微分法とその応用

例題 1　極限・微分係数の定義

(2)

関数 $f(x)$ は任意の実数 x について微分可能なのは明らか。

$(1, f(1))$ と $(1+h, f(1+h))$ の傾き $= \dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \dfrac{f(1+f)-f(1)}{h}$ より,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$(1, f(1))$ と $(1-h, f(1-h))$ の傾き $= \dfrac{f(1-h)-f(1)}{(1-h)-1} = \dfrac{f(1-f)-f(1)}{-h}$ より,

$$f'(1) = -\lim_{h \to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \left\{-\lim_{h \to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right\} \\
&= f'(1) + f'(1) \\
&= 2f'(1)
\end{aligned}$$

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ より，　$2f'(1) = 20$

例題 2　極値を求める／次数下げ

$f(x)=-x^3+6x^2-x+1$ とおくと，$f'(x)=-3x^2+12x-1$

$\therefore f'(-1)=-16<0$，$f(3)=8>0$　・・・①

ここで，$f'(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=\dfrac{6-\sqrt{33}}{3}$

また，増減表は次のようになる。

x		α		β	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	$f(\alpha)$	$\uparrow$	$f(\beta)$	$\downarrow$

これと①より，$1<\alpha<3<\beta$

よって，最小値は $f(\alpha)$

$f'(\alpha)=0$ より，$-3\alpha^2+12\alpha-1=0$

$\therefore f(\alpha)=-\alpha^3+6\alpha^2-\alpha+1=\dfrac{1}{3}(\alpha-2)(-3\alpha^2+12\alpha-1)+\dfrac{22}{3}\alpha+\dfrac{1}{3}$

$\alpha=\dfrac{6-\sqrt{33}}{3}$ より，最小値は，$\dfrac{135-22\sqrt{33}}{9}$

例題 3　極値の条件から求める

(1)

別解

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ より，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$　・・・①

$f'(x)=0$ の解が $x=1,2$ であることと $f'(x)$ の x^2 の係数が $3a$ であることより，

$f'(x)=3a(x-1)(x-2)$

$f'(x)=3ax^2-9ax+6a$　・・・②

①と②の係数比較より，

$b=-\dfrac{9}{2}a$，$c=6a$

$\therefore f(x)=ax^3-\dfrac{9}{2}ax^2+6ax=\dfrac{a}{2}\left(2x^3-9x^2+12x\right)$

$\therefore f(1)+f(2)=\dfrac{a}{2}\cdot 5+\dfrac{a}{2}\cdot 4=\dfrac{9}{2}a$

これと $f(1)+f(2)=9$ より，$\dfrac{9}{2}a=9$　$\therefore a=2$

よって，$b=-9$，$c=12$

例題 9　多変数関数の最大・最小

別解

2 変数の基本対称式を使って立式し解いてみた

処理や計算が大変だということがわかりました。

多変数関数では変数の多い基本対称式で始める方がいいのかもしれません。

縦を x，横を y とすると，高さは $7-(x+y)$

ここで，$x+y=u$ とおくと，u が満たすべき必要条件は，$0<u<7$　・・・①

直方体の表面積が 30 であることより，

$2[xy+x\{7-(x+y)\}+y\{7-(x+y)\}]=30$

$\therefore xy+x\{7-(x+y)\}+y\{7-(x+y)\}=15$

$\therefore -(x+y)^2+7(x+y)+xy=15$

$\therefore xy=u^2-7u+15$

$xy=v$ とおくと，$v=u^2-7u+15$　・・・②

②の右辺の判別式 $D=49-60=-11<0$ より，すべての実数 u において $v>0$ が成り立つ。

また，x,y は t についての 2 次方程式 $t^2-(x+y)t+xy=0$

すなわち $t^2-ut+v=0$ の 2 実数解だから，判別式 $D=u^2-4v\geq 0$

$\therefore v\leq\dfrac{u^2}{4}$　・・・③

あるいは，$x>0,y>0$ より，$\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$　$\therefore u\geq 2\sqrt{v}$　$\therefore v\leq\dfrac{u^2}{4}$　・・・③

