微分

2　微分の計算／対数微分法，媒介変数表示，陰関数

$x=f(t),\ y=g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$\frac{dy^2}{d^2x}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{dt}}{f'(t)}$$

(1)

別解

$x^{2x}=e^{\log x^{2x}}=e^{2x\log x}$ より $h(x)=e^{2x\log x}$

よって，$h'(x)=(2x\log x)'e^{2x\log x}=2(\log x+1)e^{2x\log x}=2(\log x+1)x^{2x}$

(2)

別解

$x^{\sin x}=e^{\log x^{\sin x}}=e^{\sin x\log x}$ より，$y=e^{\sin x\log x}$

よって，$y'=(\sin x\log x)'e^{\sin x\log x}=\left\{(\cos x)\log x+\frac{\sin x}{x}\right\}x^{\sin x}$

3　定義，公式の証明

3 演習題

（イ）別解

$$\frac{d\cos x}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin x\sin\frac{h}{2}}{h}=-2\sin x\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=-2\sin x\cdot\frac{1}{2}=-\sin x$$

5　グラフ／分数関数

補足

$f(x)$ の分母が偶関数で，分子が奇関数であるならば，

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{-g(-x)}{h(-x)}=-\frac{g(-x)}{f(-x)}=-f(-x)$$

よって，$f(x)$ は奇関数

6　グラフ／三角関数

$f'(x)$ の正負の調べ方

$f'(x)$ の符号と $\sin x\cos x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)$ の符号は同じだから，

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{11}{6}\pi$		2π
$\sin x$	0	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0
$\cos x$	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+
$2\cos x-\sqrt{3}$	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0

7　最大・最小／定義域が実数全体の場合

α,β をふつうに求めると，

$f'(\beta)=0$ より，$\beta^2-2b\beta-a=0$　・・・①

$f(\beta)=\frac{1}{6}$ より，$\frac{\beta-b}{\beta^2+a}=\frac{1}{6}$　$\therefore\ \beta^2+a=6\beta-6b$　・・・②

①，②から a を消去すると，$2\beta^2-2b\beta=6\beta-6b$　$\therefore\ \beta(\beta-b)=3(\beta-b)$

$\beta-b\neq0\left(\because f(\beta)=\frac{\beta-b}{\beta^2+a}=\frac{1}{6}\right)$ より，$\beta=3$

$f'(\alpha)=0$ より，$\alpha^2-2b\alpha-a=0$　・・・③

$f(\alpha)=-\frac{1}{2}$ より，$\frac{\alpha-b}{\alpha^2+a}=-\frac{1}{2}$　$\therefore\ \alpha^2+a=-2\alpha+2b$　・・・④

③，④から a を消去すると，$2\alpha^2-2b\alpha=-2\alpha+2b$　$\therefore\ \alpha(\alpha-b)=-(\alpha-b)$

$\alpha-b\neq0\left(\because f(\alpha)=\frac{\alpha-b}{\alpha^2+a}=-\frac{1}{2}\right)$ より，$\alpha=-1$

7 演習題

(4)

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+ax+1}$ の分母が 0 となるような実数 x が存在することが必要である。

すなわち $x^2+ax+1=0$ が異なる 2 実数解または重解をもつことが必要である。

$x^2+ax+1=0$ が異なる 2 実数解をもつとき

解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$f(x)=\dfrac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$

$x<\alpha$ ならば $(x-\alpha)(x-\beta)>0$，$\alpha<x<\beta$ ならば $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ であるから，

$\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x)=\infty$ ならば $\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x)=-\infty$ ならば $\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x)=\infty$

となり，$f(x)$ は最大値も最小値ももたない。

$x^2+ax+1=0$ が重解をもつとき

重解を α とすると，解と係数の関係より $\alpha^2=1$　$\therefore \alpha=\pm 1$

$\alpha=1$ のとき

$f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ より，$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\infty$ となり $f(x)$ は最大値を持たないので不適。

$\alpha=-1$ のとき

$f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ より，$\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x)=-\infty$ となり $f(x)$ は最小値を持たない。

