証

点 $\mathrm{A}(p,q)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足を点 $\mathrm{B}(X,Y)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} X-p \\ Y-q \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は互いに従属の関係にあるから，

$\begin{pmatrix} X-p \\ Y-q \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ （k は 0 でない実数）

$\therefore X=ka+p$，　$Y=kb+q$　　・・・①

点 $\mathrm{B}(X,Y)$ は $ax+by+c=0$ を満たすから，　$aX+bY+c=0$　　・・・②

①，②より，

$a(ka+p)+b(kb+q)+c=0$

$\therefore k=\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}$　　・・・③

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} X-p \\ Y-q \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ より，　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{k^2(a^2+b^2)}=|k|\sqrt{a^2+b^2}$　　・・・④

③，④より，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3 角形の面積

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{AOB}&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\cos^2\angle\mathrm{AOB}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-(ab+cd)^2}\\&=\frac{1}{2}|ad-bc|\end{aligned}$$

この面積公式を使う状況

面積の計算が非常に煩雑になる場合によく使う。

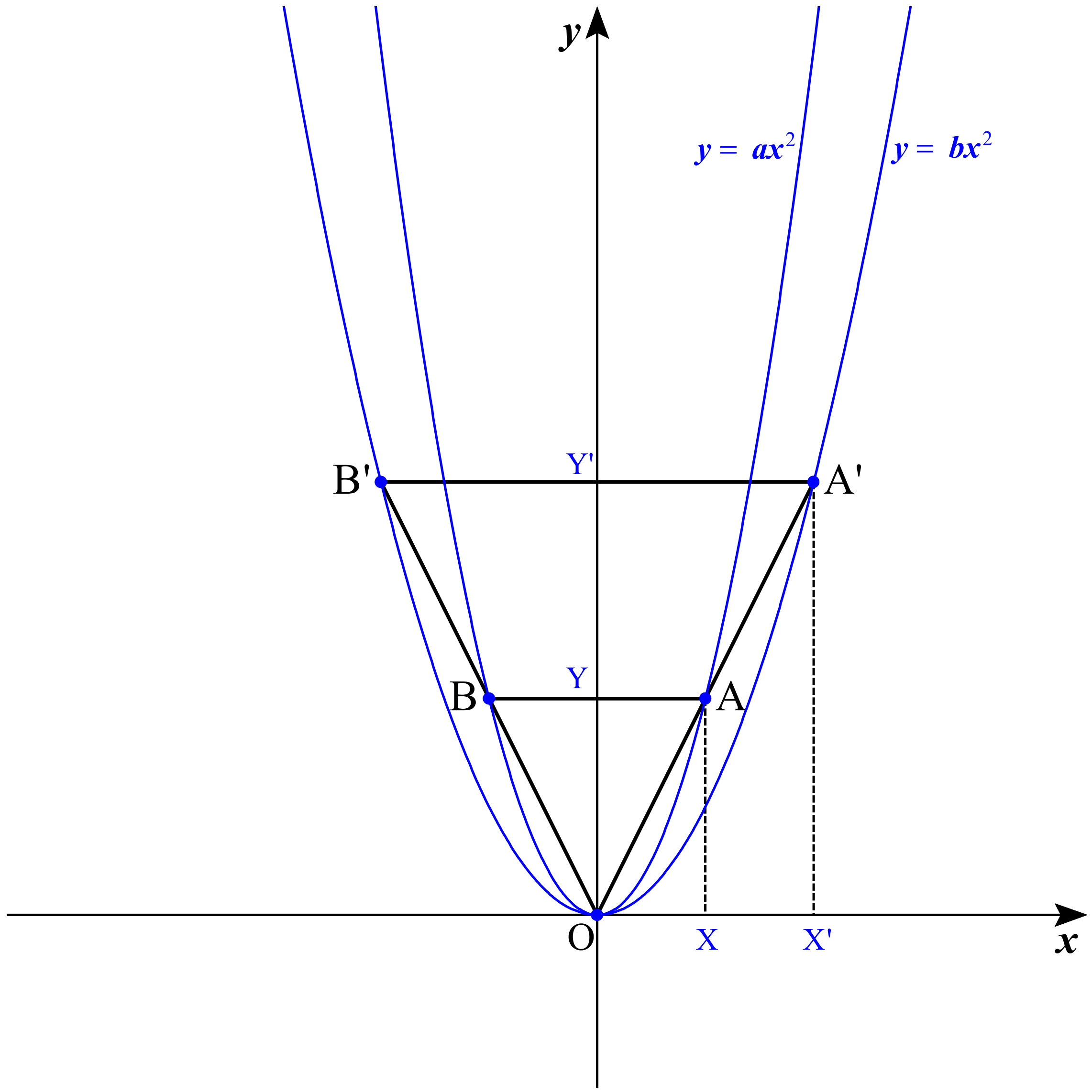
ベクトルの問題の小問として出題される面積問題で使うことが多い。

2 次関数の相似比と相似中心

実数係数の 2 次関数はすべて相似あるいは合同であり，

たとえば， $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $\left|\frac{1}{a}\right|:\left|\frac{1}{b}\right|=|b|:|a|$ である。

ここで， $a>0$ ， $b>0$ の場合を考え，その相似比を求めてみる。



図より，△OABと△OA'B'の相似比が $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比である。

$y=ax^2$ 上の任意の点を (X,Y) とすると，

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$

両辺を $\dfrac{a}{b}$ 倍すると，$\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}=\dfrac{a^2}{b}\mathrm{X}^2$

よって，

$\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}=b\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X}\right)^2$

これは，$\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X},\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$ が $y=bx^2$ 上の点であることを示している。

よって，図より，

$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X},\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}$ より $b:a$

別解 1

A'は，$y=\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}x$ と $y=bx^2$ との交点より，

$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}},\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2}\right)$

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$ より，$\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\dfrac{a\mathrm{X}^2}{\mathrm{X}}=a\mathrm{X}$，$\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\dfrac{\mathrm{Y}^2}{\dfrac{\mathrm{Y}}{a}}=a\mathrm{Y}$ だから，

$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X},\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}$ より $b:a$

対応する点の接線の傾きは等しい

2 次関数の相似だから，対応する点の接線の傾きは等しくて当然だが，

一応確かめてみよう。

$y=ax^2$ 上の点 A における接線の傾きを m とすると， $y'=2ax$ より， $m=2a\mathrm{X}$

$y=bx^2$ 上の点 A' における接線の傾きを m' とすると， $y'=2bx$ より， $m'=2b\mathrm{X}'$

ここで， $\mathrm{X}'=\dfrac{a}{b}\mathrm{X}$ だから， $m'=2b\mathrm{X}'=2b\cdot\dfrac{a}{b}\mathrm{X}=2a\mathrm{X}$

