積分の数式的側面

例題 9　積分方程式／区間変動型

$\int_0^x (t-x)f(t)dt + f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x + 2$ を変形すると，

$\int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt + f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x + 2$

$\int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt + f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x + 2$ が成り立つための必要条件は，

$\left(\int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt + f(x)\right)' = \left(-\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x + 2\right)'$ が成り立つことである。

$\therefore xf(x) - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$

$\therefore -\int_0^x f(t)dt + f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$

さらに，$-\int_0^x f(t)dt + f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ が成り立つための必要条件は，

$\left(-\int_0^x f(t)dt + f'(x)\right)' = \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2\right)'$ が成り立つことである。

$\therefore -f(x) + f''(x) = -x^2 - 2x$

$\therefore f(x) = x^2 + 2x + f''(x)$

ここで，$\int_0^x (t-x)f(t)dt + f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x + 2$ に $x=0$ を代入すると，$f(0)=2$

よって，$f(x) = x^2 + 2x + f''(x)$ が積分方程式の解であるための十分条件は，
$f(0) = f''(0)$ より，$f''(0) = 2$ であることである。

よって，$f(x) = x^2 + 2x + 2$