積分の面積への応用

例題 2　放物線と 2 接線

別解

$y=f(x)=x^2+ax+b^2$，$\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$（$\alpha$，$\beta$ は $\alpha \neq \beta$ かつ 0 でない実数），

点 P における接線を $y=mx$，点 Q における接線を $y=nx$ とすると，

$f(x)-mx=(x-\alpha)^2$　・・・①

$f(x)-nx=(x-\beta)^2$　・・・②

①－②より，

$(-m+n)x=-2(\alpha-\beta)x+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

上の等式は任意の x について成り立つから，両辺は恒等式の関係にある。

よって，定数項は $0=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

これと $\alpha \neq \beta$ より $\alpha+\beta=0$　$\therefore \alpha=-\beta$　・・・③

また，$\alpha \neq \beta$ かつ③より，$\alpha<0<\beta$　・・・④

ここで，

$$S_1=\int_\alpha^0 (f(x)-mx)dx=\int_\alpha^0 (x-\alpha)^2 dx=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^0=-\frac{\alpha^3}{3}$$

$$S_2=\int_0^\beta (f(x)-nx)dx=\int_0^\beta (x-\beta)^2 dx=\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_0^\beta=\frac{\beta^3}{3}$$

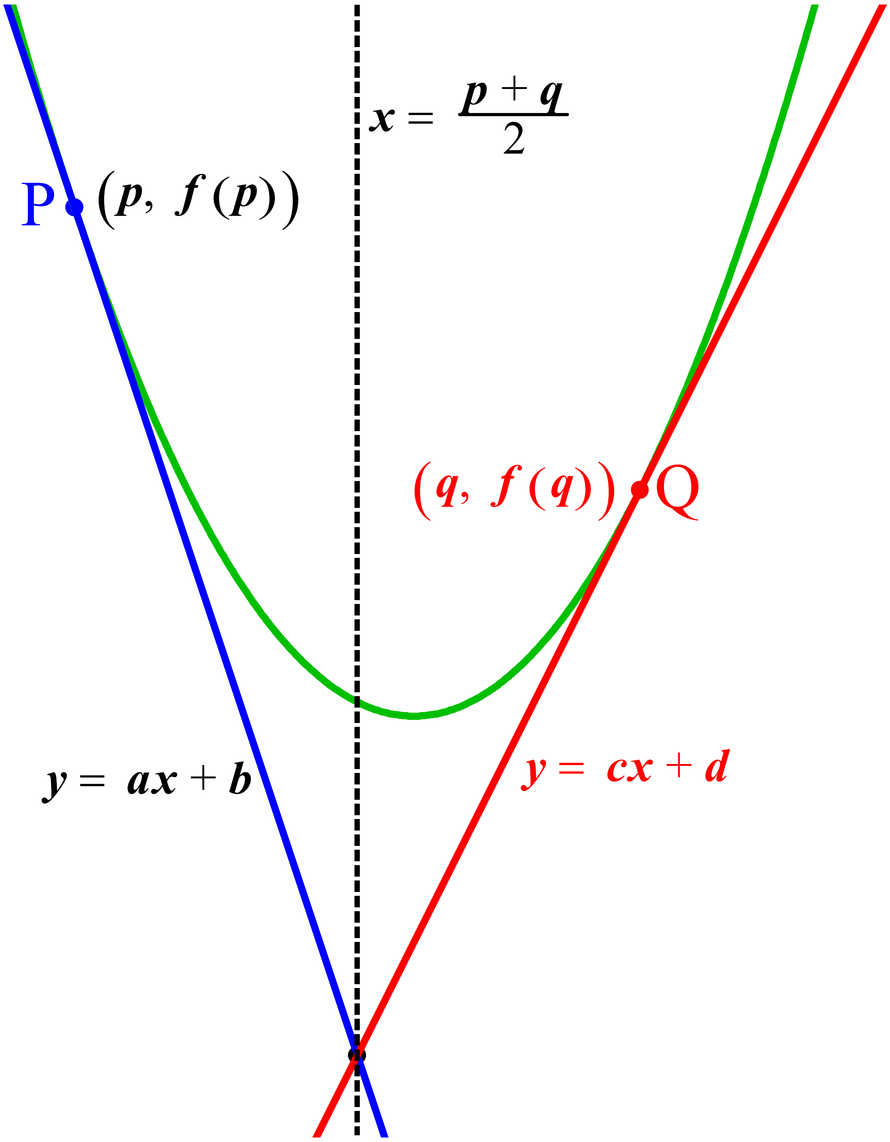
これと③，④より，

$$-\frac{\alpha^3}{3}=-\frac{(-\beta)^3}{3}=\frac{\beta^3}{3}$$

よって，$S_1=S_2$

ゆえに，$S_1 : S_2=1:1$

放物線と 2 接線に囲まれた部分の面積について



2 次関数 $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ について，
接点を $\mathrm{P}(p, f(p))$ とする接線の式を $y = ax + b$
接点を $\mathrm{Q}(q, f(q))$ とする接線の式を $y = cx + d$
とすると，

接線の交点の x 座標は $ax + b = cx + d$ より，　$x = \dfrac{-b+d}{a-c}$　・・・①

また，
$f(x) - (ax + b) = A(x - p)^2$　・・・②
$f(x) - (cx + d) = A(x - q)^2$　・・・③

②－③より，

$-(a-c)x-b+d=-2A(p-q)x+A(p-q)(p+q)$

等式は任意の x について成り立つから，

$a-c=2A(p-q)$， $-b+d=A(p-q)(p+q)$

よって， $\dfrac{-b+d}{a-c}=\dfrac{p+q}{2}$ 　・・・④

①，④より，

2 接線の交点の x 座標は $x=\dfrac{p+q}{2}$

（2 接線の交点の x 座標は点 P の x 座標と点 Q の x 座標の中点である）

$$\therefore S=\int_{p}^{\frac{p+q}{2}} A(x-p)^2\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^{q} A(x-q)^2\,dx$$

$$=\frac{A}{3}\Big[(x-p)^3\Big]_{p}^{\frac{p+q}{2}}+\frac{A}{3}\Big[(x-q)^3\Big]_{\frac{p+q}{2}}^{q}$$

$$=\frac{A}{3}\cdot\frac{(q-p)^3}{8}+\frac{A}{3}\cdot\frac{(q-p)^3}{8}$$

$$=\frac{A}{12}(q-p)^3$$

また，

$x=\dfrac{p+q}{2}$ と $y=f(x)$ と $y=ax+b$ で囲まれた部分の面積＝$\dfrac{A}{24}(q-p)^3$

$x=\dfrac{p+q}{2}$ と $y=f(x)$ と $y=cx+d$ で囲まれた部分の面積＝$\dfrac{A}{24}(q-p)^3$ より，

$x=\dfrac{p+q}{2}$ は $y=f(x)$ と 2 接線で囲まれた部分の面積を 2 等分することがわかる。

例題 3　2 つの放物線の共通接線

(1)

