積分（数式）

要点の整理

3・3　定積分の漸化式

部分積分は次数下げの積分として有効だから，積分漸化式をつくるのに適している。

部分積分を用いない漸化式 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ について

$$
\begin{aligned}
I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2 x\right) \tan^n x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \tan^n x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)' \tan^n x dx \\
&= \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

例題 2

(1)

別解：置換積分

$\sqrt{x^2+1} = t$ とおくと，$x^2 + 1 = t^2$ より，$xdx = tdt$

よって，$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{t} dt = \int_1^{\sqrt{2}} dt = [t]_1^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

別解の別解：大きい括りで置換する方が楽

$10^{x^2} = t$ とおくと，$x^2 \log 10 = \log t$ より，$2x \log 10 dx = \frac{dt}{t}$　$\therefore xdx = \frac{dt}{2t \log 10}$

よって，$\int_1^{\sqrt{2}} x10^{x^2} dx = \int_1^{\sqrt{2}} 10^{x^2} xdx = \int_{10}^{100} t \cdot \frac{dt}{2t \log 10} = \int_{10}^{100} \frac{dt}{2 \log 10} = \left[\frac{t}{2 \log 10} \right]_{10}^{100} = \frac{45}{\log 10}$

2　演習題

(1)

別解

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{3x^2}{x^3-1}+\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$$
$$=\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x-1}$$

より，

$$\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{3x^2}{x^3-1}+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=\log\left|x^3-1\right|+\log|x-1|+C$$
$$=\log\left|(x-1)(x^2+x+1)\right|+\log|x-1|+C$$
$$=2\log|x-1|+\log\left|x^2+x+1\right|+C$$

例題 5　置換積分／高度な置き換え

別解

$x+\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと，$2tx=t^2-1$

t は x の関数だから，両辺を x で微分すると，$2\dfrac{dt}{dx}\cdot x+2t=\dfrac{d(t^2-1)}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$

よって，$\dfrac{dt}{dx}\cdot x+t=t\cdot\dfrac{dt}{dx}$　$\therefore\dfrac{dt}{dx}(t-x)=t$　$\therefore dx=\dfrac{t-x}{t}dt$

慣れれば，$2dt\cdot x+2tdx=2tdt$ より，$dx=\dfrac{t-x}{t}dt$

$$\therefore\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{t-x}\cdot\frac{t-x}{t}dt=\int_1^{1+2}\frac{1}{t}dt=\left[\log t\right]_1^{1+\sqrt{2}}=\log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

例題 7　部分積分／指数×三角関数(対数関数)^2

(2)　別解

$\log x = t$ とおくと，$x = e^t$，$dx = e^t dt$ より，

$$\int (\log x)^2 dx = \int t^2 e^t dt$$
$$= t^2 e^t - \int 2te^t dt$$
$$= t^2 e^t - 2te^t + \int 2e^t dt$$
$$= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t$$
$$= e^t (t^2 - 2t + 2) + C$$

これと $x = e$ のとき $t = 1$，$x = 1$ のとき $t = 0$ より，

$$\int_1^e (\log x)^2 dx = \left[e^t (t^2 - 2t + 2) \right]_0^1$$
$$= e - 2$$

例題 8　三角関数の積分／$\{f(x)\}^k f'(x)$ 型，積和公式

8 演習題

(2)

別解

$$\frac{1}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$
$$= (\tan x)' \cdot \frac{1}{\cos x}$$

より，

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int (\tan x)' \cdot \frac{1}{\cos x} dx$$
$$= \tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \int \tan x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} \right)' dx$$
$$= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \tan x \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1}{\cos^3 x} dx + \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\tan x}{\cos x} + \int \frac{1}{\cos x} dx \right)$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx \\
&= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|1+\sin x| - \log|1-\sin x|\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x}dx &= \frac{1}{2}\left[\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}
\end{aligned}
$$