よって， $m=m'$

別解 2

△OAB と△OA'B' において，対応する点の接線の傾きは等しいことを定理扱いすると，

$y=ax^2$ の点 A における接線の傾きは $2a\mathrm{X}$

$y=bx^2$ の点 A' における接線の傾きは $2b\mathrm{X}'$

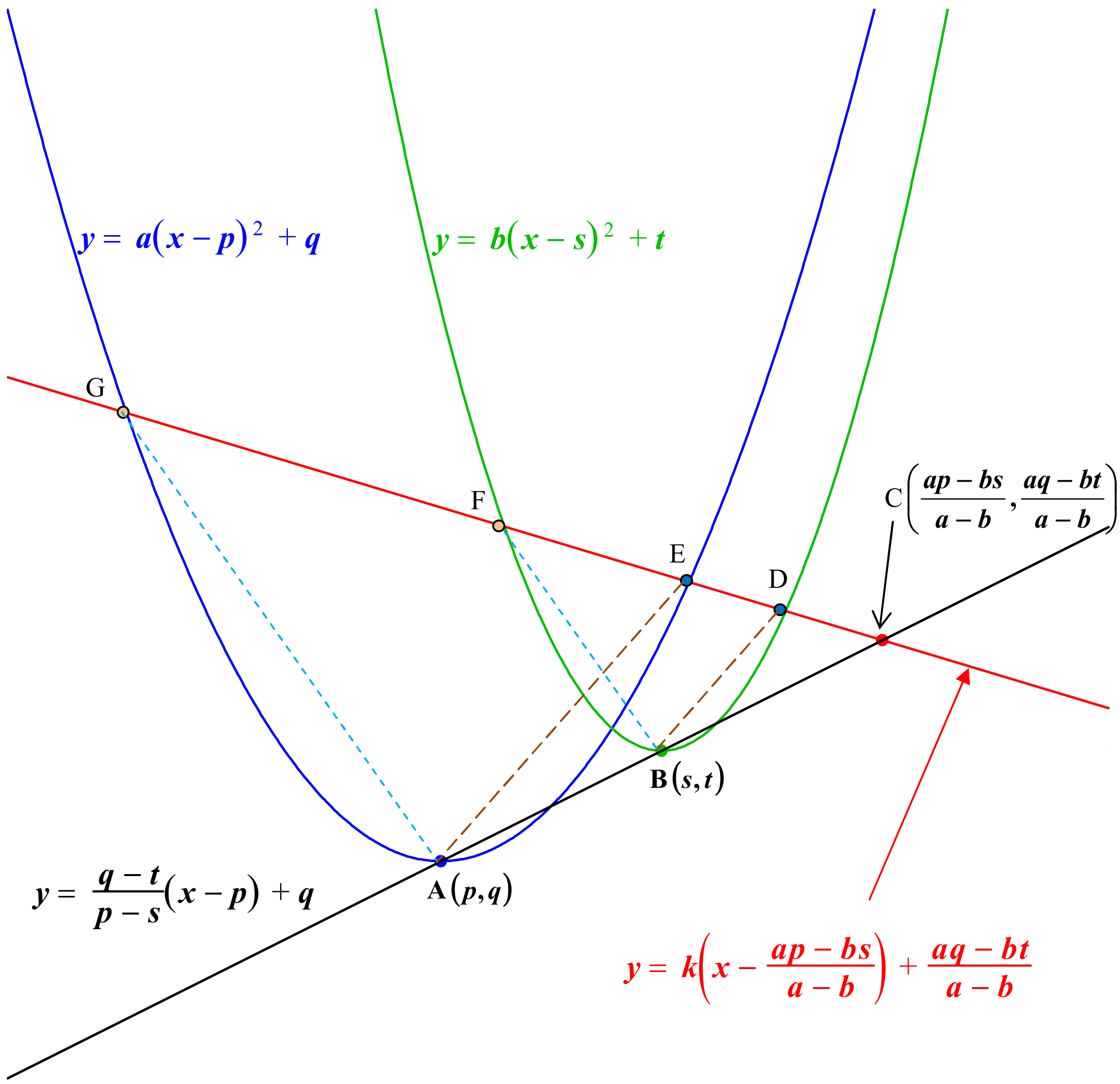
より， $2a\mathrm{X}=2b\mathrm{X}'$

$\therefore \dfrac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}=\dfrac{a}{b}\left(=\dfrac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}\right)$

このことから， $y=bx^2$ は， $y=ax^2$ を $\dfrac{a}{b}$ 倍に拡大したものであることがわかる。

よって， $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}=b:a$

$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の相似中心の求め方



相似中心を C，$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の頂点をそれぞれ A，B とすると，
対応する点の接線の傾きは等しいから，
相似中心 C は，頂点（接線の傾き 0）を結ぶ直線上にあり，
$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の相似比が $\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}$，すなわち $b:a$ であることより，
$AC:BC=b:a$，すなわち相似中心 C は，線分 AB を $b:a$ に外分する点である。
よって，$C\left(\dfrac{ap-bs}{a-b},\dfrac{aq-bt}{a-b}\right)$

相似中心を求めることでどんなことができるか？

ここで，相似中心 C を通る直線の傾きを k （k は実数）とすると，

直線の式は，$y = k\left(x - \dfrac{ap - bs}{a - b}\right) + \dfrac{aq - bt}{a - b}$

この直線と $y = a(x - p)^2 + q$，$y = b(x - s)^2 + t$ との交点をそれぞれ E，D とすると，

C は相似中心だから，△ACE∽△BCD

対応する点の接線の傾きは等しいから，

点 E における接線と点 D における接線の傾きは等しい。

同様に，点 F における接線と点 G における接線の傾きは等しい。

まとめ

2 次関数の相似中心を通る任意の直線と 2 次関数との交点から，

複数の 2 次関数において，接線の傾きが互いに等しい点を簡単に知ることができる。

物理の放物運動の問題を解くとき，2 次関数の相似性を利用する解き方もある。

参考：物理重要問題集Ⅰ・Ⅱを解いてみた 038 床や壁との斜めの衝突

補足

外分点の公式の導き方

AB を $m:n$ に外分する点を C とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}:\overrightarrow{\mathrm{BC}}=m:n$ より，

$n\overrightarrow{\mathrm{AC}}=m\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

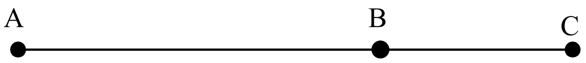
$n\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=m\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$n\overrightarrow{\mathrm{OC}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}=m\overrightarrow{\mathrm{OC}}-m\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$(m-n)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m-n}$



同様に，

AB を $m:n$ に内分する点を D とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}:\overrightarrow{\mathrm{DB}}=m:n$ より，

$n\overrightarrow{\mathrm{AD}}=m\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

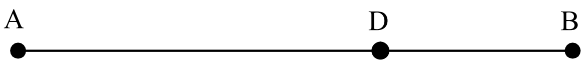
$n\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=m\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$

$n\overrightarrow{\mathrm{OD}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-m\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$(m+n)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m+n}$



円の接線の公式とその導き方

円の接線の公式

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通る接線の方程式は，

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

と表される。

導き方 1

中心を O とすると $\mathrm{O}(a,b)$，また，点 P でない接線上の点を $\mathrm{Q}(x,y)$ とする。

三平方の定理より，$\mathrm{OQ}^2-\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2$

よって，

$$(x-a)^2+(y-b)^2-\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right\}=r^2 \quad (\because \mathrm{OP}=r)$$

$$\therefore (x-a)^2-(x-x_0)^2+(y-b)^2-(y-y_0)^2=r^2$$

$$\therefore \{(x-a)-(x-x_0)\}+\{(x-a)-(x-x_0)\}+\{(y-b)-(y-y_0)\}\{(y-b)+(y-y_0)\}=r^2$$

$$\therefore (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-\{(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)\}=r^2$$

ここで，

$\mathrm{OP}\perp\mathrm{PQ}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}x_0-a\\y_0-b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

$$\therefore (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

この式は，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ の場合でも成り立つ。

よって，

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

導き方 2

接線の傾きを m とすると，接点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程式は，$y=m(x-x_0)+y_0$

次に，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の傾き m を微分により求める。

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を x について微分すると，

$$\frac{d(x-a)^2}{dx}+\frac{d(y-b)^2}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{d(x-a)^2}{dx}+\frac{d(y-b)^2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore 2(x-a)+2(y-b)\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$$

$$\therefore m=\frac{x_0-a}{y_0-b}$$

よって，接線の方程式は，$y=\dfrac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0)+y_0$ と表せる。

これで一応は完成ということになるが，
公式として認定されている形 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ へと変形してみる。

$y=\dfrac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0)+y_0$ より，$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$

$\therefore (x_0-a)\{(x-a)-(x_0-a)\}+(y_0-b)\{(y-b)-(y_0-b)\}=0$

$\therefore (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$

$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ より，

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

例題 1　直線／なす角

（ロ）

別解

$x-3y+2=0$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ を 45° 回転すると求める直線の法線ベクトルになる。

よって，求める直線の法線ベクトルは，

$$\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

これより，法線ベクトルの成分を最も簡単な整数値でとると，$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ であり，

それを法線ベクトルとする直線の方程式は，実数 a を用いて，$2x-y+a=0$ と表せる。

求める直線は点 $(0,1)$ を通るから，$a=1$

よって，$2x-y+1=0$

例題 5　放物線／線分長

（イ）

別解

交点の x 座標は $f(x)-g(x)=0$ を満たすから，$x^2-2ax+6=0$

交点の x 座標を α，β とおくと，交点は $y=g(x)$ 上の点であることより，

その座標は $(\alpha, a\alpha-1)$，$(\beta, a\beta-1)$

$\therefore (\alpha-\beta)^2+\{(a\alpha-1)-(a\beta-1)\}^2=\left(2\sqrt{30}\right)^2$

$\therefore (\alpha-\beta)^2+a(\alpha-\beta)^2=120$

$\therefore (\alpha-\beta)^2\left(a^2+1\right)=120$

$\therefore \left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}\left(a^2+1\right)=120$