解答は「接線問題は接点から」という解法の定石に基づいているが，
常に通用するとは限らないので，オーソドックスな解法による別解も示す。

別解

共通接線を $y=h(x)=mx+n$，
共通接線が $y=f(x)$ および $y=g(x)$ と接する点の x 座標をそれぞれ p，q とすると，
$f(x)$ と $g(x)$ のいずれも x^2 の係数が 1 だから，
$f(x)-(mx+n)=(x-p)^2$　・・・①
$g(x)-(mx+n)=(x-q)^2$　・・・②
と表せる。
よって，①－②より，
$f(x)-g(x)=-2(p-q)x+(p-q)(p+q)$
これと $f(x)-g(x)=x^2-7x+10-(x^2+x+2)=-8x+8$ より，
$-8x+8=-2(p-q)x+(p-q)(p+q)$
この等式は任意の x について成り立つから，
$-8=-2(p-q)$　・・・③
$8=(p-q)(p+q)$　・・・④
③，④より，$\begin{cases} p-q=4 \\ p+q=2 \end{cases}$　$\therefore p=3$，$q=-1$
$p=3$ を①に代入（あるいは $q=-1$ を②に代入）することにより，

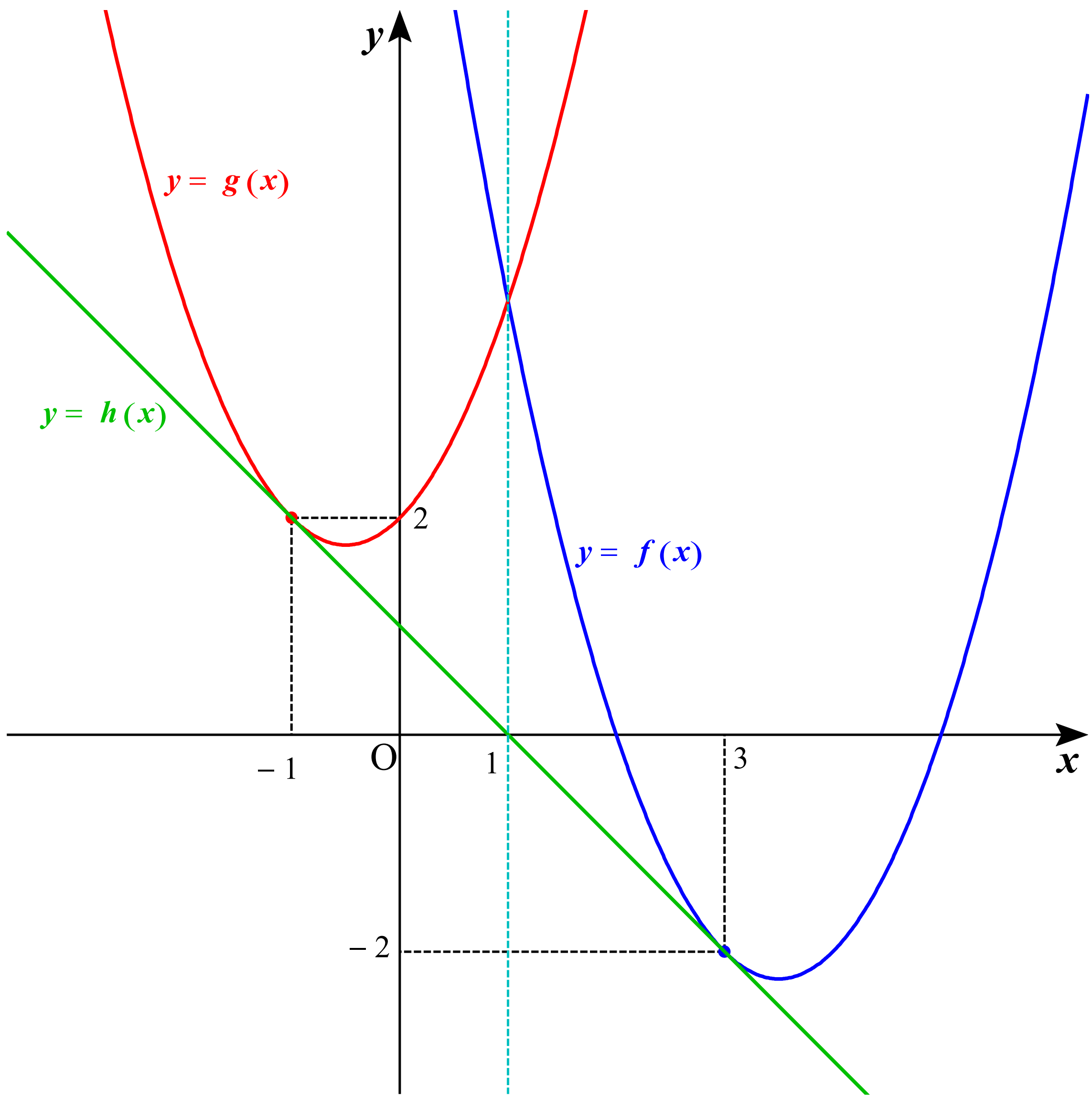
$$\begin{aligned} mx+n &= f(x)-(x-3)^2 \\ &= x^2-7x+10-(x^2-6x+9) \\ &= -x+1 \end{aligned}$$

$\therefore y=h(x)=-x+1$　・・・(答)

(2)

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は $x^2-7x+10=x^2+x+2$ を満たすから，$x=1$
また，$y=h(x)$ と $y=f(x)$，$y=h(x)$ と $y=g(x)$ の接点の x 座標は(1)よりそれぞれ，
$x=3$，$x=-1$
また，①，②より，
$f(x)-h(x)=(x-3)^2$，$g(x)-h(x)=(x+1)^2$

$$\therefore \int_1^3 (x-3)^2\,dx+\int_{-1}^1 (x+1)^2\,dx=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_1^3+\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$　・・・(答)