例題 9　三角関数の積分／$\tan\frac{x}{2}=t$ とおく

(1)

別解

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=t \text{ より，}\quad \sin\frac{x}{2}=t\cos\frac{x}{2}$$

$$\therefore \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2t\cos^2\frac{x}{2}=2t\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\therefore \cos x=-1+2\cos^2\frac{x}{2}=-1+\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=-1+\frac{2}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

例題 10　積分区間の中線に関して互いに対称な関数の定積分値は等しい

別解 1

点 $(x, xf(\sin x))$ と積分区間 $[0, \pi]$ の中線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称な点を

$(X, g(X))$ とすると，$\dfrac{x+X}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ より，$x = \pi - X$

これと $g(X) = xf(x)$ より，$g(X) = (\pi - X)f(\sin(\pi - X)) = (\pi - X)\sin X$

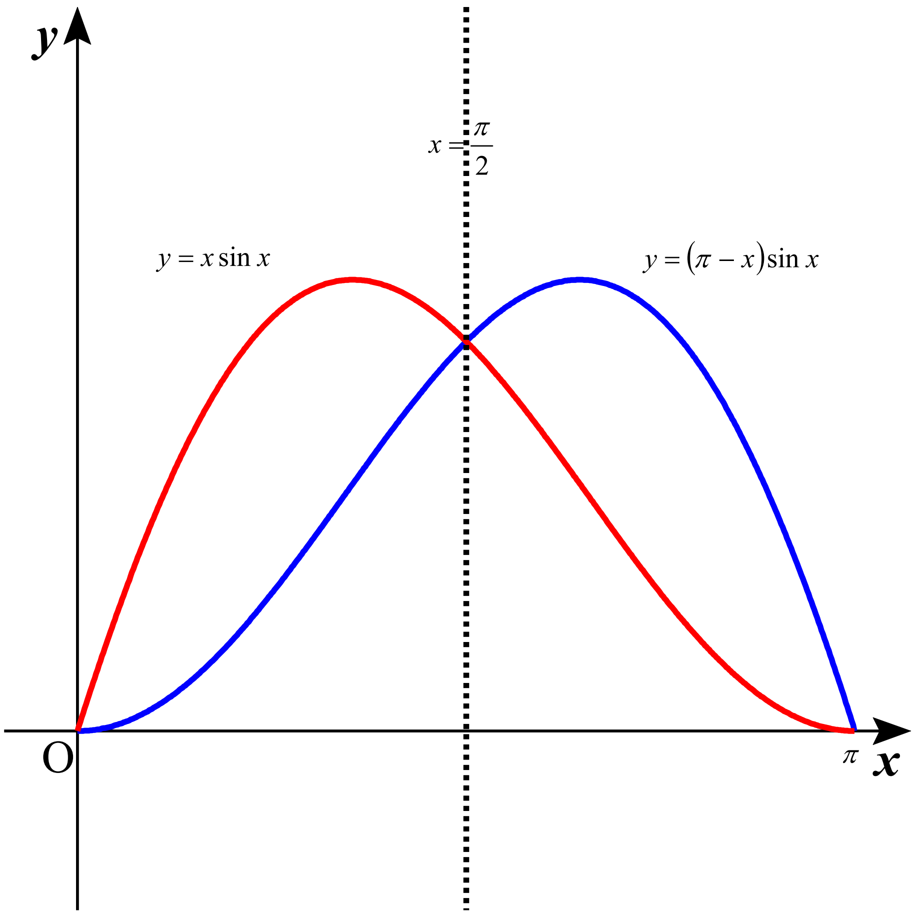
ここで，X を x に書き改めることにより，$g(x) = (\pi - x)f(\sin x)$

これより $y = xf(\sin x)$ と $y = (\pi - x)f(\sin x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称である。

よって，$\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \int_0^\pi (\pi - x)f(\sin x)dx$　$\displaystyle\therefore \int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi xf(\sin x)dx$