②，③より，$u^2-7u+15\leq\dfrac{u^2}{4}$

$\therefore 3u^2-28u+60\leq 0$　$\therefore \dfrac{10}{3}\leq u\leq 6$　・・・④

①かつ④より，$\dfrac{10}{3}\leq u\leq 6$

よって，u が満たすべき条件は，$\dfrac{10}{3}\leq u\leq 6$

$v>0$ はすべての実数 u について成り立つが，$v\leq\dfrac{u^2}{4}$ も満たさなければならず，

$v\leq\dfrac{u^2}{4}$ であるためには，$\dfrac{10}{3}\leq u\leq 6$ でなければならない。

よって，u が満たすべき条件は，$\dfrac{10}{3}\leq u\leq 6$ となる。

したがって，直方体の体積の式は，

$V = xy\{7-(x+y)\}$ より，$V = v(7-u)$ $\left(\frac{10}{3} \leq u \leq 6\right)$

これと②より，$V = (u^2 - 7u + 15)(7-u)$ $\left(\frac{10}{3} \leq u \leq 6\right)$

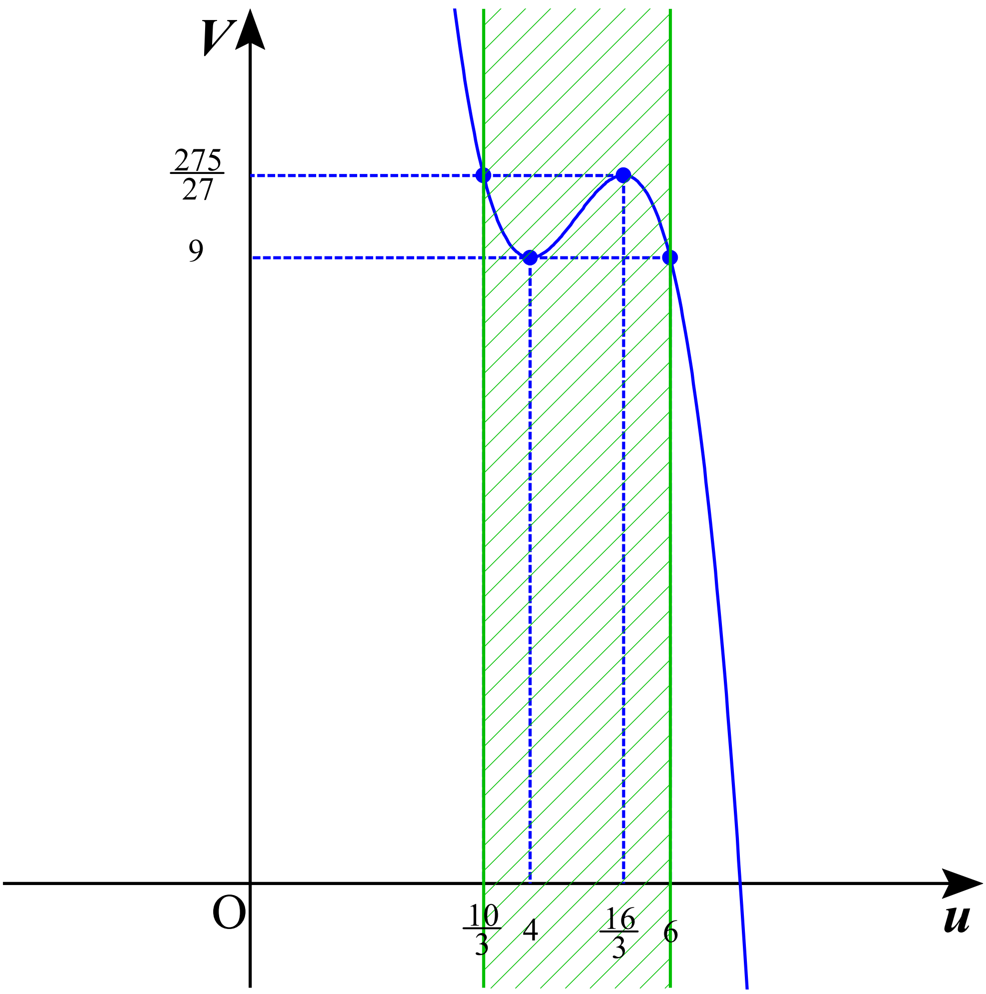
$\therefore V = -u^3 + 14u^2 - 64u + 105$ $\left(\frac{10}{3} \leq u \leq 6\right)$

$V' = -3u^2 + 28u - 64$

$V' = 0$ のとき，$u = 4, \frac{16}{3}$

よって，増減表は次のようになる。

u	$\frac{10}{3}$		4		$\frac{16}{3}$		6
V'		$-$	0	$+$	0	$-$	
V	$\frac{275}{27}$	$\downarrow$	9	$\uparrow$	$\frac{275}{27}$	$\downarrow$	9