y
x
O
y = g(x)
y = h(x)
y = f(x)
2
−1
1
3
−2

例題 4　放物線の形は一種

別解 1：x_1 についての恒等式にもっていく。

$P_1(x_1, x_1^2)$，$P_2(x_2, 2x_2^2-4x_2+3)=(x_2, 2(x_2-1)^2+1)$ とおくと，

接線の傾きが等しいことから，$2x_1=4x_2-4$

$$\therefore x_2=\frac{x_1}{2}+1$$

$$\therefore P_2\left(\frac{x_1}{2}+1, \frac{x_1^2}{2}+1\right)$$

直線 P_1P_2 上の任意の点を $Q(x, y)$，原点を O とすると，

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP_1}+k\overrightarrow{P_1P_2}$ より，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{2}+1-x_1 \\ \dfrac{x_1^2}{2}+1-x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -\dfrac{x_1}{2}+1 \\ -\dfrac{x_1^2}{2}+1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-x_1^2 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -\dfrac{x_1}{2}+1 \\ -\dfrac{x_1^2}{2}+1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (x-x_1)\left(-\frac{x_1^2}{2}+1\right)=(y-x_1^2)\left(-\frac{x_1}{2}+1\right)$$

$$\therefore (x-x_1)(x_1^2-2)=(y-x_1^2)(x_1-2)$$

よって，任意の直線 P_1P_2 を表す方程式は

$x(x_1^2-2)-y(x_1-2)-2x_1^2+2x_1=0$

すべての直線 P_1P_2 が定点を通るならば，

定点の座標をこの方程式に代入したとき，この方程式は任意の実数 x_1 について成り立つ。

換言すれば，左辺を x_1 について整理してできた式 $(x-2)x_1^2-(y-2)x_1-2(x-y)=0$ は

x_1 についての恒等式となる。

このとき，$x-2=0$ かつ $y-2=0$ かつ $x-y=0$ より，$x=y=2$

よって，直線 P_1P_2 は定点 $(2,2)$ を通る。

別解 **2**：必要条件から入る

$\mathrm{P_1}\left(x_1, x_1{}^2\right)$，$\mathrm{P_2}\left(x_2, 2x_2{}^2-4x_2+3\right)=\left(x_2, 2(x_2-1)^2+1\right)$とおくと，

接線の傾きが等しいことから，$2x_1=4x_2-4$

$$\therefore x_2=\frac{x_1}{2}+1$$

$$\therefore \mathrm{P_2}\left(\frac{x_1}{2}+1, \frac{x_1{}^2}{2}+1\right)$$

$x_1=0$ のとき

$\mathrm{P_1}(0,0)$，$\mathrm{P_2}(1,1)$より，この 2 点を通る直線の方程式は $y=x$　・・・①

$x_1=2$ のとき

$\mathrm{P_1}(2,4)$，$\mathrm{P_2}(2,3)$より，この 2 点を通る直線の方程式は $x=2$　・・・②

よって，①と②の交点は$(2,2)$である。

したがって，すべての直線 $\mathrm{P_1P_2}$ が定点を通るならば，その定点は$(2,2)$である。

そこで，任意の直線 $\mathrm{P_1P_2}$ を表す方程式を求め，それが点$(2,2)$を通るかを検証してみる。

まず任意の直線 $\mathrm{P_1P_2}$ を表す方程式を求める。

直線 $\mathrm{P_1P_2}$ 上の任意の点を $\mathrm{Q}(x, y)$，原点を O とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+k\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ より，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1{}^2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{2}+1-x_1 \\ \dfrac{x_1{}^2}{2}+1-x_1{}^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1{}^2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -\dfrac{x_1}{2}+1 \\ -\dfrac{x_1{}^2}{2}+1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-x_1{}^2 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -\dfrac{x_1}{2}+1 \\ -\dfrac{x_1{}^2}{2}+1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (x-x_1)\left(-\frac{x_1{}^2}{2}+1\right)=\left(y-x_1{}^2\right)\left(-\frac{x_1}{2}+1\right)$$