また，$f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x+1)^4}$ より，$f(x)$ の増減は次の表のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$			0	$-$	
$f(x)$	0	$\downarrow$	$-\infty$	$\uparrow$	$\frac{1}{4}$	$\downarrow$	0

以上より，

$x^2+ax+1=0$ が重解 -1 をもつならば $f(x)$ は最大値 $\dfrac{1}{4}$ を持つが最小値を持たない。

また，このとき $x^2+ax+1=(x+1)^2$ より $a=2$

8　最大・最小／定義域が閉区間の場合

8 演習題

$f(0)=1$ より，$0 \le x \le 4$ において，$f(x)$ は $x=0$ のとき最大値 1 をとるから，

$0 < x \le 4$ において $f(x)$ が最小値 $\dfrac{1}{25}$ をとるような a の値を求めればよい。

そこで $0 < x \le 4$ における $f'(x) = a - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ の正負と $f(x)$ の最小値について検討する。

$a \le 0$ のとき

$f'(x) < 0$ であるから，$f(x)$ は単調に減少し，$x=4$ のとき最小値 $\dfrac{1}{25}$ をとる。

これと $f(4) = 4a + \dfrac{1}{5}$ より，$4a + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{25}$　$\therefore a = -\dfrac{1}{25}$

これは $a \le 0$ を満たすから，$a = -\dfrac{1}{25}$

$a > 0$ のとき

$$f'(x) = a - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{a\left\{x + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right\}\left\{x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right\}}{(x+1)^2}$$ より，

$f(x)$ は $x = -1 - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ のとき極大値を，$x = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ のとき極小値をとる。

これと $-1 - \dfrac{1}{\sqrt{a}} < 0$ であることから，

(ⅰ)　$-1 + \dfrac{1}{\sqrt{a}} \le 0$，すなわち $a \ge 1$ のとき

$0 \le x$ において $f'(x) \ge 0$ となり $f(x)$ は単調増加することと $f(0)=1$ より不適。

(ⅱ)　$0 < -1 + \dfrac{1}{\sqrt{a}} < 4$，すなわち $\dfrac{1}{5} < \sqrt{a} < 1$ のとき

$f(x)$ は $0 < x < 4$ において極小値 $f\left(-1 + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right) = -a + 2\sqrt{a}$ をとるから，

$-a + 2\sqrt{a} = \dfrac{1}{25}$ かつ $f(4) = 4a + \dfrac{1}{5} \le 1$ となるような a が存在すればよい。

まず $-a + 2\sqrt{a} = \dfrac{1}{25}$ について，

$$-a + 2\sqrt{a} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{a} + 1 = \frac{24}{25} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 = \frac{24}{25} \quad \therefore \sqrt{a} = 1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

ところが，$1+\frac{2\sqrt{6}}{5}>1$，$1-\frac{2\sqrt{6}}{5}<\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{5}<\frac{2\sqrt{6}}{5}$ および $\left(\frac{4}{5}\right)^2<\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2$ より，

$1-\frac{2\sqrt{6}}{5}<\frac{1}{5}$ であるから，$\sqrt{a}=1\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$ は，$\frac{1}{5}<\sqrt{a}<1$ を満たさない。