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=6$

$\therefore \left(4a^2-24\right)\left(a^2+1\right)=120$

$\therefore \left(a^2-6\right)\left(a^2+1\right)=30$

$\therefore a^4-5a^2-36=0$

$\therefore \left(a^2-9\right)\left(a^2+4\right)=0$

$\therefore a=\pm 3$

例題 10　円／内接円，正領域・負領域

内接円の中心を $\mathrm{A}(a,b)$ とすると，

A は 3 直線 $y=0$， $3y-4x=0$， $3x+4y=12$ からの距離が等しい点であるから，

$$b=\frac{|3b-4a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3a+4b-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$b=\frac{|3b-4a|}{5}=\frac{|3a+4b-12|}{5}$$

$3y-4x=0$ において， $\mathrm{A}(a,b)$ は $y<\frac{4}{3}x$ の領域に含まれるから， $3b<4a$

$\therefore 4a-3b>0$

同様に，$3x+4y=12$ おいて，$\mathrm{A}(a,b)$ は $4y<-3x+12$ の領域に含まれるから，$4b<-3a+12$

$\therefore -3a-4b+12>0$

よって，

$$b=\frac{4a-3b}{5}=\frac{-3a-4b+12}{5}$$

$\therefore a=2b$， $a+3b=4$

$\therefore a=\frac{8}{5}$， $b=\frac{4}{5}$

よって，内接円の中心の座標は，$\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$

例題 11　円と放物線

別解

y 軸上の点を $\mathrm{A}(0,a)$ とし，点 A を中心とする円の半径を大きくしていき，
$y=x^2$ と点 $\mathrm{P}(t,t^2)$ で初めて接するとき，すなわち円が放物線と内接するとき，
その接点 P が求める共有点である。
また，このとき円と放物線は接点以外の共有点をもたないことから，
求めた接点が点 P であるかどうかがわかる。
以上のことをもとに，点 P の座標を求めることにする。

$y'=2x$ より，接線の傾き＝$2t$ だから，接線の方向ベクトルを $\vec{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}$ とおく。

$\vec{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}$ は円の接線の方向ベクトルでもあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}t\\t^2-a\end{pmatrix}$ と $\vec{\mathrm{T}}$ は垂直である。

$\therefore \vec{\mathrm{T}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\t^2-a\end{pmatrix}=t+2t^3-2at=t(2t^2-2a+1)=0$

次に，$t(2t^2-2a+1)=0$ の解を a の値で場合分けすることで接点の座標を求め，
それらの中から点 P であるものを求める。

$\frac{1}{2}<a$ のとき

$t=0$, $2t^2-2a+1=0$ より，$t=0$, $\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$

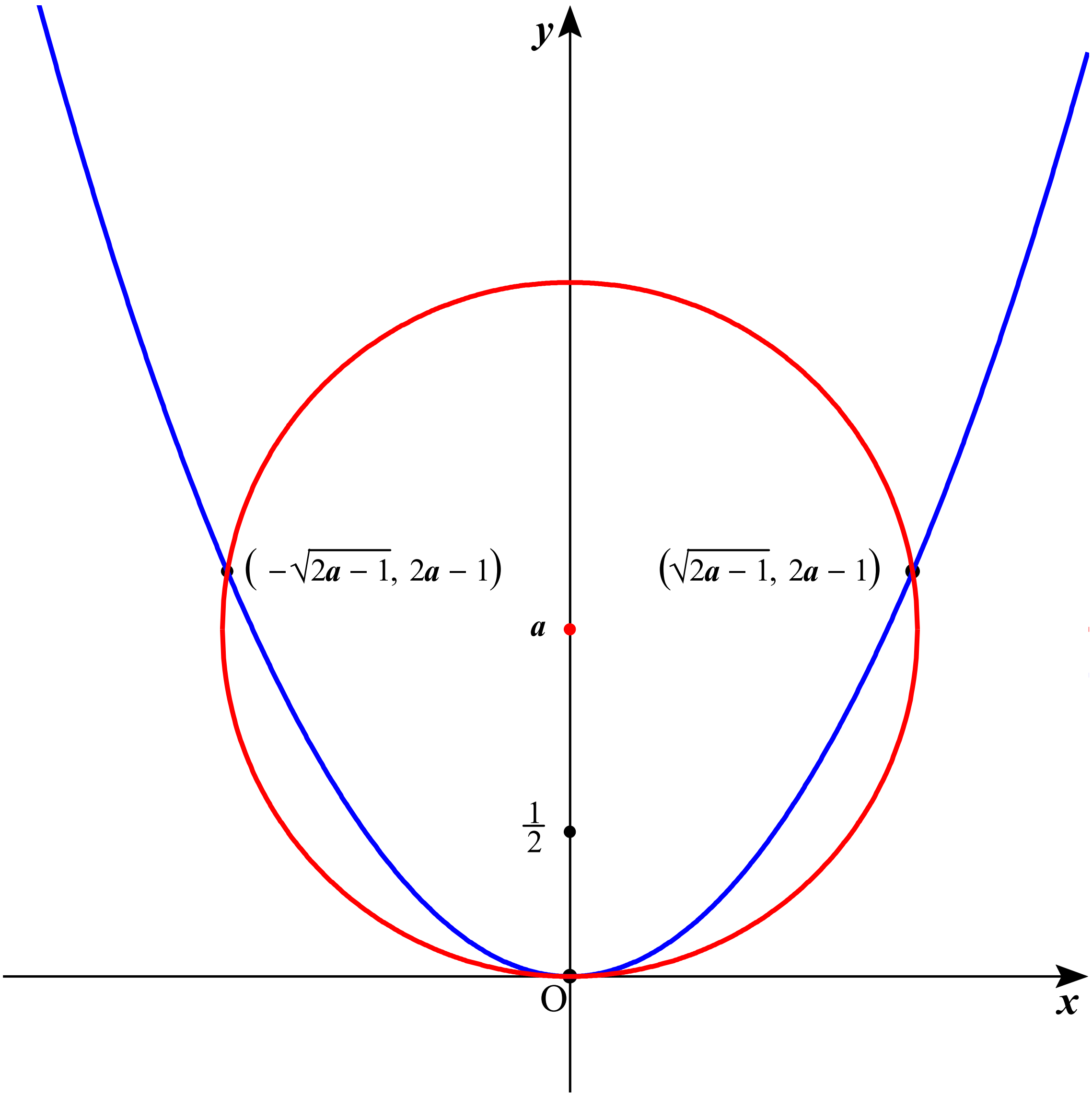
よって，接点の座標は，$(0,0)$，$\left(\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}},\frac{2a-1}{2}\right)$

接点が $(0,0)$ の場合

円の半径の 2 乗は中心 $\mathrm{A}(0,a)$ と接点 $(0,0)$ との距離より，a^2
よって，円の方程式は $x^2+(y-a)^2=a^2$
これと $y=x^2$ を連立させることにより，共有点を求めると，
$y+(y-a)^2=a^2$ より，$y(y-2a+1)=0$
$\therefore y=0$，$2a-1$

ここで，$\frac{1}{2}<a$ より，$2a-1>0$

よって，共有点の座標は，$(0,0)$，$(\pm\sqrt{2a-1},2a-1)$
点 P は，接点以外の共有点をもたないから，この接点は点 P ではない。
実際，図で表すと，次図のようになり，点 P でないことがわかる。



y
$\left(-\sqrt{2a-1},\ 2a-1\right)$
$\left(\sqrt{2a-1},\ 2a-1\right)$
a
$\frac{1}{2}$
O
x

接点が$\left(\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$の場合

円の半径の 2 乗は中心$A(0,a)$と接点$\left(\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$の距離より，$a-\frac{1}{4}$