よって，V の最小値は 9，最大値は $\dfrac{275}{27}$

$V=9$ のとき，$u=4$ または 6

$u=4$ のとき

　$u=x+y=4$，②より，$v=xy=3$

　よって，x,y は，$t^2-4t+3=0$ の解である。　$\therefore (x,y)=(1,3),(3,1)$

　また，このとき，高さ $=7-(x+y)=3$

$u=6$ のとき

　$u=x+y=6$，①より，$v=xy=9$

　よって，x,y は，$t^2-6t+9=0$ の解である。　$\therefore (x,y)=(3,3)$

　また，このとき，高さ $=7-(x+y)=1$

以上より，縦，横，高さは，その値の小さいものから並べると，

1，3，3

例題 10　接線の本数

補足：共有点を 1 つしかもたない 3 次関数の接線の式と接点

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ の点 $(t, f(t))$ における接線の式

$g(x)=(3at^2+2bt+c)x-2at^3-bt^2+d$ より，

$f(x)-g(x)=ax^3+bx^2-(3at^2+2bt)x+2at^3+bt^2$

$f(x)-g(x)=0$ が 3 重解 $x=t$ をもつとき，

$f(x)-g(x)=a(x-t)^3=ax^3-3atx^2+3at^2x-at^3$

であるから，

$ax^3+bx^2-(3at^2+2bt)x+2at^3+bt^2 \equiv ax^3-3atx^2+3at^2x-at^3$

$\therefore b=-3at$，$-bt=3at^2$

$t=0$ のとき

$b=0$ より，$f(x)=ax^3+cx+d\ (a\neq 0)$ 上の点 $(0, d)$ における接線

$g(x)=cx+d$　・・・①

$t\neq 0$ のとき

$t=-\dfrac{b}{3a}$ より，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $\left(-\dfrac{b}{3a}, \dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d\right)$ における接線

$g(x)=\dfrac{-b^2+3ac}{3a}x-\dfrac{b^3-27a^2d}{27a^2}$　・・・②

①は②において，$b=0$ とした特殊な場合だから，②に含まれる。

よって，

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ の接線 $g(x)$ が $y=f(x)$ と共有点を 1 つしか持たないとき，

その接点と接線の式はそれぞれ

$\left(-\dfrac{b}{3a}, \dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d\right)$，$g(x)=\dfrac{-b^2+3ac}{3a}x-\dfrac{b^3-27a^2d}{27a^2}$