$$\therefore (x-x_1)\left(x_1{}^2-2\right)=\left(y-x_1{}^2\right)(x_1-2)$$

よって，任意の直線 $\mathrm{P_1P_2}$ を表す方程式は

$$x\left(x_1{}^2-2\right)-y(x_1-2)-2x_1{}^2+2x_1=0$$

これを x_1 について整理すると，

$(x-2)x_1{}^2-(y-2)x_1-2(x-y)=0$

となり，

これに $x=y=2$ を代入すると，この方程式は任意の x_1 について成り立つ。

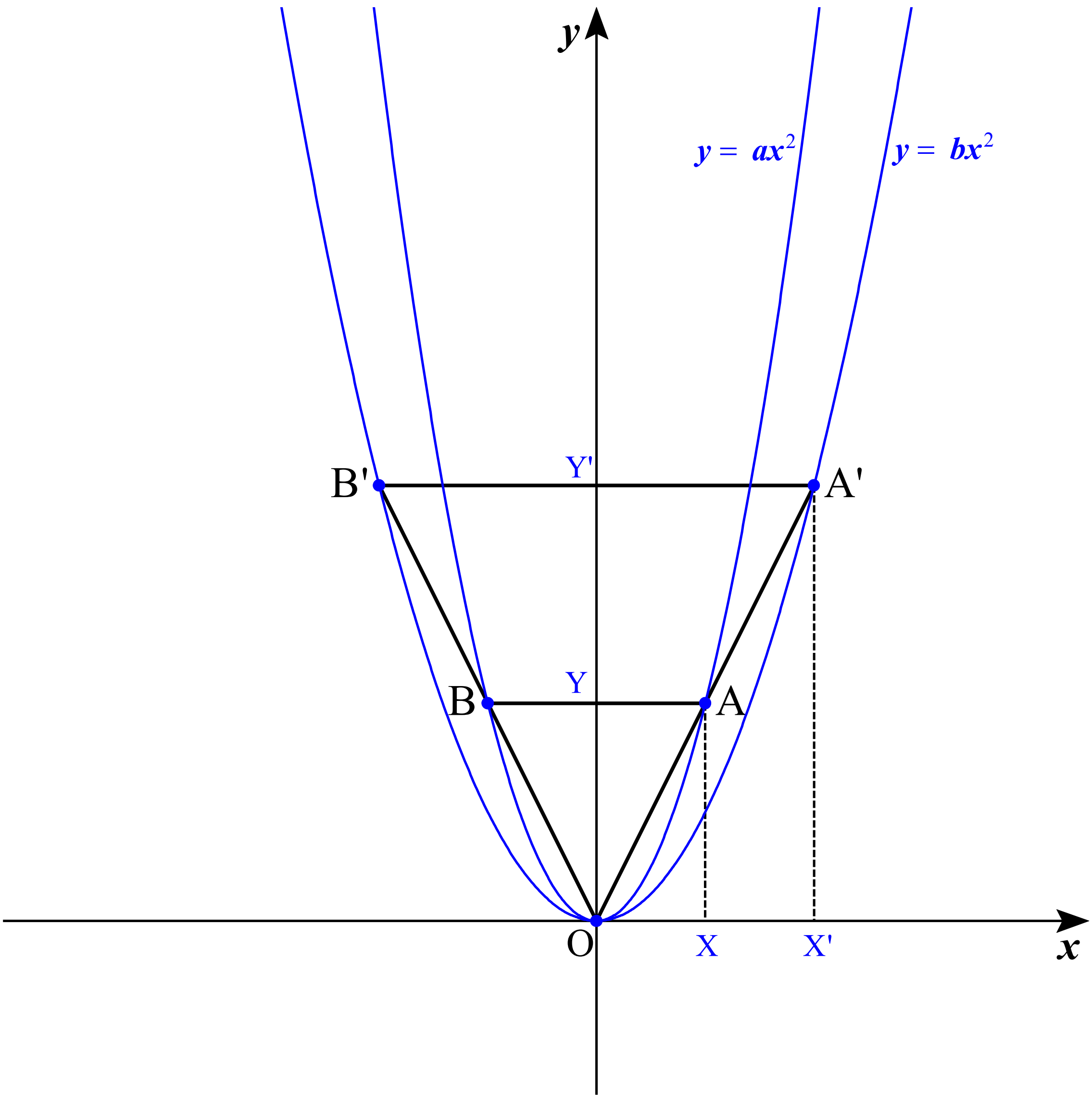
よって，直線 P_1P_2 は定点 $(2,2)$ を通る。

2 次関数の相似比と相似中心

実数係数の 2 次関数はすべて相似あるいは合同であり，

たとえば，$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $\left|\dfrac{1}{a}\right|:\left|\dfrac{1}{b}\right|=|b|:|a|$ である。

ここで，$a>0$，$b>0$ の場合を考え，その相似比を求めてみる。



図より，△OAB と△OA'B' の相似比が $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比である。

$y=ax^2$ 上の任意の点を(X,Y)とすると，

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$

両辺を$\dfrac{a}{b}$倍すると，$\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}=\dfrac{a^2}{b}\mathrm{X}^2$

よって，

$\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}=b\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X}\right)^2$

これは，$\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X},\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$が $y=bx^2$ 上の点であることを示している。

よって，図より，

$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X},\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は$1:\dfrac{a}{b}$ より $b:a$

別解 1

A' は，$y=\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}x$ と $y=bx^2$ との交点より，

$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}},\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2}\right)$

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$ より，$\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\dfrac{a\mathrm{X}^2}{\mathrm{X}}=a\mathrm{X}$，$\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\dfrac{\mathrm{Y}^2}{\dfrac{\mathrm{Y}}{a}}=a\mathrm{Y}$ だから，

$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X},\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は$1:\dfrac{a}{b}$ より $b:a$

対応する点の接線の傾きは等しい

2 次関数の相似だから，対応する点の接線の傾きは等しくて当然だが，
一応確かめてみよう。

$y=ax^2$ 上の点 A における接線の傾きを m とすると， $y'=2ax$ より， $m=2a\mathrm{X}$

$y=bx^2$ 上の点 A' における接線の傾きを m' とすると， $y'=2bx$ より， $m'=2b\mathrm{X}'$

ここで， $\mathrm{X}'=\dfrac{a}{b}\mathrm{X}$ だから， $m'=2b\mathrm{X}'=2b\cdot\dfrac{a}{b}\mathrm{X}=2a\mathrm{X}$

よって， $m=m'$

別解 2

△OAB と△OA'B' において，対応する点の接線の傾きは等しいことを使うと，

$y=ax^2$ の点 A における接線の傾きは $2a\mathrm{X}$

$y=bx^2$ の点 A' における接線の傾きは $2b\mathrm{X}'$

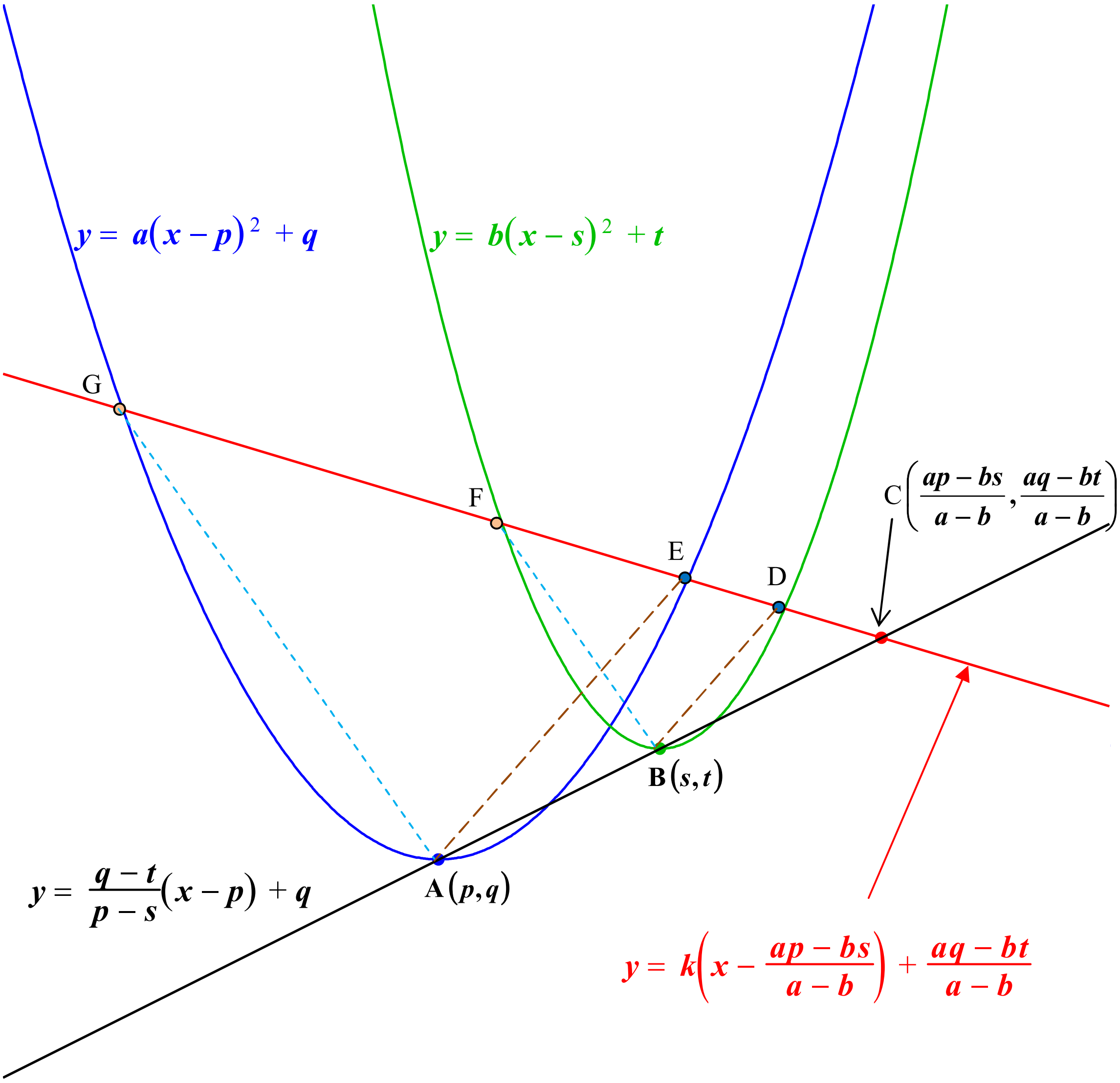
より， $2a\mathrm{X}=2b\mathrm{X}'$

$\therefore \dfrac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}=\dfrac{a}{b}\left(=\dfrac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}\right)$