よって，不適。

(iii)　$4<-1+\frac{1}{\sqrt{a}}$ のとき，すなわち $0<\sqrt{a}<\frac{1}{5}$ のとき

$f(x)$ は $x=4$ において極小値 $f(4)=4a+\frac{1}{5}$ をとるから，

$4a+\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$ となるような a が存在すればよい。

$4a+\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$ より，$a=-\frac{1}{25}$

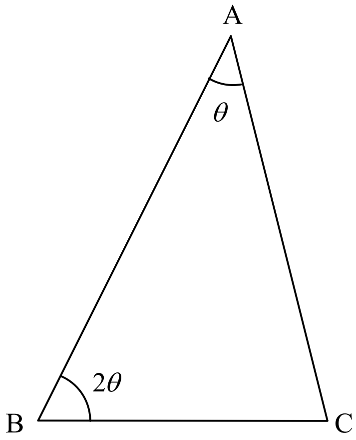
ところが，$0<\sqrt{a}<\frac{1}{5}$

よって，不適。

以上より，求める a の値は $-\frac{1}{25}$

9　最大・最小／図形への応用

9　演習題（ロ）



$\angle A=\theta$ とおくと，$\angle B=2\theta$

正弦定理より $\dfrac{BC}{\sin\theta}=\dfrac{AC}{\sin 2\theta}$，これと BC＝1 より，$AC=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$

よって，

$$\begin{aligned}AB&=BC\cos 2\theta+AC\cos\theta\\&=\cos 2\theta+2\cos^2\theta\\&=1+2\cos 2\theta\end{aligned}$$