一方，

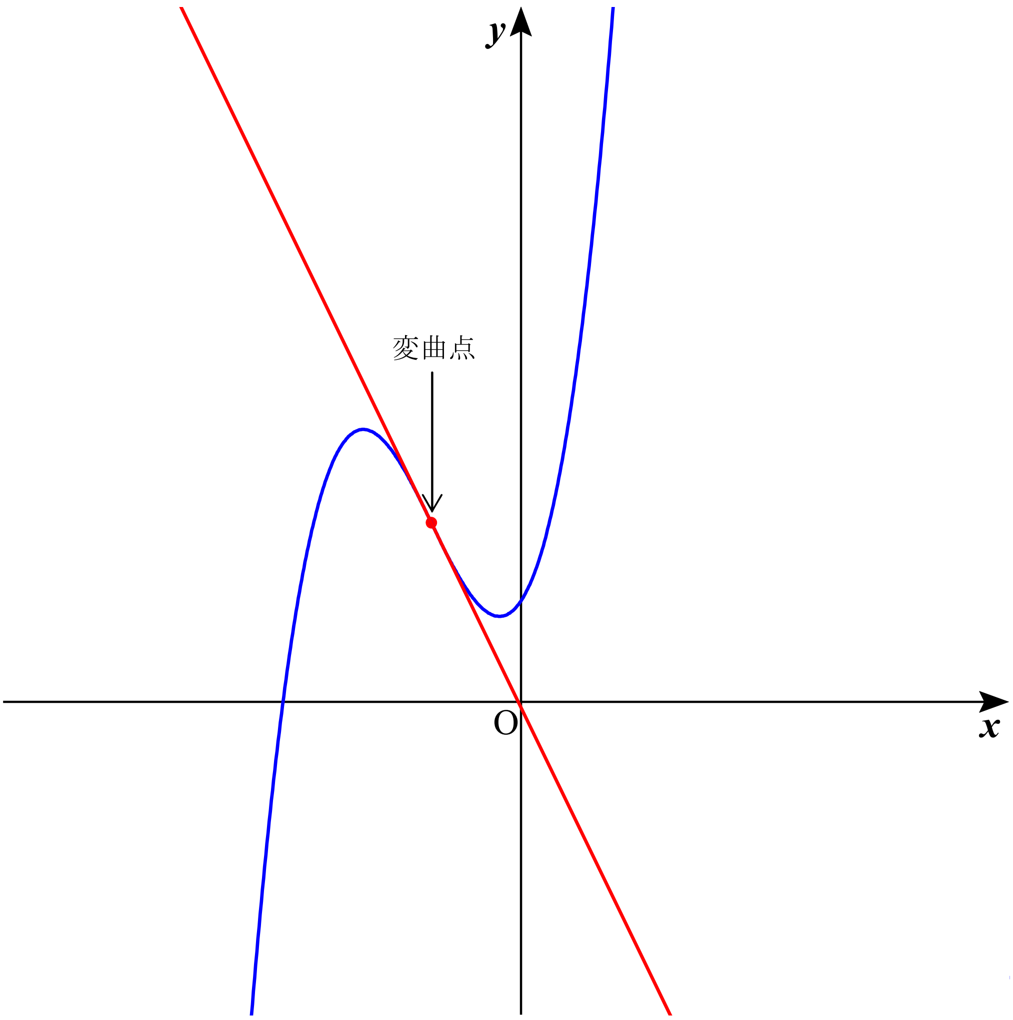
$y=f(x)$ の変曲点の x 座標は，$f''(x)=0$ を満たすから，

$f''(x)=6ax+2b$ より，$x=-\dfrac{b}{3a}$

よって，変曲点は，$\left(-\dfrac{b}{3a}, \dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d\right)$

したがって，

3 次関数 $y=f(x)$ の変曲点における接線は $y=f(x)$ と変曲点のみにおいて共有点をもつ。


y
変曲点
O
x

例題 12　3 次関数のグラフの形

(1)

別解 1：必要条件を活かす

$f(x)=ax^3+bx^2-18x+11$ とおくと，

$f'(x)=3ax^2+2bx-18$

$x=-3$ のとき極大値をとることから，$f'(-3)=0$

$\therefore 9a-2b=6$　・・・①

$f(-1+t)+f(-1-t)$ の値は t の値にかかわらず一定だから，

$t=0$ と $t=1$ の場合において，

$f(-1+0)+f(-1-0)=f(-1+1)+f(-1-1)$ が成り立つ。

$\therefore f(-1)+f(-1)=f(0)+f(-2)$

$\therefore 2f(-1)=f(0)+f(-2)$

$\therefore -2a+2b+58=11-8a+4b+47$

よって，$f(-1+t)+f(-1-t)$ であるための必要条件は，

$3a=b$　・・・②

①，②より，$a=2$，$b=6$

つぎに，

$a=2$，$b=6$ が与えられた条件が成り立つための十分条件であるかについて調べる。

$a=2$，$b=6$ のとき，

$f(x)=2x^3+6x^2-18x+11$

$f'(x)=6x^2+12x-18=6(x+3)(x-1)$

より，増減表は次のようになる。

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	65	↓	1	↑

よって，$x=-3$ のとき極大値，$x=1$ のとき極小値をとる。

また，

$$f(-1+t)+f(-1-t)=2(-1+t)^3+6(-1+t)^2-18(-1+t)+11+2(-1-t)^3+6(-1-t)^2-18(-1-t)+11$$
$$=66$$

