極限

3　三角関数の極限／$x \to 0$ の場合

(4)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 3x(1-\cos 2x)}{\tan^3 x} &= \sin 3x \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} \cdot \left\{1-\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\right\} \\
&= \sin 3x \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} \cdot \left\{\left(1-\cos^2 x\right)+\sin^2 x\right\} \\
&= \sin 3x \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} \cdot 2\sin^2 x \\
&= 2\cos^3 x \cdot \frac{\sin 3x}{\sin x} \\
&= 2\cos^3 x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \xrightarrow{x \to 0} 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 6
\end{aligned}$$

5　*e* がらみの極限

(2)

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left\{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\left(\frac{-n+1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\left(\frac{-n}{-n+1}\right)^{n}\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right\}^{-2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-2}\xrightarrow{n\to\infty}e^{-2}\cdot 1=e^{-2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ （nは自然数）の $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ （xは実数）への拡張

$x\to\infty$ の場合

$[x]\le x<[x]+1$ より，$\displaystyle\frac{1}{[x]}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{[x]+1}$　$\displaystyle\therefore 1+\frac{1}{[x]}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{[x]+1}$

$$\therefore\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}$$

$$\therefore\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}$$

$x\to\infty$ ならば$[x]\to\infty$ だから，

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=e\cdot 1=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e$$

よって，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

$x\to-\infty$ の場合

$x<0\Leftrightarrow -x>0$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ を活かせばよい。

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\left(1-\frac{1}{-x}\right)^{-(-x)}\\&=\left(\frac{-x-1}{-x}\right)^{-(-x)}\\&=\left(\frac{-x}{-x-1}\right)^{-x}\\&=\left\{1+\frac{1}{-(x+1)}\right\}^{-x}\\&=\left\{1+\frac{1}{-(x+1)}\right\}^{-(x+1)}\left\{1+\frac{1}{-(x+1)}\right\}\end{aligned}$$

$x \to -\infty$ ならば $-(x+1) \to \infty$ だから，

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{-(x+1) \to \infty}\left[\left\{1+\frac{1}{-(x+1)}\right\}^{-(x+1)}\left\{1+\frac{1}{-(x+1)}\right\}\right]$$

$$= \lim_{-(x+1) \to \infty}\left\{1+\frac{1}{-(x+1)}\right\}^{-(x+1)} \cdot \lim_{-(x+1) \to \infty}\left\{1+\frac{1}{-(x+1)}\right\}$$

$$= e \cdot 1$$

$$= e$$

あるいは，

$x = -t$ とおくと， $x \to -\infty$ ならば $t \to \infty$ だから，

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \to \infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}$$

ここで，

$$\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t} = \left(\frac{-t+1}{-t}\right)^{-t}$$

$$= \left(\frac{-t}{-t+1}\right)^{t}$$

$$= \left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}$$

$$= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}$$

$$= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

よって，

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \to \infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}$$

$$= \lim_{t \to \infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{t \to \infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \to \infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

$$= e \cdot 1$$

$$= e$$

e 関連の極限公式の導き方の流れ

e は主に次の 4 つの形で表現できる。

$$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

$$\lim_{h\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}=e$$

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$$

これらは以下に示すように相互変換できる。

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ から始める場合

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\frac{1}{x}=t$ とおく

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

自然対数をとる

$$\log\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e$$

$$\lim_{x\to0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$\log(1+x)=u$ とおくと，

$1+x=e^{u}$ より，

$x=e^{u}-1$ だから

$$\lim_{u\to o}\frac{u}{e^{u}-1}=1$$

$$\lim_{u\to0}\frac{e^{u}-1}{u}=1$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ から始める場合

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\Big\downarrow \ e^x - 1 = t \text{ とおく}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{\log(1+t)} = 1$$

よって,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

また,

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \log \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\end{aligned}$$

左辺 $= 1 = \log e$ より,

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\Big\downarrow \ \frac{1}{t} = u \text{ とおく}$$

$$\lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

補足

指数関数 $y = f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ において,

e は次のように定義される。

$y = f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ のうち,

$x = 0$ における接線の傾きが 1 であるものを $y = e^x$ とする。

よって,

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = 1$ より,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

6　微分係数と極限

$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{x-a}$ において，$f(a)-g(a)=0$ ならば，

$F(x)=f(x)-g(x)$ とおけば，$F(a)=0$ より，

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a)$$

分子全体を $F(x)$ とおけばうまくいく問題が多いので，

まずは，$f(a)-g(a)=0$ となるかどうかを試みるのがよい。

また，2 変数の場合は，1 つを定数扱いして処理するのがよい。

(3)