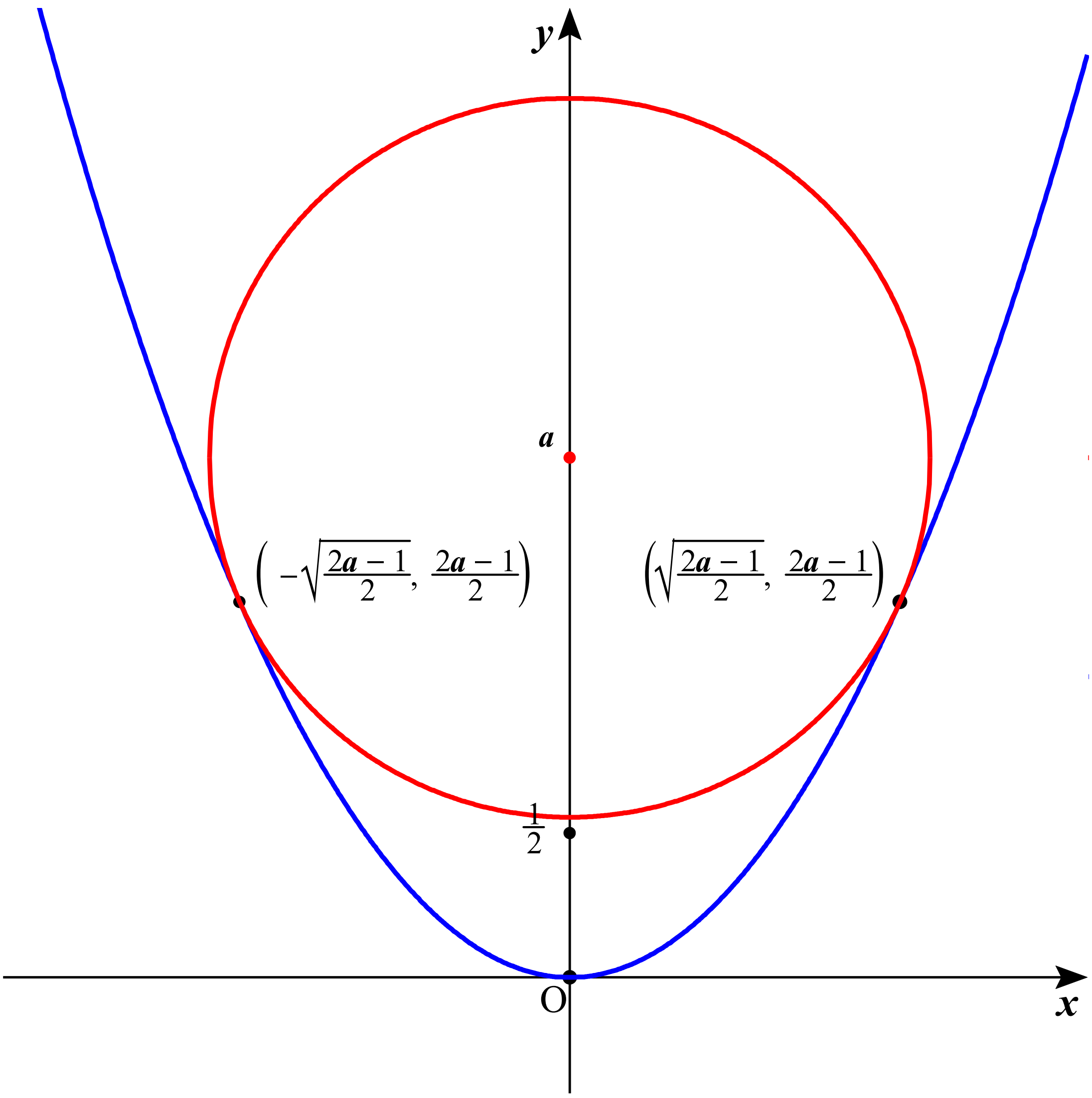
よって，円の方程式は$x^2+(y-a)^2=a-\frac{1}{4}$

これと$y=x^2$を連立させることにより，共有点を求めると，

$y+(y-a)^2=a-\frac{1}{4}$より，$\left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2=0$

よって，共有点の座標は$\left(\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$，すなわち接点以外の共有点がない。

したがって，これらの接点は点 P である。（下図）



$a=\frac{1}{2}$ のとき

$t^3=0$ より，$t=0$，よって，接点の座標は，$(0,0)$

円の半径の 2 乗は中心 $\mathrm{A}\left(0,\frac{1}{2}\right)$ と接点 $(0,0)$ との距離より，$\frac{1}{4}$