よって，

$f(-1+t)+f(-1-t)$ は t の値にかかわらず一定である。

以上より，

$a=2$，$b=6$ が与えられた条件が成り立つための必要十分条件である。

ゆえに，

$f(x)=2x^3+6x^2-18x+11$ であり，$x=1$ のとき極小値をとる。

別解 2

$y=g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が原点に関して対称であるとすると，

点 $(x,g(x))$ と点 $(-x,g(-x))$ の中点は原点であるから， $\dfrac{g(x)+g(-x)}{2}=0$

すなわち $g(x)+g(-x)=0$

$\therefore g(x)=-g(-x)$

$\therefore ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-bx^2+cx-d$

これが任意の実数 x について成り立つから， $b=d=0$

よって，原点に関して対称な 3 次関数は $y=g(x)=ax^3+cx$ と表せる。

これを x 方向に p， y 方向に q 平行移動すると，

原点に対応する点は，点 (p,q) に移されるから，

点 (p,q) に関して対称な 3 次関数が得られる。

これを $y=h(x)$ とすると，

$h(x)=g(x-p)+q$ より， $y=h(x)=a(x-p)^3+c(x-p)+q$

また， $y=h(x)$ は点 (p,q) に関して対称であるから，

$(p-x,h(p-x))$ と $(p+x,h(p+x))$ の中点は (p,q) である。

よって， $\dfrac{h(p+x)+h(p-x)}{2}=q$ 　 $\therefore h(p+x)+h(p-x)=2q$

以上より，

点 (p,q) に関して対称な 3 次関数を $y=h(x)$ とすると，

実数 a （$a\neq 0$）と c を用いて， $y=h(x)=a(x-p)^3+c(x-p)+q$ と表せる。

また， $h(p+x)+h(p-x)=2q$

問題の場合，

$f(-1+t)+f(-1-t)$ が t の値にかかわらず一定であることから，

$y=f(x)$ は点 $(-1,f(-1))$ に関して点対称である。

よって， $f(x)\equiv h(x)$ とすると， $p=-1$

$\therefore h(x)=a(x+1)^3+c(x+1)+q$

$\therefore h(x)=ax^3+3ax^2+(3a+c)x+a+c+q$

$\therefore h'(x)=3ax^2+6ax+3a+c$

$h'(-3)=0$ より， $12a+c=0$

$\therefore h'(x)=3ax^2+6ax+3a-12a=3a(x^2+2x-3)=3a(x+3)(x-1)$

よって， $a>0$ かつ $x=1$ のとき関数 $h(x)(\equiv f(x))$ は極小値をもつ。

また，$h(x)=ax^3+3ax^2+(3a+c)x+a+c+q=ax^3+3ax^2-9ax-11a+q$，$h(x)\equiv f(x)$ より，

$a=2,q=33$

$\therefore f(x)=2x^3+6x^2-18x+11$

補足

点(p, q)に関して対称な 3 次関数を$y = h(x)$とすると，

実数a（$a \neq 0$）とcを用いて，

$y = h(x) = a(x-p)^3 + c(x-p) + q$と表せる。

よって，$h''(x) = 6a(x-p)$より，$h''(p) = 0$

これと$y = h(x) = a(x-p)^3 + c(x-p) + q$（$a \neq 0$）が任意の 3 次関数を表すことから，

3 次関数$y = f(x)$の点対称点のx座標をαとすると，$f''(\alpha) = 0$となる。

例題 14　接線・法線

補足：点 Q の $\boldsymbol{x}$ 座標の別の求め方

$\mathrm{P}\left(t, t^3+at\right)$ とすると，

直線 l ： $y=\left(3t^2+a\right)x-2t^3$

点 Q の x 座標を α $(\alpha \neq t)$ とすると，点 Q は直線 l と曲線 C の交点だから，

$x=\alpha$ は方程式 $x^3+ax=\left(3t^2+a\right)x-2t^3$，すなわち $x^3-3t^2x+2t^3=0$ の解の 1 つである。

他の解は点 P の x 座標 t であり，点 P が接点であることから， $x=t$ は重解である。

よって，解と係数の関係より， $t+t+\alpha=0$， $t^2+t\alpha+t\alpha=-3t^2$， $t^2\alpha=-2t^3$　 $\therefore \alpha=-2t$

$\therefore \mathrm{Q}\left(-2t, -8t^3-2at\right)$

したがって，点 Q を通る接線 m の傾きは， $3(-2t)^2+a=12t^2+a$

l と m が直交することから，

$\left(3t^2+a\right)\left(12t^2+a\right)=-1$　 $\therefore 36t^4+15at^2+a^2+1=0$

以下略

例題 16　複接線

「接するとき重解」の別証明

$f(x)$ と $g(x)$ が $x=a$ で接するならば,

$f(a)=g(a)$　・・・①

かつ

$f'(a)=g'(a)$　・・・②

①より,

$f(x)-g(x)=(x-a)p(x)$　・・・③

$\therefore f'(x)-g'(x)=p(x)+(x-a)p'(x)$

これと②より, $f'(a)-g'(a)=0$ だから, $p(a)=0$

$\therefore p(x)=(x-a)q(x)$　・・・④

③, ④より,

$f(x)-g(x)=(x-a)^2q(x)$