このことから， $y=bx^2$ は， $y=ax^2$ を $\dfrac{a}{b}$ 倍に拡大したものであることがわかる。

よって， $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}=b:a$

$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の相似中心の求め方



相似中心を C，$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の頂点をそれぞれ A，B とすると，
対応する点の接線の傾きは等しいから，
頂点（接線の傾き 0）を結ぶ直線上に相似中心 C があり，
$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の相似比が $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$，すなわち $b:a$ であることより，
$\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=b:a$，すなわち相似中心 C は，線分 AB を $b:a$ に外分する点である。
よって，$\mathrm{C}\left(\frac{ap-bs}{a-b},\frac{aq-bt}{a-b}\right)$

相似中心を求めることでどんなことができるか？

ここで，相似中心 C を通る直線の傾きを k （k は実数）とすると，

直線の式は，$y=k\left(x-\dfrac{ap-bs}{a-b}\right)+\dfrac{aq-bt}{a-b}$

この直線と $y=a(x-p)^2+q$，$y=b(x-s)^2+t$ との交点をそれぞれ E，D とすると，

C は相似中心だから，△ACE∽△BCD

対応する点の接線の傾きは等しいから，

点 E における接線と点 D における接線の傾きは等しい。

同様に，点 F における接線と点 G における接線の傾きは等しい。

まとめ

2 次関数の相似中心を通る任意の直線と 2 次関数との交点から，

複数の 2 次関数において，接線の傾きが互いに等しい点を簡単に知ることができる。

補足 1

物理の放物運動の問題を解くとき，2 次関数の相似性を利用する解き方もある。

参考：物理重要問題集を解いてみた 038 床や壁との斜めの衝突

補足 2

外分点の公式の導き方

AB を $m:n$ に外分する点を C とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}:\overrightarrow{\mathrm{BC}}=m:n$ より，

$n\overrightarrow{\mathrm{AC}}=m\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

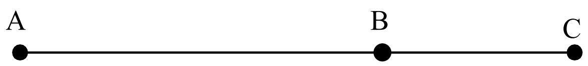
$$n\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=m\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$n\overrightarrow{\mathrm{OC}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}=m\overrightarrow{\mathrm{OC}}-m\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$(m-n)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m-n}$$



同様に，

AB を $m:n$ に内分する点を D とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}:\overrightarrow{\mathrm{DB}}=m:n$ より，

$n\overrightarrow{\mathrm{AD}}=m\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

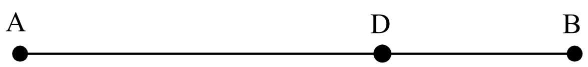
$$n\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=m\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$$

$$n\overrightarrow{\mathrm{OD}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-m\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$(m+n)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m+n}$$



例題 5　放物線と幾何図形

(2)