$(a^x)' = (\log a)a^x$ の導き方

$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$ より，$(a^x)' = (e^{x \log a})' = (\log a)e^{x \log a} = (\log a)a^x$

（ロ）

別解解説

$(a, f(a))$ と $(a+3x, f(a+3x))$ を通る直線の傾き $= \dfrac{f(a+3x)-f(a)}{(a+3x)-a} = \dfrac{f(a+3x)-f(a)}{3x}$

$$\therefore \frac{f(a+3x)-f(a)}{x} = 3 \cdot \frac{f(a+3x)-f(a)}{3x}$$

$(a, f(a))$ と $(a+x, f(a+x))$ を通る直線の傾き $= \dfrac{f(a+x)-f(a)}{(a+x)-a} = \dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}$

よって，

$$\begin{aligned} \frac{f(a+3x)-f(a+x)}{x} &= \frac{f(a+3x)-f(a)-\{f(a+x)-f(a)\}}{x} \\ &= 3 \cdot \frac{f(a+3x)-f(a)}{3x} - \frac{f(a+x)-f(a)}{x} \xrightarrow{x \to 0} 3f'(a)-f'(a)=2f'(a) \end{aligned}$$

7　極限が存在するように定数を定める

$\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\alpha$ （α は有限確定値）かつ $\lim_{x\to a}f(x)=0$ ならば，

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{\dfrac{g(x)}{f(x)}\cdot f(x)\right\}=\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}\cdot\lim_{x\to a}f(x)=\alpha\cdot 0=0$

(2)

答の見当のつけ方

$x\to\infty$ だから，x が十分大きい場合で考えればよい。

よって，$\sqrt{2x^2-3x+4}=\sqrt{2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{23}{8}}\approx\sqrt{2}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)=\sqrt{2}x-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

これと $\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{2x^2-3x+4}-(ax+b)\right\}=0$ より，

$a=\sqrt{2}$，$b=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ であることが推測できる。

9　はさみうちの原理

漸化式が与えられた数列の極限の求め方

方法 1.

漸化式から数列$\{a_n\}$の一般項を求め，$\lim_{n\to\infty} a_n$を実行する。

方法 2.

$a_1, a_2, a_3, \cdots$の値から数列$\{a_n\}$の一般項を推定し，それを「数学的帰納法」で証明後，

$\lim_{n\to\infty} a_n$を実行する。

方法 3.

$f(x)$が連続関数で，

漸化式$a_{n+1}=f(a_n)$で与えられた数列$\{a_n\}$が有限確定値αに収束するならば，

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$より，$\alpha=f(\alpha)$が成り立つ。

逆は必ずしも成り立たないが，$x=f(x)$の解は必要条件であるので，

このことを利用して，はさみうちの原理から$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めればよい。

手順 1.

漸化式$a_{n+1}=f(a_n)$で与えられた数列$\{a_n\}$について，$x=f(x)$の解を求める。

仮に，この解をαとする。

手順 2.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$ より，

$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$ となるかどうか調べる。

$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$ が成り立つとき，$|a_n-\alpha|$が単調に減少する場合が多いので，

$|a_{n+1}-\alpha|\leq r|a_n-\alpha|\quad (0<r<1)$となるような$r$を見つける。

***r* の見つけ方**

$|a_{n+1}-\alpha|=|f(a_n)-\alpha|$を変形し，$|a_{n+1}-\alpha|=|A||a_n-\alpha|$とした後，

$|A|\leq|r|\ (|r|<1)$を満たす適当なrを見つける。

そのようなrが存在すると，$|a_{n+1}-\alpha|=|A||a_n-\alpha|\leq|r||a_n-\alpha|$ より，

$$|a_n-\alpha|\leq|r||a_{n-1}-\alpha|\leq\cdots\leq|r|^{n-1}(a_1-\alpha)\xrightarrow{n\to\infty}0\quad(\because |r|<1)$$

が成り立つので，はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ となる。

方法 3 を使う例

数列$\{a_n\}$は$0<a_1<3$、$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$をみたすとき，

$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。

解

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ （αは有限確定値）ならば，

$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ より，$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\sqrt{1+a_n}\right\}$　$\therefore \alpha=1+\sqrt{1+\alpha}$

よって，

$x=1+\sqrt{1+x}$ の解は，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ （αは有限確定値）であるための必要条件である。

ここで，$x=1+\sqrt{1+x}$ の解を求めると，$x-1=\sqrt{1+x}$ より，$(x-1)^2=1+x$
$\therefore x(x-3)=0$　$\therefore x=0,3$
よって，数列$\{a_n\}$は 0 か 3 に収束する。