よって，円の方程式は $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

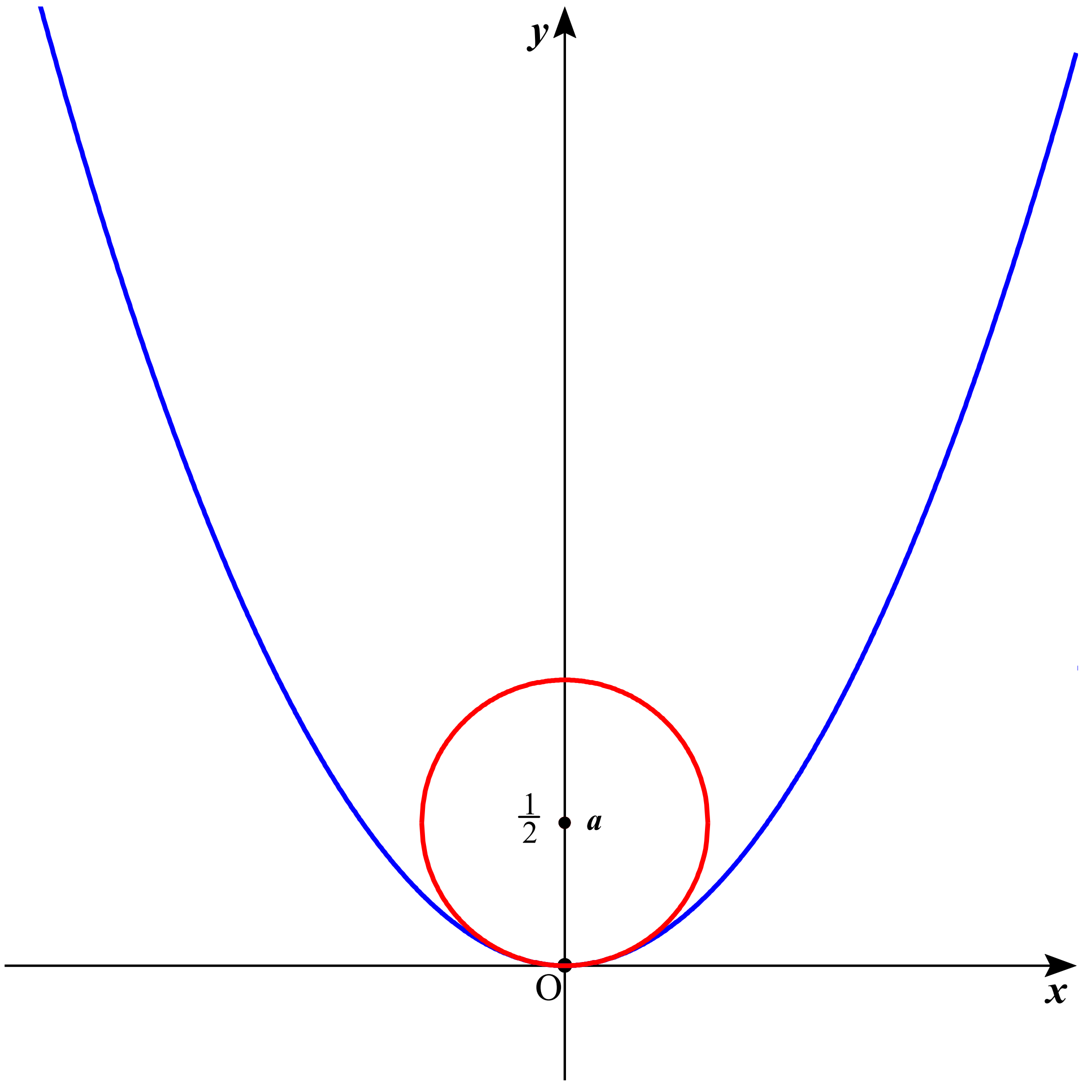
これと $y=x^2$ を連立させることにより，共有点を求めると，

$y+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ より，$y^2=0$

$\therefore y=0$

よって，共有点の座標は $(0,0)$，すなわち接点以外の共有点がない。

したがって，この接点は点 P である。（下図）

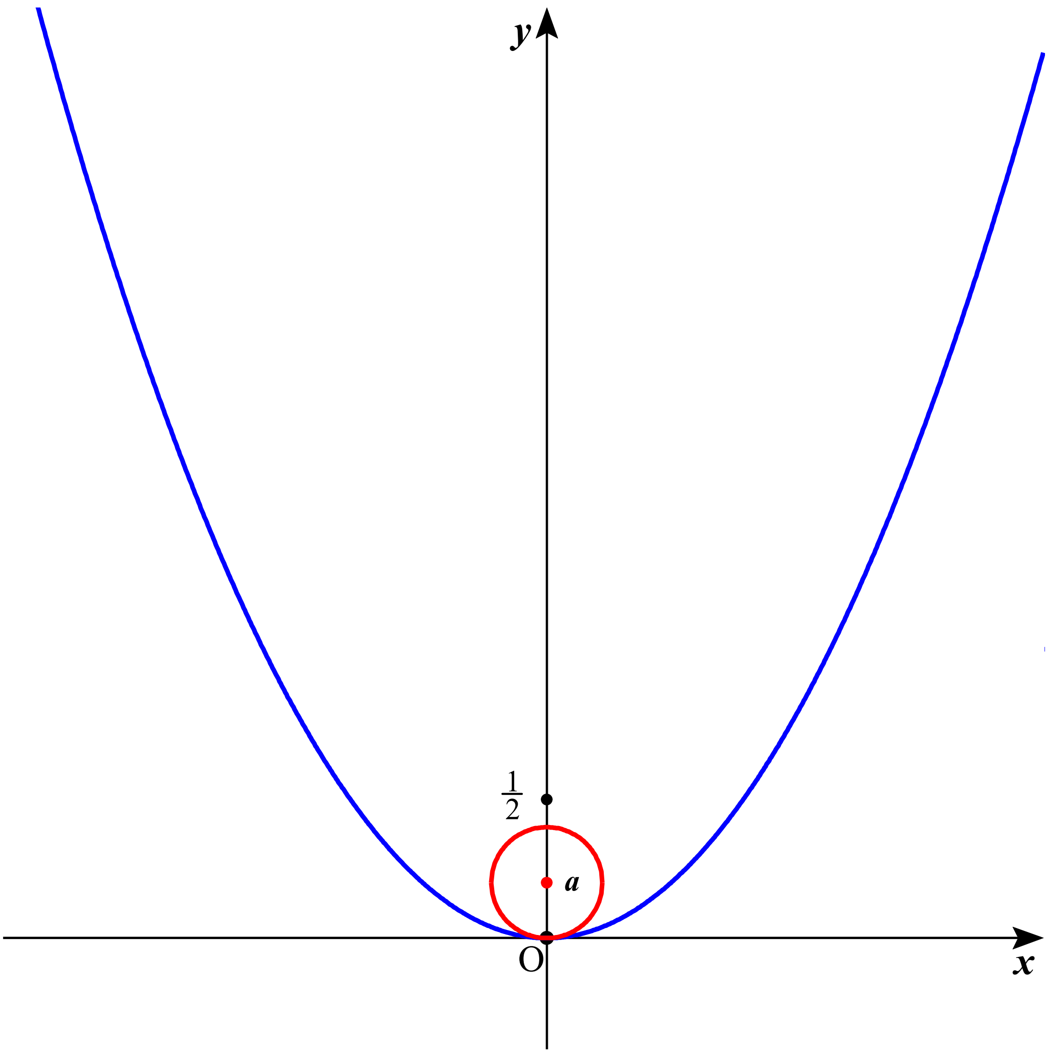


$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$2t^2-2a+1=0$ は実数解をもたないから，$t=0$
よって，接点の座標は $(0,0)$
また，このことから円の方程式は $x^2+(y-a)^2=a^2$
これと $y=x^2$ を連立させることにより，共有点を求めると，
$y+(y-a)^2=a^2$ より，$y(y-2a+1)=0$　$\therefore y=0$，$2a-1$
よって，共有点の座標は，$(0,0)$，$\left(\pm\sqrt{2a-1},2a-1\right)$ としたいところだが，

$0<a<\dfrac{1}{2}$ より，$-1<2a-1<0$

したがって，$\left(\pm\sqrt{2a-1},2a-1\right)$ は，共有点でない。
よって，共有点の座標は，$(0,0)$，すなわち接点以外の共有点がない。
したがって，この接点は点 P である。（下図）



以上より，
点 P，すなわち求める共有点の座標は，
$\frac{1}{2}<a$ のとき，$\left(\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}},\frac{2a-1}{2}\right)$
$0<a\leq\frac{1}{2}$ のとき，$(0,0)$

例題 14　軌跡／逆手流

交点の軌跡の任意の点を(X,Y)とすると，点(X,Y)は,

$mX-Y+4m+21=0$ かつ $X+mY+3m-14=0$，

すなわち$m(X+4)=Y-21$かつ$m(Y+3)=-X+14$を満たす。

（ⅰ） $X\neq -4$ かつ$Y\neq -3$のとき

$m=\dfrac{Y-21}{X+4}$ かつ $m=\dfrac{-X+14}{Y+3}$ より， $\dfrac{Y-21}{X+4}=\dfrac{-X+14}{Y+3}$

$\therefore (X+4)(X-14)+(Y-21)(Y+3)=0$

$\therefore (X-5)^2+(Y-9)^2=15^2$

ただし，$(X,Y)=(-4,21)$，$(-4,-3)$，$(14,-3)$を除く。

（ⅱ） $X=-4$，$Y\neq -3$のとき

$m(X+4)=Y-21$において，$X+4=0$ より $Y=21$

このとき，$m(Y+3)=-X+14$について，$m=\dfrac{3}{4}$

よって，$m=\dfrac{3}{4}$のとき，点$(-4,21)$を通る。

（ⅲ） $X\neq -4$，$Y=-3$のとき

$m(Y+3)=-X+14$において，$Y+3=0$ より $X=14$

このとき，$m(X+4)=Y-21$について，$m=-\dfrac{4}{3}$

よって，$m=-\dfrac{4}{3}$のとき，点$(14,-3)$を通る。

（ⅳ） $X=-4$，$Y=-3$のとき

$m(X+4)=Y-21$において，$X+4=0$ より $Y=21$

これは$Y=-3$であることに反する。

よって，点$(-4,-3)$は通らない。

X,Yをx,yに書き改めると，（ⅰ）～（ⅳ）より，

$(x-5)^2+(y-9)^2=15^2$，ただし，点$(-4,-3)$を除く。

例題 15　軌跡／変換による像

(1)

$(x, y) = k(X, Y)$ とおくと，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = k\sqrt{X^2+Y^2}\cdot\sqrt{X^2+Y^2} = k(X^2+Y^2)$

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = 2$ より $k(X^2+Y^2) = 2$ また $\mathrm{OQ} \neq 0$ より Q は原点を通らないから，$k = \dfrac{2}{X^2+Y^2}$

$\therefore x = \dfrac{2X}{X^2+Y^2}$，$y = \dfrac{2Y}{X^2+Y^2}$

別解

重要

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は単位ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}$ と表せることと，

条件より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \neq 0$ かつ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| \neq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じだから，

単位ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}$ であることを利用すると，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|} \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|} \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|} \quad \Leftarrow \ \times\frac{f(x)}{f(x)} \text{ のテクニック（適用範囲が数学全体に渡る重要テクニック）} \\
&= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\
&= \frac{2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$\therefore x = \dfrac{2X}{X^2+Y^2}$，$y = \dfrac{2Y}{X^2+Y^2}$

反転とは

半径 r の円の中心と異なる任意の点 P に対して, 線分 OP またはその P の側への延長上に, $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ となるような点 Q を対応させるとき，このような点の変換を反転といい, O を反転の中心という。

$$(X,Y)=\left(\frac{r^2x}{x^2+y^2},\frac{r^2y}{x^2+y^2}\right),\quad (x,y)=\left(\frac{r^2X}{X^2+Y^2},\frac{r^2Y}{X^2+Y^2}\right)$$