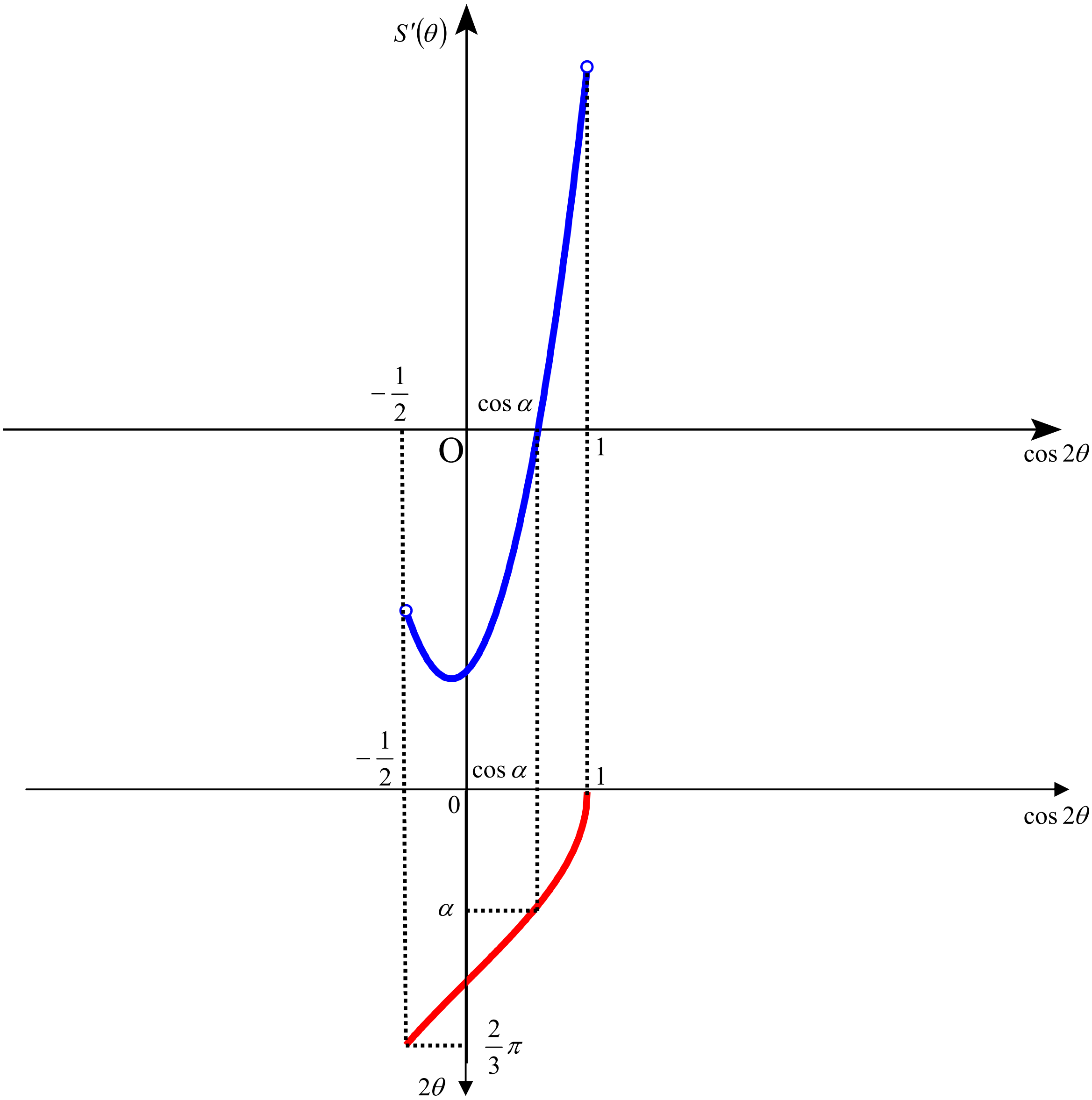
三角形 ABC の面積を $S(\theta)$ とすると，

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin 2\theta\\&=\frac{1}{2}(1+2\cos 2\theta)\sin 2\theta\\&=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+2\sin 2\theta\cos 2\theta)\\&=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+\sin 4\theta)\end{aligned}$$

ただし，$0<\theta+2\theta<\pi$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore S'(\theta)&=\cos 2\theta+2\cos 4\theta\\&=4\cos^2 2\theta+\cos 2\theta-2\\&=4\left(\cos 2\theta+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{33}{16}\end{aligned}$$

ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ より，$-\dfrac{1}{2}<\cos 2\theta<1$



これを横軸右方向に $\cos 2\theta$，縦軸上方向に $S'(\theta)$ をとってグラフにすると，上図の青色線，縦軸下方向に 2θ をとってグラフにすると，上図の赤色線になる。

ここで，$S'(\theta)=0$ となる $\cos 2\theta$ を $\cos\alpha$ とすると，図より，

$\cos\alpha<\cos 2\theta<1$ のとき，すなわち $0<2\theta<\alpha$ のとき $S'(\theta)>0$ より，$S(\theta)$ は単調に減少。

$-\frac{1}{2}<\cos 2\theta<\cos\alpha$ のとき，すなわち $\alpha<2\theta<\frac{2}{3}\pi$ のとき $S'(\theta)<0$ より，$S(\theta)$ は単調に増加。

よって，$2\theta=\alpha$ のとき，$S(\theta)$ すなわち三角形 ABC の面積が最大になる。

このとき，$S'(\theta)=0$ だから，$S'\left(\frac{\alpha}{2}\right)=4\cos^2\alpha+\cos\alpha-2=0$

これと $\cos\alpha>0$ より，$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$　よって，$AB=1+2\cos\alpha=\frac{3+\sqrt{33}}{4}$

10　極値をもつ条件

$f(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2+\sin x\cos x$　　$\therefore f'(x)=x+\cos 2x-a$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ において $f(x)$ が極大値と極小値もつための必要条件は，

$f'(x)=x+\cos 2x-a=0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ が異なる実数解を少なくとも 2 つもつことである。