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ とすると，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-0&=1+\sqrt{1+a_n}-0\\
&=\left(1+\sqrt{1+a_n}\right)\frac{1-\sqrt{1+a_n}}{1-\sqrt{1+a_n}}\\
&=\frac{-a_n}{1-\sqrt{1+a_n}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\cdot a_n
\end{aligned}
$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\cdot a_n$$

ここで，$\left|\frac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\right|<1$ならば，$\left|\frac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\right|\leq r<1$となるような$r$が存在するから，

$a_n=\frac{1}{\sqrt{1+a_{n-1}}-1}\cdot a_{n-1}\leq ra_{n-1}=r^{n-1}a_1$とはさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty} a_n=0$となる。
そこで，a_nの値の範囲について調べる。
$n=1$のとき，$0<a_1<3$

$n=k$のとき，$0<a_k<3$とすると，$2<1+\sqrt{1+a_k}<3$

これと $a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}$ より，$2<a_{k+1}<3$

よって，数学的帰納法により $0<a_n<3$　・・・①が成り立つ。

$\therefore 0<\sqrt{1+a_n}-1<1$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}>1$

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\cdot a_n>a_n$

これより，$0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<3$

これは，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ とした仮定と矛盾する。

よって，$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$ とすると，

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1}-3|&=\left|1+\sqrt{1+a_n}-3\right|\\
&=\left|\left(-2+\sqrt{1+a_n}\right)\frac{2+\sqrt{1+a_n}}{2+\sqrt{1+a_n}}\right|\\
&=\left|\frac{a_n-3}{2+\sqrt{1+a_n}}\right|\\
&=\left|\frac{1}{\sqrt{1+a_n}+2}\cdot(a_n-3)\right|
\end{aligned}
$$

$$\therefore |a_{n+1}-3|=\left|\frac{1}{\sqrt{1+a_n}+2}\cdot(a_n-3)\right|$$

①より，$3<\sqrt{1+a_n}+2<4$　$\therefore \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}+2}<\dfrac{1}{3}$

よって，$|a_{n+1}-3|=\dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}+2}\cdot|a_n-3|<\dfrac{1}{3}|a_n-3|$

よって，$|a_n-3|<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}|a_1-3|\xrightarrow{n\to\infty}0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$

12　無限級数／周期的な数列

補足

$a_n{}^2$ が 11 で割り切れない場合（$a_{n+1} \neq 0$ の場合），

$1 \leq a_{n+1} \leq 10$ より，割り算を続けていくと，必ず最初と同じ余りが現れる。

すると，その後同じ割り算が繰り返されることになる。

よって，a_{n+1} は繰り返しの数列である。

余りの周期性についての数列問題 1

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を次ぎの漸化式によって定める。

$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \ (n = 1,2,\cdots)$

(1) a_n が偶数となることと，n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。

(2) a_n が 10 の倍数となるための条件を(1)と同様の形式で求めよ。

（東京大学－理系）

解

(1)

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n$ より，

$a_{n+2} = 2(a_{n+1} - 4a_n) + a_{n+1} + a_n$

ここで，a_n を 2 で割った余りを b_n とし，余りの数列 b_n で考える。

すると，$b_n = 0$ または 1，$b_1 = 1$，$b_2 = 1$

また，$b_{n+2} = (a_{n+1} + a_n$ を 2 で割った余り$) = (b_{n+1} + b_n$ を 2 で割った余り$)$

より，

$b_{n+2} = (b_{n+1} + b_n$ を 2 で割った余り$)$

これを使って，$n = 1,2,3,\cdots$ と順に b_n を求めると，

$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0, b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 0, \cdots$

b_7 以下も同様にして求められるので，

数列 $\{b_n\}$ は，1,1,0 が繰り返される。

よって，a_n が偶数 $\Leftrightarrow b_n = 0 \Leftrightarrow n$ が 3 の倍数

よって，a_n が偶数となることと，n が 3 の倍数となることは同値である。

(2)

a_n が 10 の倍数であるための必要十分条件は，a_n が偶数かつ 5 の倍数であることである。

(1)より，a_n が偶数であるための必要十分条件は n が 3 の倍数であった。

したがって，a_n が 5 の倍数であるための n の必要十分条件を求め，

これら 2 つの必要十分条件を同時に満たすような n を求めればよい。

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n$ より，

$a_{n+2} = -5a_n + (3a_{n+1} - 2a_n)$

a_{n+2} を 5 で割った余りを c_n とすると，$c_n = 0,1,2,3,4$，$c_1 = 1$，$c_2 = 3$

$c_{n+2} = (3c_{n+1} - 2c_n$ を 5 で割った余り$)$より,
$c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 2, c_4 = 0, c_5 = -4 = 1, c_6 = 3, c_7 = 2, c_8 = 0, \cdots$
よって，数列$\{c_n\}$は，1,3,2,0 が繰り返される。
よって, a_nが 5 の倍数であるための n の必要十分条件は n が 4 の倍数であることである。
よって， a_nが 10 の倍数であるための必要十分条件は,
n が 3 の倍数かつ 4 の倍数，すなわち 12 の倍数であることである。