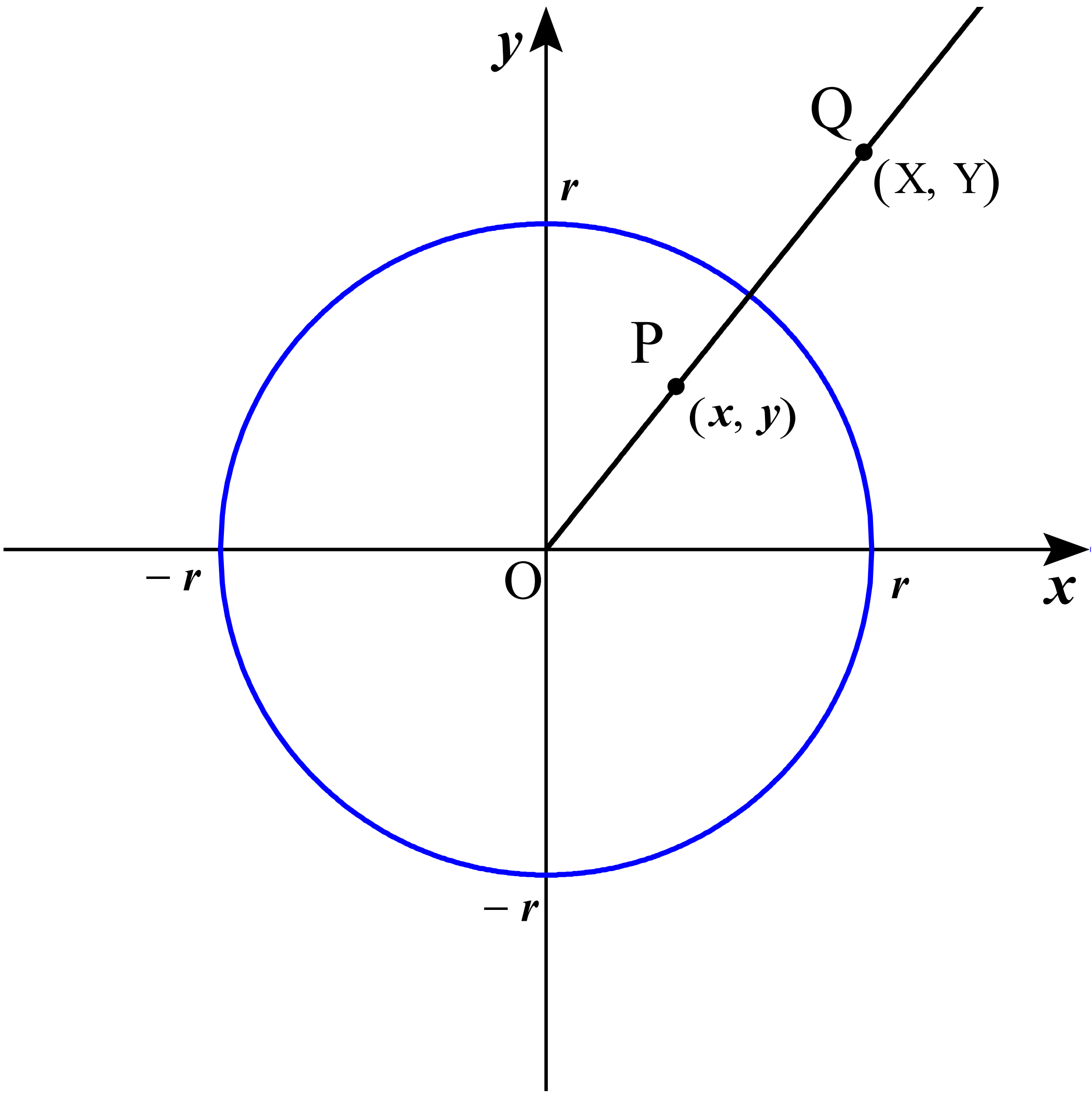
反転によって,

原点を通る直線 $y=mx$ → 同じ直線 $y=mx$

原点を通らない直線 → 原点を通る円

原点を通る円 → 原点を通らない直線

原点を通らない円 → 原点を通らない円



反転の例題

xy 平面上の y 軸に平行な直線 $x=1$ を l とする。

l 上の点 P に対して，次の 3 つの条件を満たす点 Q を対応させる。

(A)　原点を O とするとき，Q は直線 OP 上にある。

(B)　Q の x 座標は負である。

(C)　線分 AB の長さを $|\mathrm{AB}|$ で表すとき，$|\mathrm{OP}||\mathrm{OQ}|=1$ を満たす。

P が l 上を動くとき，Q の軌跡を求めよ。

解法 1：ベクトルで解く

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,y)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(X,Y)$ $(X<0)$ とすると，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1$ より，点 Q は原点を通らない。すなわち $(X,Y)\neq(0,0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}$$

$$=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left(-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\right)\qquad\left(\because\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$$

$$=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}$$

$$=-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$=-\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

より，

$$\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}=-\frac{1}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\text{，ただし}(X,Y)\neq(0,0)$$