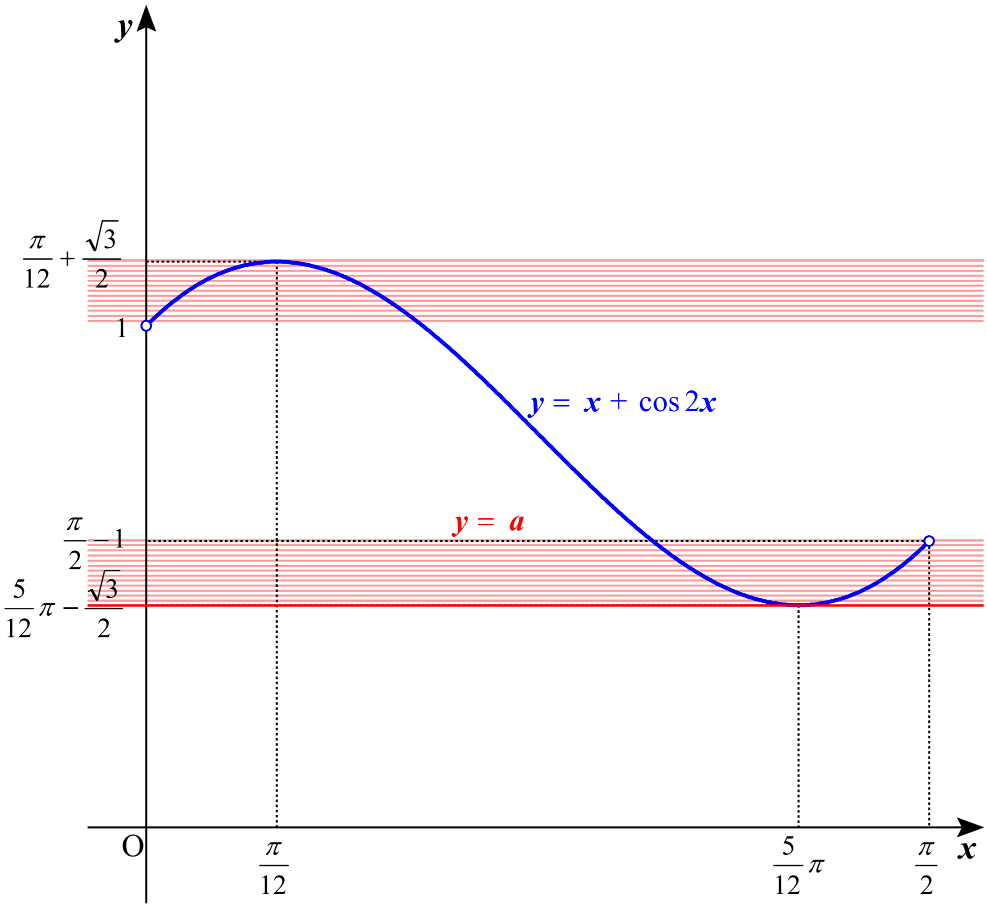
つまり，$y=x+\cos 2x$ と $y=a$ が $0<x<\frac{\pi}{2}$ において共有点を少なくとも 2 つもつことである。

$y'=1-2\sin 2x$ より，$1-2\sin 2x=0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ の解は，　$x=\frac{\pi}{12},\frac{5}{12}\pi$ であり，

その増減は，次のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5}{12}\pi$		$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\uparrow$	$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	$\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow$	$\frac{\pi}{2}-1$

次に，これをグラフに表し，$y=a$ と共有点が 2 つ以上存在するときの a の範囲を調べる。



図より，$y=a$ と共有点が 2 つ以上存在するときの a の範囲は,

$1<a<\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ または $\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\pi}{2}-1$

次に，$1<a<\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ のときの $y=a$ との共有点の x 座標を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

図より，

$0<x<\alpha$ のとき $x+\cos 2x<a$　$\therefore f'(x)=x+\cos 2x-a<0$

$\alpha<x<\beta$ のとき $x+\cos 2x>a$　$\therefore f'(x)=x+\cos 2x-a>0$

$\beta<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $x+\cos 2x<a$　$\therefore f'(x)=x+\cos 2x-a<0$

よって，このとき，$f(x)$ は $=\alpha$ で極小値，$x=\beta$ で極大値をとる。

ゆえに，$1<a<\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ は,

$0<x<\frac{\pi}{2}$ において $f(x)$ が極大値と極小値もつための必要十分条件である。

$\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\pi}{2}-1$ についても同様にすることにより，

必要十分条件であることが示される。

以上より，

$1<a<\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ または $\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\pi}{2}-1$

15　不等式への応用／関数の増減の活用

(イ)

別解（途中から）：$a=e^{\log a}$ を活用する。

$\pi^e=e^{\log \pi^e}=e^{e\log\pi}$ より，

$\pi^e<e^\pi \Leftrightarrow e\log\pi<\pi \Leftrightarrow e\log\pi\times\frac{1}{e\pi}<\pi\times\frac{1}{e\pi} \Leftrightarrow \frac{\log\pi}{\pi}<\frac{1}{e} \Leftrightarrow f(\pi)<f(e)$