余りの周期性についての数列問題 2

a を正の整数とし，数列$\{u_n\}$を次のように定める。
$u_1 = 2$， $u_2 = a^2 + 2$， $u_n = au_{n-2} - u_{n-1}$ （$n = 3,4,5,\cdots$）
このとき，数列$\{u_n\}$の項に 4 の倍数が現れないために,
a の満たすべき必要十分条件を求めよ。

解

u_n を 4 で割った余りを r_n $(r_n = 0,1,2)$とし, a を 4 で割った余りを b $(b = 0,1,2,3)$とすると,
$r_1 = 2$， $r_2 = (b^2 + 2$ を 4 で割った余り$)$， $r_n = (br_{n-2} - r_{n-1}$ を 4 で割った余り$)$
となる。
よって， $r_n = 0$ とならない条件を求めればよい。

（ i ） $b = 0$ のとき
$r_1 = 2$， $r_2 = 2$， $r_n = (-r_{n-1}$ を 4 で割った余り$) = -r_{n-1} = 4 - r_{n-1}$ より,
$n = 1,2,3,\cdots$ の順に r_n を求めると， $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = 2$　　$\therefore r_n = 2$
よって，条件を満たす。

（ ii ） $b = 1$ のとき
$r_1 = 2$， $r_2 = 3$， $r_n = (r_{n-2} - r_{n-1}$ を 4 で割った余り$)$より,
$n = 1,2,3,\cdots$ の順に v_n を求めると,
$r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 3, r_4 = 0, \cdots$ となり， 0 が現れるから不適。

（iii） $b = 2$ のとき
$r_1 = 2$， $r_2 = 2$， $r_n = (2r_{n-2} - r_{n-1}$ を 4 で割った余り$)$より,
$n = 1,2,3,\cdots$ の順に r_n を求めると,
$r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = 2$
よって，条件を満たす。

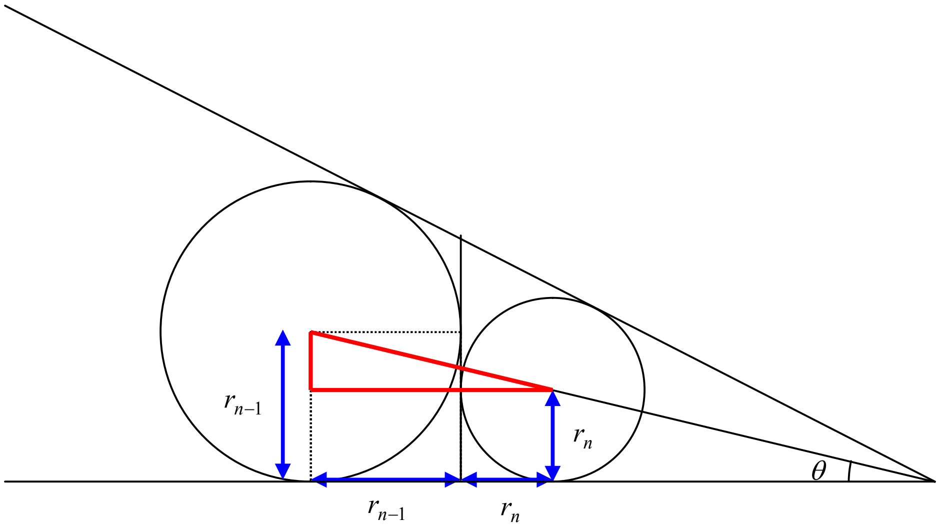
（iv） $b = 3$ のとき
$r_1 = 2$， $r_2 = 3$， $r_n = (3r_{n-2} - r_{n-1}$ を 4 で割った余り$)$より,
$n = 1,2,3,\cdots$ の順に v_n を求めると,
$r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 3, r_4 = 2, r_5 = 3, r_6 = 3, \cdots$ となり,
数列$\{r_n\}$は，2,3,3 が繰り返される。よって，条件を満たす。

以上より，求める必要十分条件は， a を 4 で割った余りが 1 でないことである。

13　無限級数と図形／等比型

(2)

別解



図より，$\dfrac{r_{n-1}-r_n}{r_{n-1}+r_n}=\tan\theta$　$\therefore r_n=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}r_{n-1}$