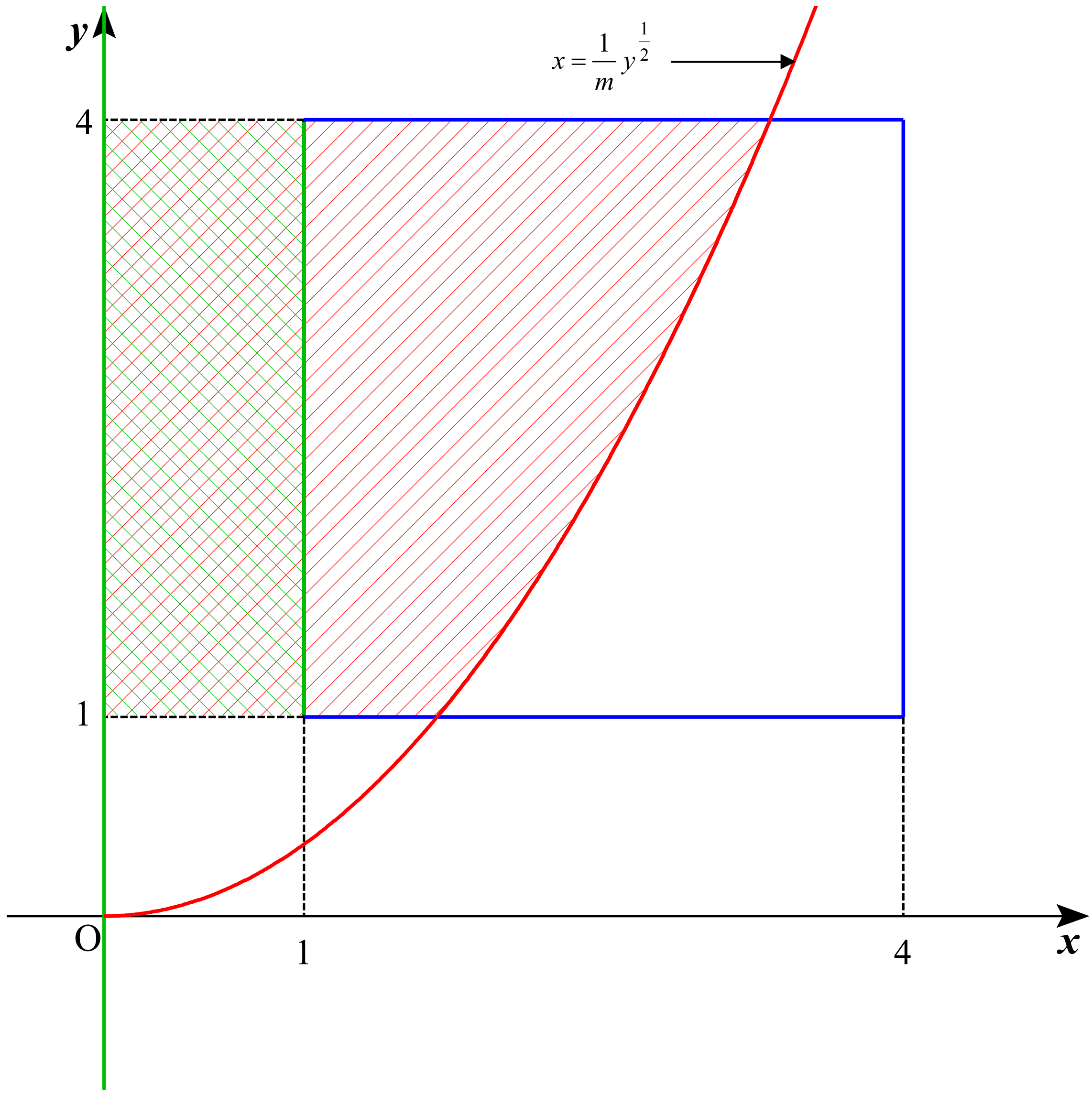
別解

$y=m^2x^2$ （$x \geqq 0$，$y \geqq 0$）より，$x=\dfrac{1}{m}y^{\frac{1}{2}}$

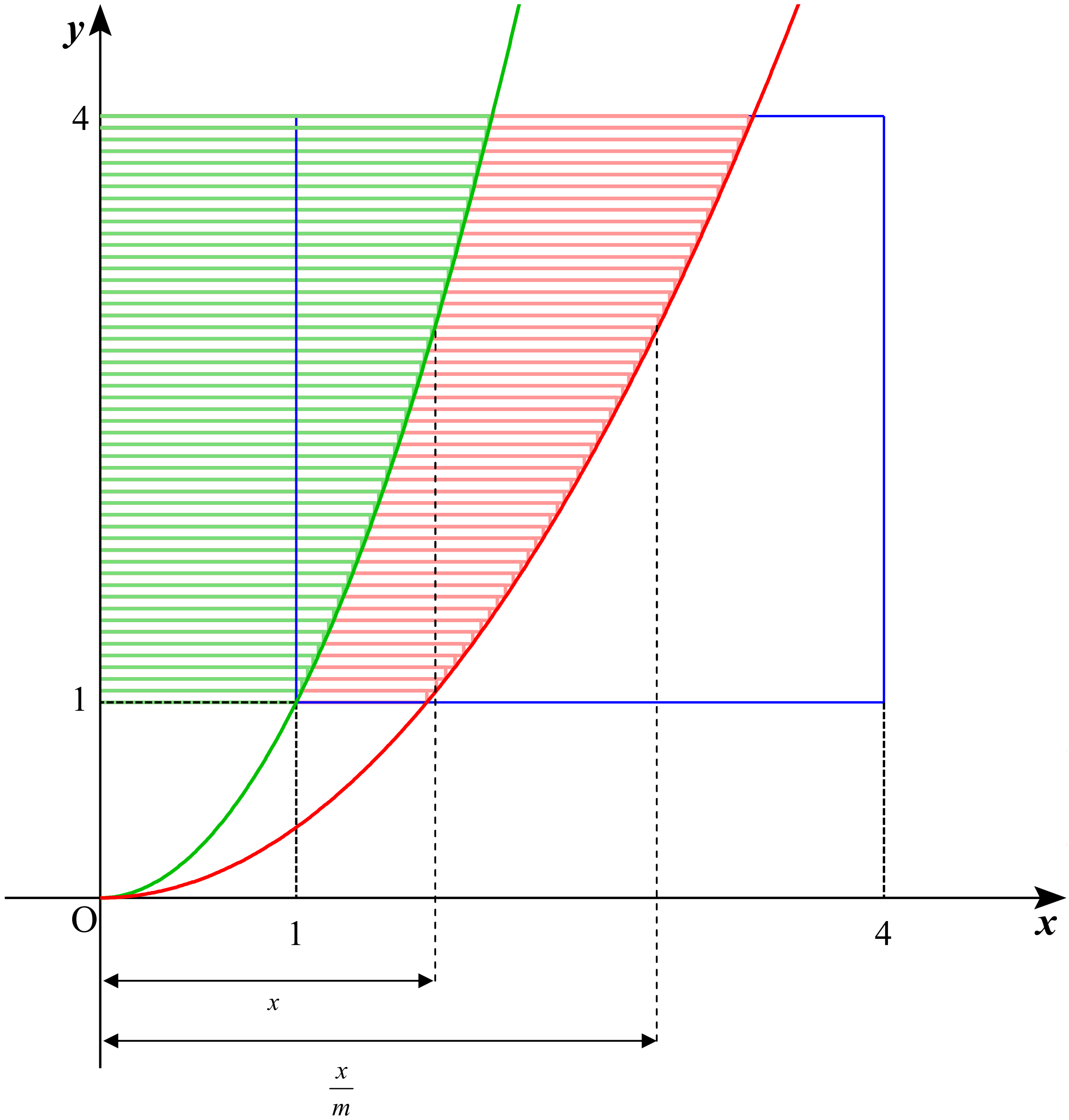
よって，下図赤色斜線部の面積$=\displaystyle\int_1^4 x\,dy=\frac{1}{m}\int_1^4 y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{m}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3m}$

$\dfrac{14}{3m}$ から緑色斜線部の面積を引くと，四角形 EFGH の面積の半分，すなわち $\dfrac{9}{2}$ になるから，

$\therefore \dfrac{14}{3m}-(4-1)\times 1=\dfrac{9}{2}$　　$\therefore m=\dfrac{28}{45}$



(2)の別解の解説の解説



縦の長さが無限小の長方形の面積の総和と見なせば，

個々の長方形の面積比は，横の長さの比＝$x:\dfrac{x}{m}=1:\dfrac{1}{m}$ より，　$1:\dfrac{1}{m}$

よって，その総和も$1:\dfrac{1}{m}$である。

すなわち$S=②\times\dfrac{1}{m}=\dfrac{14}{3m}$

例題 7　3 次関数のグラフと接線

(2)

解説の解説

点 Q における接線の式を $y=m(x)$ とおくと，

方程式 $x^3-m(x)=0$ の 3 解は β,β,γ であり，

$x^3-m(x)=0$ の 2 次の係数は 0 だから，解と係数の関係より， $2\beta+\gamma=0$　 $\therefore \gamma=-2\beta$

よって，

$x^3-m(x)=(x-\beta)^2(x-\gamma)=(x-\beta)^2(x+2\beta)$

$$\therefore S_2=\int_{\gamma}^{\beta}\left\{x^3-m(x)\right\}dx$$

$$=\int_{-2\beta}^{\beta}(x-\beta)^2(x+2\beta)dx$$

ここで， $\int_{-2\beta}^{\beta}(x-\beta)^2(x+2\beta)dx$ を $-\int_{\beta}^{-2\beta}(x-\beta)^2(x+2\beta)dx$ と変形すると，