16　不等式への応用／文字定数入り

16 演習題

別解

$x=0$ のとき

左辺$=1+c\cdot 0$ より，$\cos 2x+cx^2\geq 1$ が任意の c で成り立つ。

$x\neq 0$ のとき

$$\cos 2x+cx^2\geq 1 \Leftrightarrow c\geq \frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}$ とおくと，

$\sin^2 x=\sin^2(x+n\pi)$，$x^2<(x+n\pi)^2$ （$n=1,2,\cdots$）より，$\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}>\dfrac{2\sin^2(x+n\pi)}{(x+n\pi)^2}$

$0<\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$ とすると $\sin^2\alpha=\sin^2(\pi-\alpha)$，$\alpha^2<(\pi-\alpha)^2$ より，$\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}>\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)}{(\pi-\alpha)^2}$

よって，すべての実数 x について $c\geq f(x)$ が成り立つ定数 c の範囲を求めるに当たり，

$0<x\leq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減について調べればよい。

$$f'(x)=\frac{4\sin x\cos x\cdot x^2-4x\sin^2 x}{x^4}$$
$$=\frac{4x\sin x\cos x-4\sin^2 x}{x^3}$$
$$=\frac{4\sin x\cos x(x-\tan x)}{x^3}$$

ここで，$0<x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{4\sin x\cos x}{x^3}>0, x-\tan x<0$

$\therefore f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は $0<x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において単調減少する。

これと $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to+0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$ より，

$f(x)<2$

よって，求める c の値の範囲は，$c\geq 2$

17　不等式への応用／凸性の活用

(1)

別解：平均値の定理を利用

（ｉ） $t=0$ または $t=1$ のとき，

$f((1-t)a+tb)=(1-t)f(a)+tf(b)$ が成り立つ。

（ⅱ） $0<t<1$ のとき

$f''(x)>0$ より，$f'(x)$ は単調増加するから，$x_1<x_2$ ならば $f'(x_1)<f'(x_2)$　・・・①

題意より，$f(x)$ は実数全体で微分可能で，$a<(1-t)a+tb<b$ より，

開区間 $(a,(1-t)a+b)$ において，

平均値の定理より，

$\dfrac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{\{(1-t)a+tb\}-a}=f'(c_1)$ かつ $a<c_1<(1-t)a+tb$ を満たす c_1 が存在する。

開区間 $((1-t)a+b,b)$ において，

平均値の定理より，

$\dfrac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{b-\{(1-t)a+tb\}}=f'(c_2)$ かつ $(1-t)a+tb<c_2<b$ を満たす c_2 が存在する。

$c_1<c_2$ と①より，

$f'(c_1)<f'(c_2)$，すなわち $\dfrac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{\{(1-t)a+tb\}-a}<\dfrac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{b-\{(1-t)a+tb\}}$ が成り立つ。

$$\therefore \frac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{t(b-a)}<\frac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}$$

$$\therefore \frac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{t}<\frac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{1-t}\qquad (\because b-a>0)$$

$$\therefore (1-t)\{f((1-t)a+tb)-f(a)\}<t\{f(b)-f((1-t)a+tb)\}\qquad (\because 0<t,\ 0<1-t)$$

$$\therefore f((1-t)a+tb)<(1-t)f(a)+tf(b)$$

（ｉ），（ⅱ）より，

$f((1-t)a+tb)\leq(1-t)f(a)+tf(b)$，等号が成り立つのは，$t=0$ または $t=1$ のとき

(2)

$f(x)=-\log x$ のとき，$f'(x)=-\dfrac{1}{x}$ より，$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$

よって，$y=f(x)=-\log x$ とし，これを xy 直交座標平面上に図示すると，
$y=f(x)$ のグラフは下に凸になる。

したがって，任意の 2 点 $(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を通る直線 $y=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$