ゆえに，$\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

たとえば，$f(x) = \sin x$ とすると，下図のようになる。



別解 2

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(\sin x)dx$$

ここで，$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(\sin x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(\cos t)dt$$

$g(t)=tf(\cos t)$ とおくと，$g(-t)=-tf(\cos t)=-g(t)$ より，$g(t)$ は奇関数である。

よって，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(\cos t)dt=0$

ゆえに，$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

補足：問題の意義

$y=f(x)$ と積分区間 $[0,2a]$ の中線に関して対称な関数は $y=f(2a-x)$ だから，

$$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^{2a} f(2a-x)dx$$

また，これより $\displaystyle\int_0^{2a} f(x)dx=\frac{\int_0^{2a} f(x)dx+\int_0^{2a} f(2a-x)dx}{2}$

よって，$\displaystyle\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^{2a} f(2a-x)dx=\frac{\int_0^{2a} f(x)dx+\int_0^{2a} f(2a-x)dx}{2}$ が成り立つ。

たとえば，$\displaystyle\int_0^{2a} f(x)dx$ の値が求められないとか求めにくい場合，

$\displaystyle\int_0^{2a} f(2a-x)dx$　または　$\displaystyle\frac{\int_0^{2a} f(x)dx+\int_0^{2a} f(2a-x)dx}{2}$ を使うと楽に求められることがある。

例題 18　定積分数列／無限級数の和

(3) 補足

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx\right| = \left|(-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

18　演習題

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k = {}_n\mathrm{C}_0 x^0 + {}_n\mathrm{C}_1 x^1 + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \ldots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$ が $x=0$ で成り立つとき，

$1 = {}_n\mathrm{C}_0 0^0 + {}_n\mathrm{C}_1 0^1 + {}_n\mathrm{C}_2 0^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n 0^n$

ここで，$0^0 = 1$，$0^k = 0$（$k \neq 0$）と定義する。

(1)

$x=0$ のとき

与式＝0

$x=\pm 1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \\ &= \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} \\ &= \frac{1+(-1)^{n+2}}{2} \\ &= \frac{1+(-1)^n}{2}\end{aligned}$$

よって，与式＝$\dfrac{(-1)^n}{2}$

$x \neq 0$ かつ $x \neq \pm 1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(-x^2\right)^{k-1} \\ &= \frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1-\left(-x^2\right)} \\ &= \frac{1+(-1)^{n+2}x^{2n+2}}{1+x^2} \\ &= \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\end{aligned}$$

よって，与式＝$\dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

これは $x=0,\pm 1$ のときも成り立つ。

以上より，$\dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

(2)

(1)より，$\displaystyle\int_0^1 \left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2}\right\}dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$

これと

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2}\right\}dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k \int_0^1 x^{2k}dx\right\} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1\right\} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

より，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

$$\therefore \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

また，$\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ より $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq \int_0^1 x^{2n+2}dx = \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+3}$

よって，$\displaystyle\therefore \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$

補足

$$\int_b^a \sum_{k=0}^{n} f(k)\{g(x)\}^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} \left[f(k)\int_b^a \{g(x)\}^k \, dx \right]$$

証明

$$\begin{aligned}
\int_b^a \sum_{k=0}^{n} f(k)\{g(x)\}^k \, dx &= \int_b^a \left[f(0)\{g(x)\}^0 + f(1)\{g(x)\}^1 + f(2)\{g(x)\}^2 + \cdots + f(n)\{g(x)\}^n \right] dx \\
&= f(0)\int_b^a \{g(x)\}^0 \, dx + f(1)\int_b^a \{g(x)\}^1 \, dx + f(2)\int_b^a \{g(x)\}^2 \, dx + \cdots + f(n)\int_b^a \{g(x)\}^n \, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[f(k)\int_b^a \{g(x)\}^k \, dx \right]
\end{aligned}$$