(1)の $-\int_{\alpha}^{-2\alpha}(x-\alpha)^2(x+2\alpha)dx$ の α を β に変えた式であることに気がつく。

よって， $S_2=\dfrac{27}{4}\beta^4$

これと $\beta=-2\alpha$ より， $S_2=\dfrac{27}{4}(-2\alpha)^4=16\cdot\dfrac{27}{4}\alpha^4=16S_1$

例題 8　3 次関数のグラフと放物線

(1)

点 A の x 座標を t，点 A の接線を $h(x)$ とすると，

$f(x)-h(x)=(x-t)^2(x-p)$

$g(x)-h(x)=-2(x-t)^2$

と表せるから，

$f(x)-g(x)=(x-t)^2(x-p+2)$

よって，$f(x)-g(x)=0$ は t を重解にもつ。

例題 9　4 次関数のグラフと直線

(1)

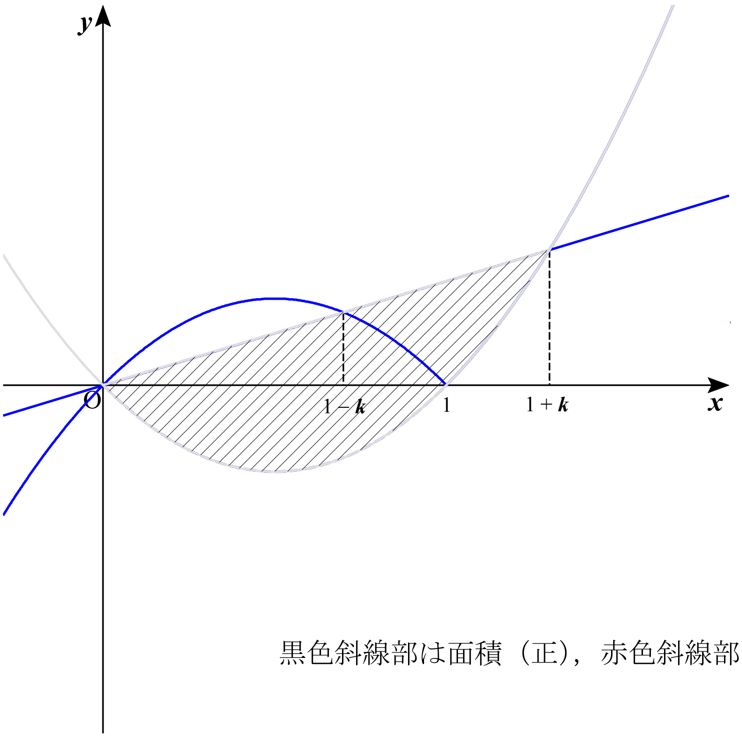
解説の解説