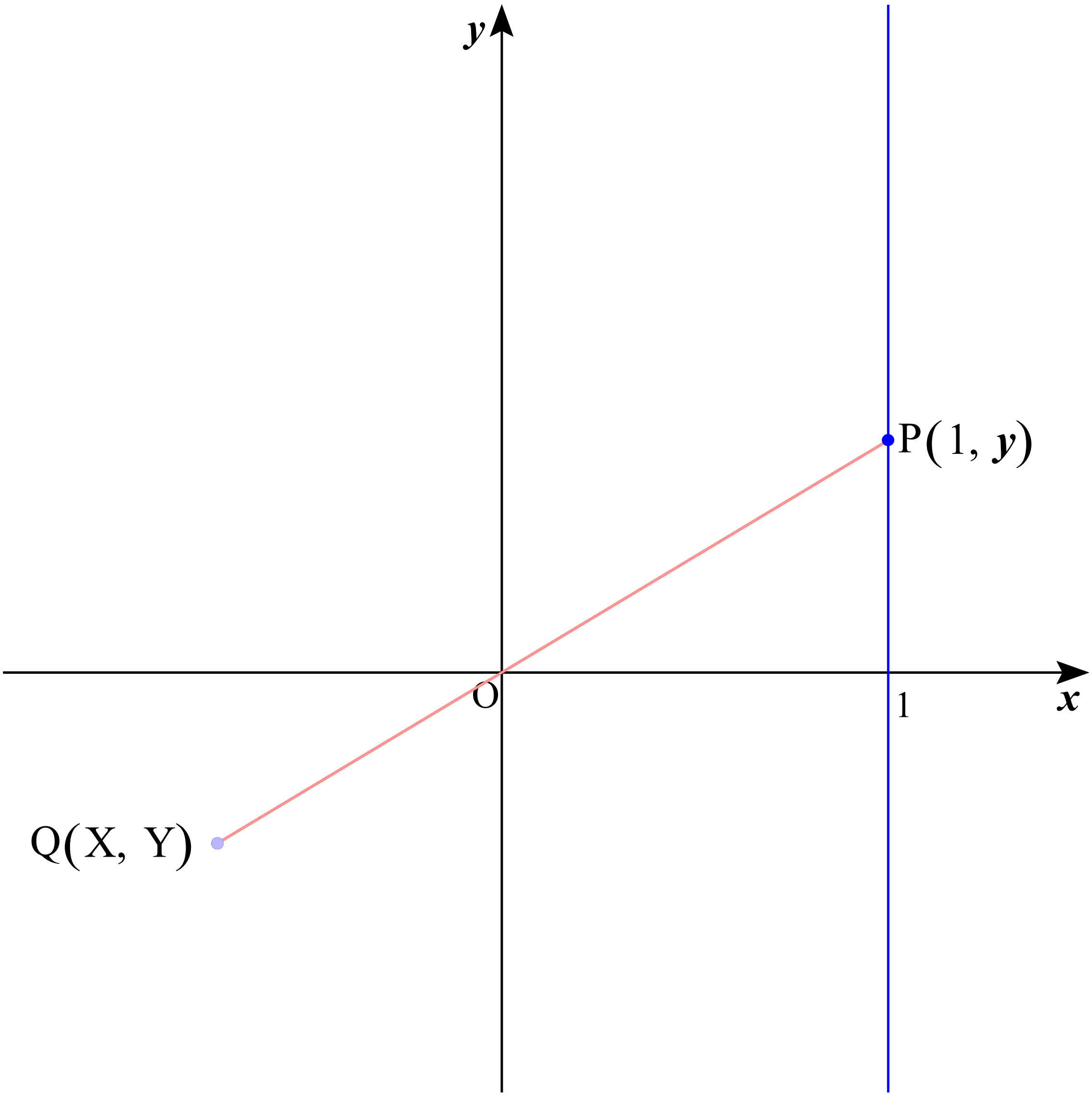
$$\therefore 1=-\frac{X}{X^2+Y^2}$$

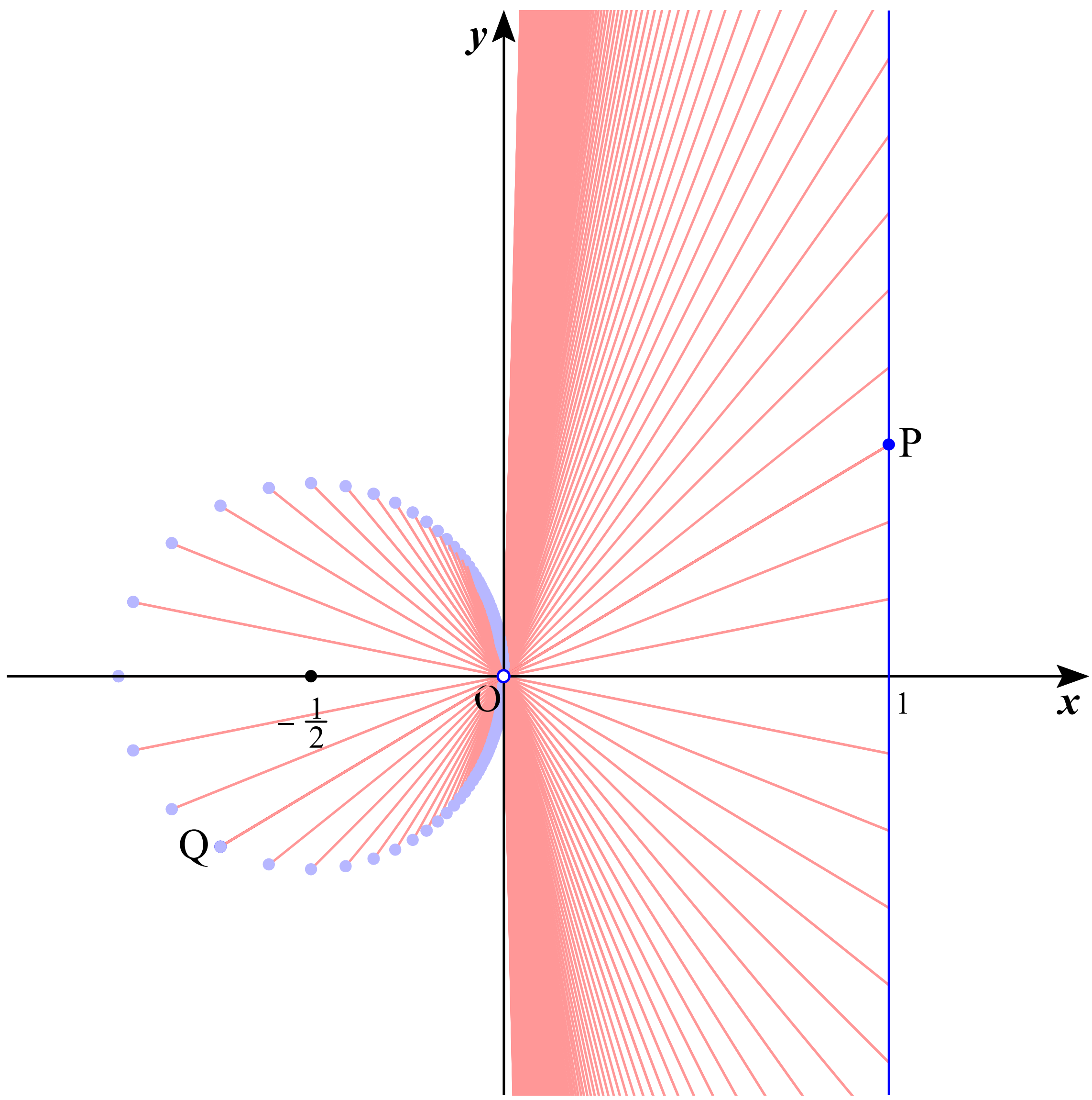
(X,Y) を (x,y) に書き改め，上式を整理することにより，

点 Q の軌跡は，

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\text{，ただし}(x,y)\neq(0,0)$$

と表せる。


y
P(1, y)
O
1
x
Q(X, Y)



y
P
O
$-\frac{1}{2}$
1
x
Q

解法 2：パラメータ（媒介変数）を使って解く

$\mathrm{P}(1,t)$，$\mathrm{Q}(X,Y)\,(X<0)$とおくと，

$\mathrm{OP}=\sqrt{1+t^2}$，　$\mathrm{OQ}=\sqrt{X^2+Y^2}$

条件より，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$だから，$\sqrt{1+t^2}\sqrt{X^2+Y^2}=1$

$\therefore\sqrt{(1+t^2)(X^2+Y^2)}=1$　・・・①

Qは直線OP，すなわち$y=tx$上の点だから，$Y=tX$

$\therefore t=\dfrac{Y}{X}\ (X<0)$　・・・②

①，②より，

$$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right\}(X^2+Y^2)}=1$$

$$\therefore\sqrt{\frac{X^2+Y^2}{X^2}(X^2+Y^2)}=1$$

$$\therefore\frac{X^2+Y^2}{|X|}=1$$

$X<0$より，$|X|=-X$

よって，$\dfrac{X^2+Y^2}{-X}=1$

(X,Y)を(x,y)に書き改め，上式を整理することにより，

点Qの軌跡は，

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$，ただし$(x,y)\neq(0,0)$

と表せる。

例題 16　通過範囲

（ロ）

(2)

(1)より，$t^2-2tx-4y=0$

t は実数だから，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=x^2+4y\geq 0$

よって，$y\geq -\dfrac{1}{4}x^2$ ・・・①

$t\geq 0$ より，$t^2-2tx-4y=0$ の解は $t\geq 0$ に少なくとも 1 つの解をもたなければならない。

これは，2 つの解がいずれも $t<0$ となることの否定と同値である。

2 つの解がいずれも $t<0$ （負）となるのは，

解を α,β とすると，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=2x<0$ かつ $\alpha\beta=-4y>0$

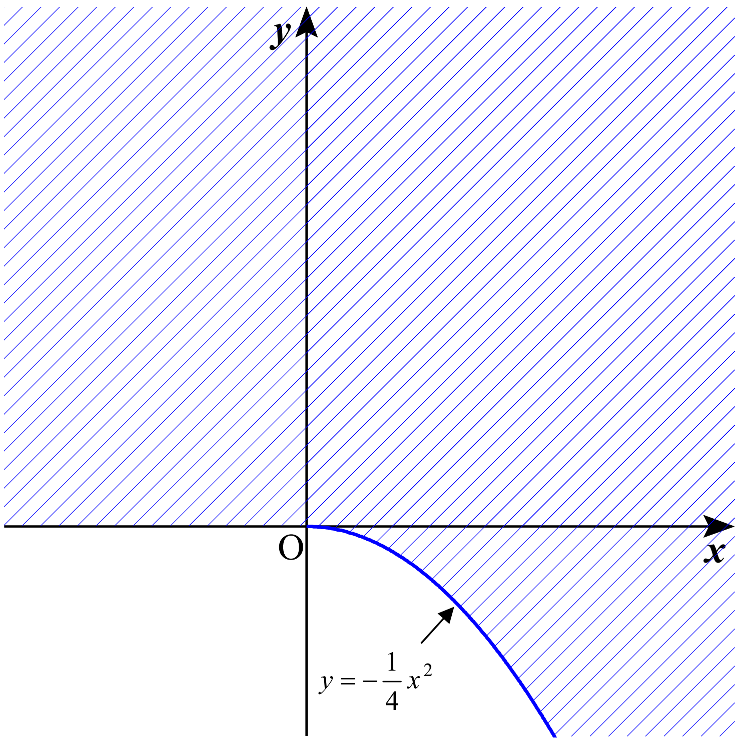
すなわち $x<0$ かつ $y<0$ の場合であり，

この否定は $x\geq 0$ ・・・②または $y\geq 0$ ・・・③

となる。

よって，満たすべき条件は，

①$\cap$(②$\cup$③)より，下図のようになる。



例題 19　2 変数関数への応用／図形量と見る

補足

$f(x)=\dfrac{y-b}{x-a}$ 型や $f(x)=\dfrac{r\sin x-b}{r\cos x-a}$ 型の関数は図形としてとらえることも重要である。