と $y=f(x)$ について

$x_1<c<x_2$ のとき，常に $f(c)<\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(c-x_1)+f(x_1)$ が成り立つ。

これに $x_1=a$，$x_2=b$，$c=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}b$ を代入すると，

（c は閉区間 $[a,b]$ を 1 : 2 に内分する点である）

$$f\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left\{\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)-a\right\}+f(a)$$

$$\therefore f\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)<\frac{f(b)-f(a)}{3}+f(a)$$

$$\therefore -\log\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)<\frac{-\log b-(-\log a)}{3}+(-\log a)$$

$$\therefore \log\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)>\frac{\log b-\log a}{3}+\log a$$

$$\therefore \log\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)>\frac{2}{3}\log a+\frac{1}{3}\log b$$

$$\therefore \log\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)>\log a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$$

よって，$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}<\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}b$

比較する図形（定義域があるグラフ）を少なくとも 2 つ描いてから，
それらの図形の周を含む内部の点についての高さ（y の大きさ）比べればよい。

別解 1：平均値の定理

$f(x) = -\log x$ のとき，$f'(x) = -\dfrac{1}{x}$ より，$f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$

よって，$f'(x)$ $(x \neq 0)$ は単調増加する。　・・・①

ここで，$\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b$ は閉区間 $[a, b]$ を 1：2 に内分する点であるから，

$0 < a < \dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b < b$ が成り立ち，

さらに，開区間 $\left(a, \dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right)$ と開区間 $\left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b, b\right)$ において，

平均値の定理より，

$$\frac{-\log\left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right) - (-\log a)}{\left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right) - a} = \frac{1}{c_1} \quad \left(a < c_1 < \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right)$$

$$\frac{-\log b - \left\{-\log\left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right)\right\}}{b - \left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right)} = \frac{1}{c_2} \quad \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b < c_2 < b\right)$$

となる c_1 と c_2 がそれぞれ存在する。

これと①より，$\dfrac{1}{c_1} < \dfrac{1}{c_2}$ が成り立つから，

$$\frac{-\log\left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right) - (-\log a)}{\left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right) - a} < \frac{-\log b - \left\{-\log\left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right)\right\}}{b - \left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right)}$$

$$\therefore -\log\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right) + \log a < \frac{-\log b + \left(\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right)}{2}$$

$$\therefore -2\log\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right) + 2\log a < -\log b + \log\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right)$$

$$\therefore \frac{2}{3}\log a + \frac{1}{3}\log b < \log\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right)$$

よって，$a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} < \dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b$

別解 2：1 つの文字を変数扱いする（$f(x)=-\log x$ を利用しないで解く方法）

a を $0<x<b$ を満たす変数 x として証明しても問題ない。

$g(x)=b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}b$ とおくと，

$g'(x)=\frac{2}{3}b^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}$

$g''(x)=-\frac{2}{9}b^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{4}{3}}<0$ より，　$g'(x)$ は単調減少しかつ $g'(0)=-\frac{2}{3}<0$ だから，

$g(x)$ は単調減少する。

これと $g(0)=-\frac{1}{3}b<0$ より，

$0<x<b$ において，　$g(x)<0$

よって，　$b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}<\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}b$

ゆえに，開区間 $(0,b)$ 内の任意の x を a とおくと，　$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}<\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$ が成り立つ。

要するに，適当な関数をつくり，その振る舞いを調べるという方法で
結構利用価値が高い。
たとえば，

$b\geq a>0$ のとき，　$\log b-\log a\geq\frac{2(b-a)}{b+a}$ が成り立つことを証明せよ。

という問題の場合，

$\log b-\log a\geq\frac{2(b-a)}{b+a}$ を一見すると，平均値の定理が使えそうな気がするが，

実はうまくいかない。
このような場合，a か b のどちらかを変数扱いし，x とおいて，

たとえば，　$f(x)=\log x-\log a-\frac{2(x-a)}{x+a}$ とし，

$x\geq a>0$ のとき $f(x)\geq 0$ となることを $f'(x)$ や $f''(x)$ を利用して示せばよい。