$f(x)=\left(x^2-1\right)^2-1$ より，$f(x)$ は $x^2=1$，すなわち $x=\pm1$ のとき最小値 -1 をとる。

また，$f(x)=x^2\left(x^2-2\right)$ より，$x=0$ で x 軸と接し，$x=\pm\sqrt{2}$ で x 軸と交わる。

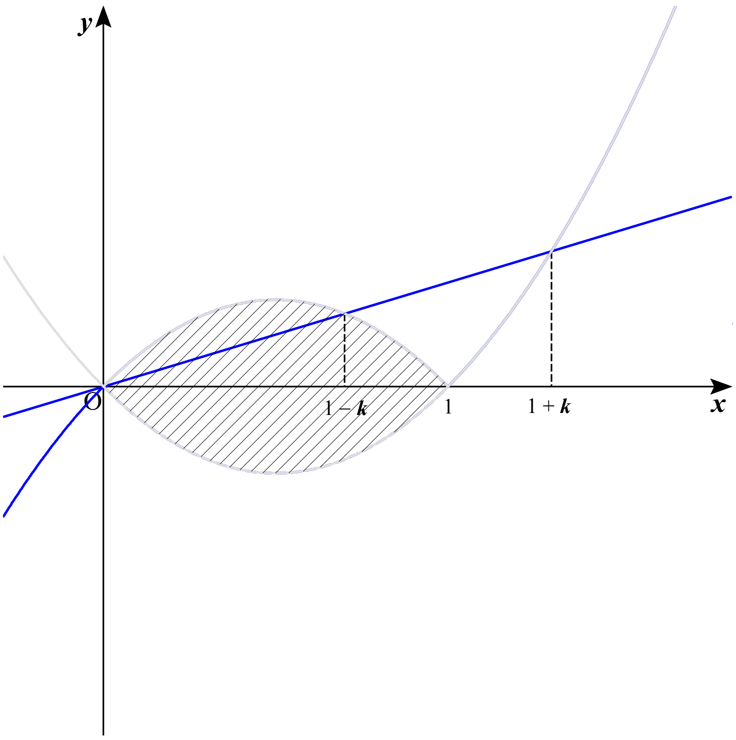
例題 12　面積の最大・最小（2）

面積を一気に求める方法の解説の解説

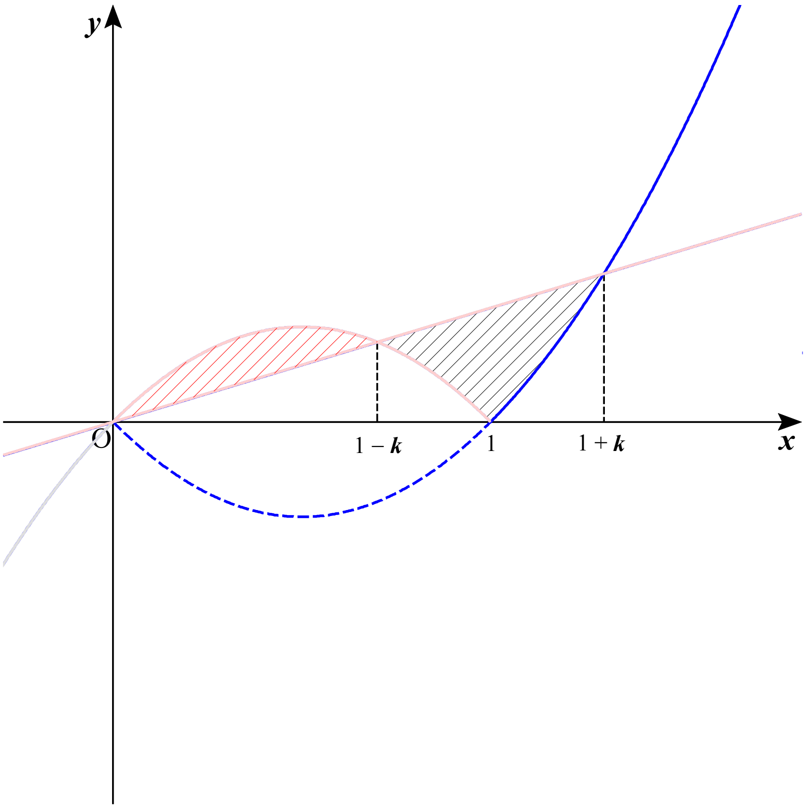


黒色斜線部は面積（正），赤色斜線部は面積× −1（負）

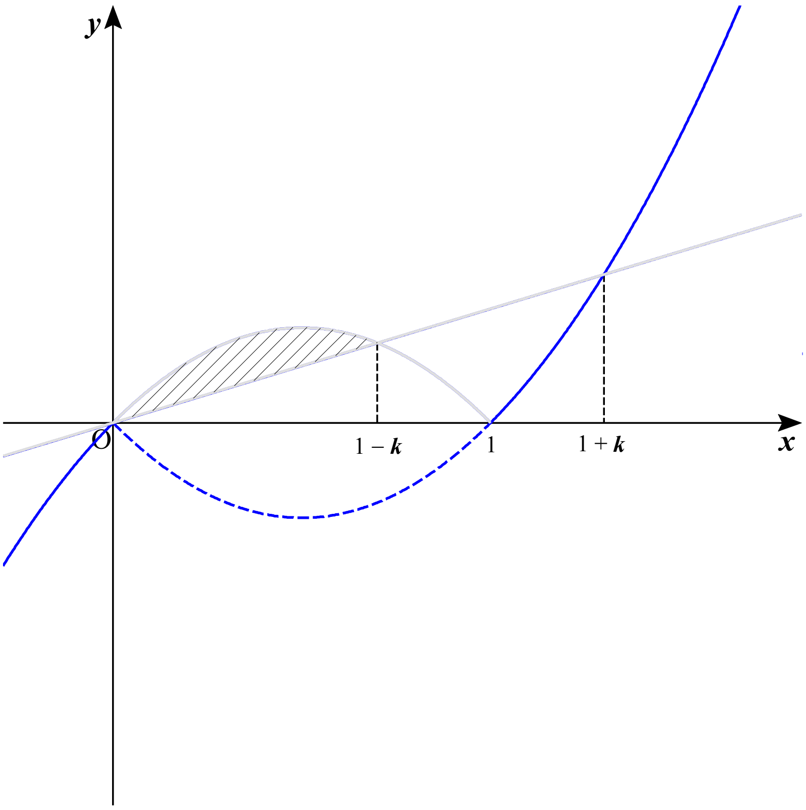
から



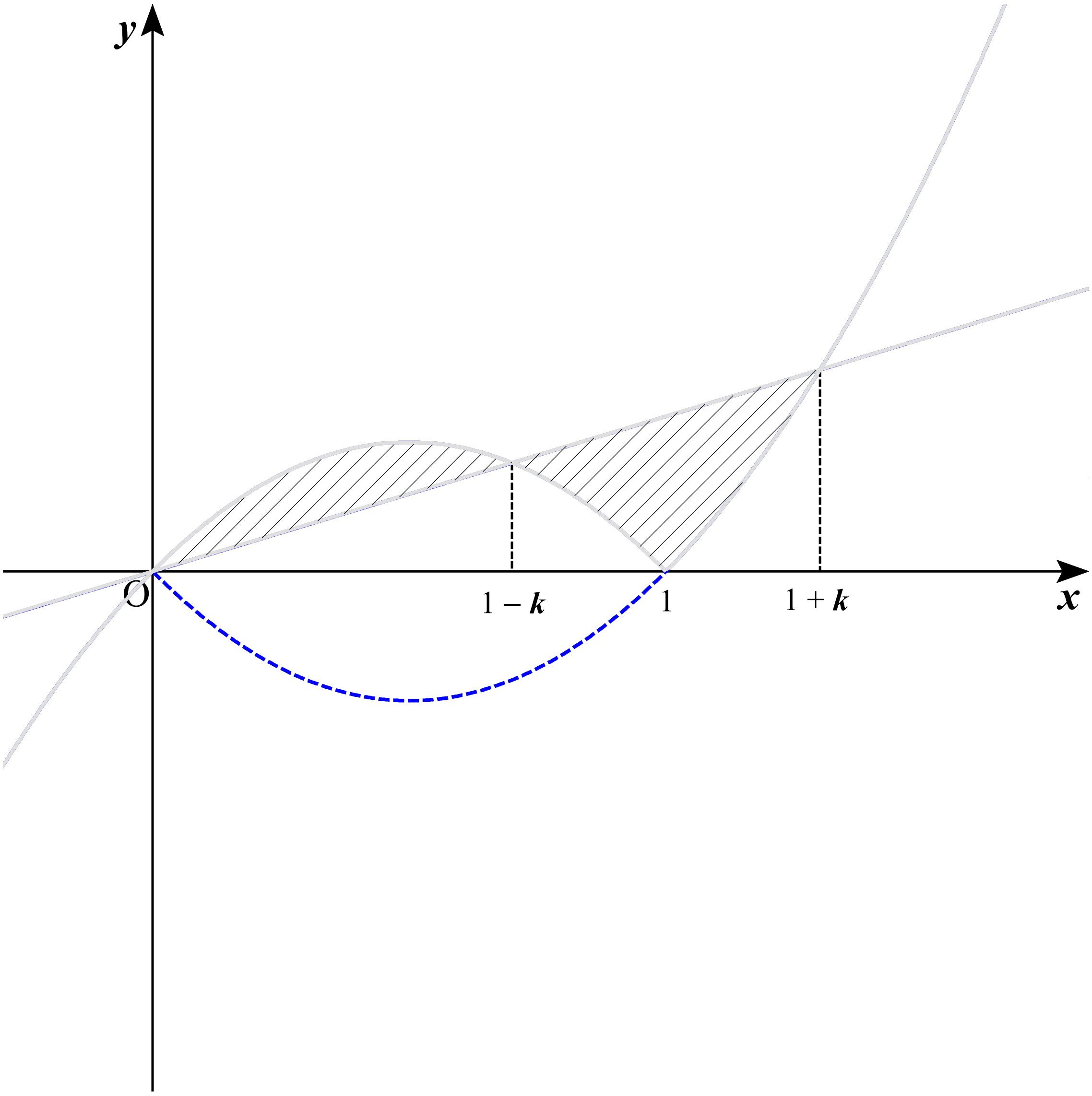
を引くと，



赤色斜線部は面積× −1（負）ができるので，これを黒色斜線部にするために，



を 2 つ加えると，



となる。