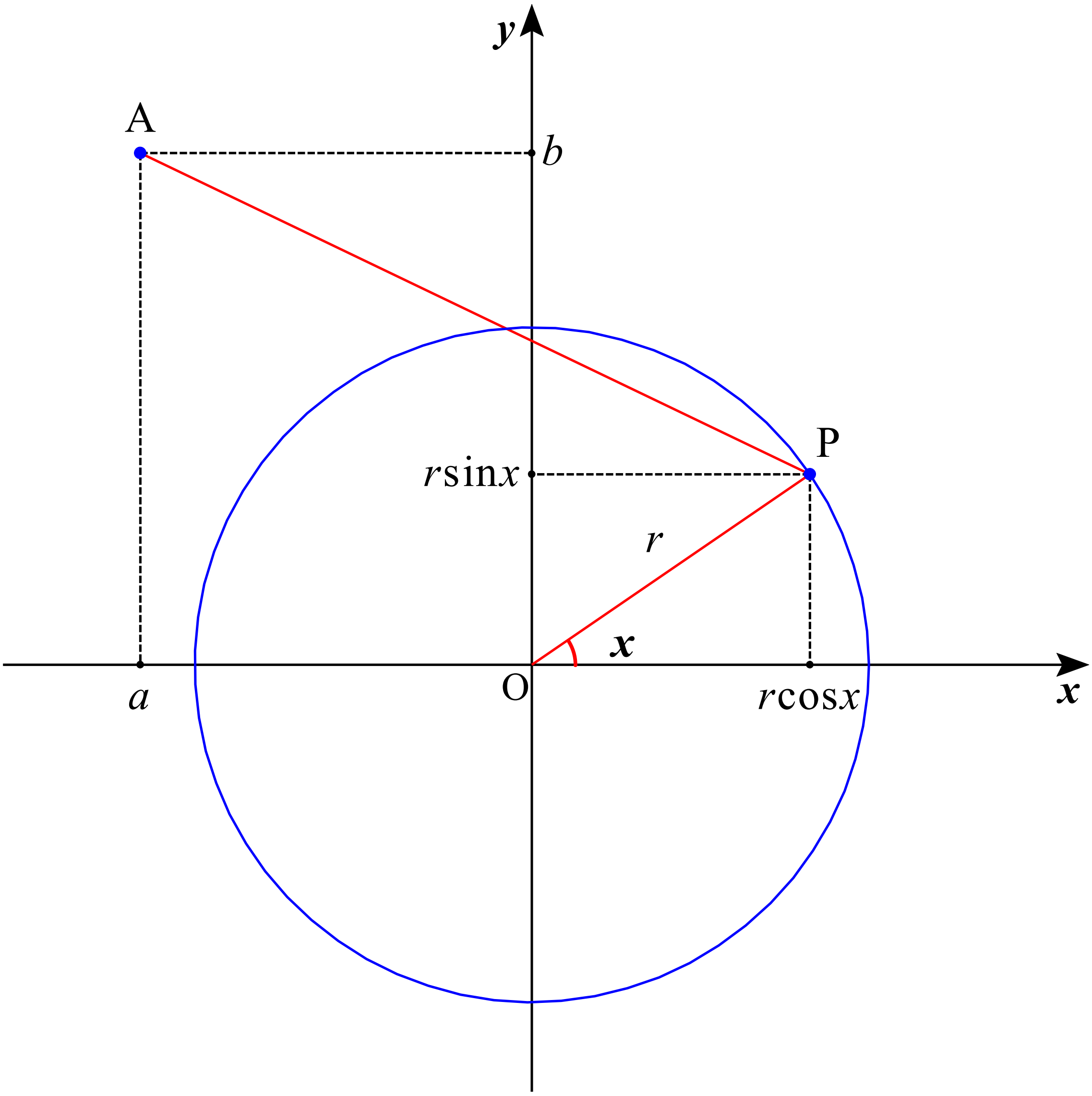
$f(x)=\dfrac{r\sin x-b}{r\cos x-a}$ 型の関数について

$\mathrm{A}(a,b)$，$\mathrm{P}(r\cos x, r\sin x)$ とおくと，

点 A は定点，点 P は半径 r の円周上の点を表す。

したがって，$f(x)$ は点 A から半径 r の円周上の点 P に引いた直線の傾きを表す。

この方法は，図形と方程式の問題や微分の問題の解説でよく別解として紹介される有名なテクニックなので覚えておくのが望ましい。



例題

関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{3+\cos x}$ の最大値と最小値を求めよ。（日本女子大　理）

解

$\mathrm{A}(-3,0)$，$\mathrm{P}(\cos x, \sin x)$ とおくと，関数 $f(x)$ は直線 AP の傾きを表す。

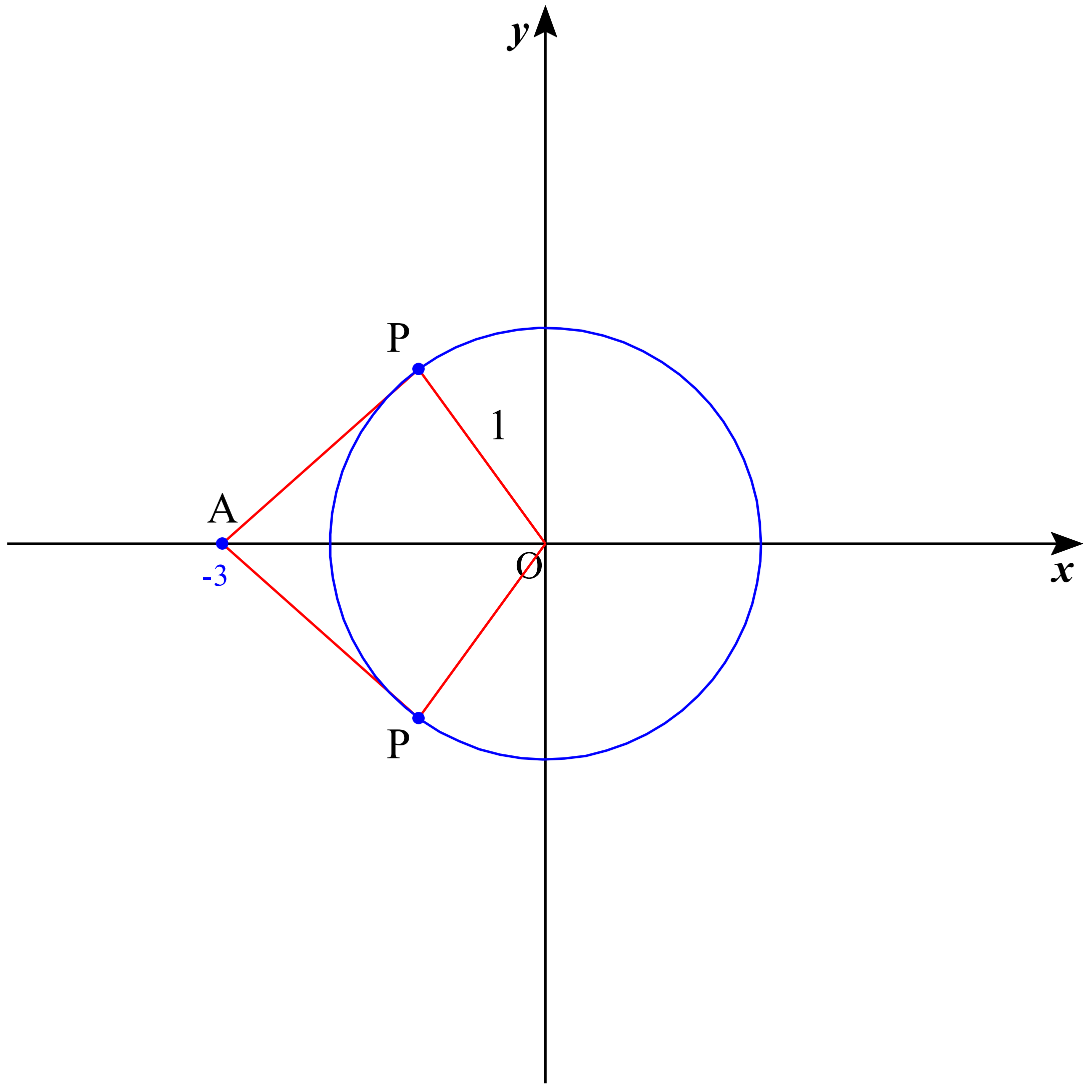
よって，下図より，$f(x)$ が最大または最小となるのは，

$\angle \mathrm{P}=90^\circ$ の直角三角形 AOP ができるときである。

$f(x)$ が最大のとき，直角三角形 AOP の点 P は第 3 象限にあり，

AP の傾き，すなわち $f(x)$ の最大値は，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OP}^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

同様にして，最小値は，$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$



例題 20　曲線の移動

点(p,q)を点 C と呼び，関数$y=f(x)$上の任意の点を点 A(x,y)，
点 A と点(p,q)に関して対称な点を点 B$(X.Y)$とすると，
関数$y=f(x)$のグラフが点 C に関して対称であるためには，
点 B が$Y=f(X)$を満たさなければならない。
逆に点 A と点 C に関して対称な点 B が$Y=f(X)$を満たすならば，
関数$y=f(x)$は点 C に関して対称である。
よって，
点 A と点 B が点 C に関して対称かつ$Y=f(X)$を満たす条件を求めればよい。
点 A と点 B が点 C に関して対称であることより，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
よって，

$$\begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} p-x \\ q-y \end{pmatrix} \quad \therefore X=-x+2p \quad \cdots ①、\ q=\frac{Y+y}{2} \quad \cdots ②$$

$Y=f(X)$，　$y=f(x)$と②より，

$$q=\frac{f(X)+f(x)}{2}$$

これと①より，

$$q=\frac{f(-x+2p)+f(x)}{2}$$

よって，

$$\frac{f(x)+f(-x+2p)}{2}=q$$