積分（面積）

例題 4　直線図形の活用

(2)

$S=\frac{a}{2}\log|\tan\beta|-\frac{a}{2}\log|\tan\alpha|$ （a と α は定数）より，

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{d\beta}&=\frac{d}{d\beta}\left\{\frac{a}{2}\log(\tan\beta)-\frac{a}{2}\log(\tan\alpha)\right\}\\
&=\frac{a}{2}\cdot\frac{d\log(\tan\beta)}{d\beta}\\
&=\frac{a}{2}\cdot\frac{d\log(\tan\beta)}{d\tan\beta}\cdot\frac{d\tan\beta}{d\beta}\\
&=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\tan\beta}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}\\
&=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}\\
&=\frac{a}{2\sin\beta\cos\beta}\\
&=\frac{a}{\sin 2\beta}
\end{aligned}
$$

わかりやすくすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{d\beta}&=\frac{d}{d\beta}\left\{\frac{a}{2}\log(\tan\beta)-\frac{a}{2}\log(\tan\alpha)\right\}\\
&=\frac{a}{2}\cdot\frac{d\log(\tan\beta)}{d\beta}\\
&=\frac{a}{2}\cdot\frac{d\log(\tan\beta)}{d\tan\beta}\cdot\frac{d\tan\beta}{d\beta}
\end{aligned}
$$

ここで，$\tan\beta=X$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{2}\cdot\frac{d\log X}{dX}\cdot\frac{d\tan\beta}{d\beta}&=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{X}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}\\
&=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\tan\beta}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}\\
&=\frac{a}{\sin 2\beta}
\end{aligned}
$$

よって，$\frac{dS}{d\beta}=\frac{a}{\sin 2\beta}$

研究の解説：極座標の利用

半直線 $L(\beta)$ 上の任意の点 (x, y) は，原点からの距離 r と β を用いて，$\begin{cases} x = r\cos\beta \\ y = r\sin\beta \end{cases}$ と表せる。

よって，半直線 $L(\beta)$ と $xy = a$ との交点は，$r^2\cos\beta\sin\beta = a$ を満たす。

$$\lim_{\Delta\beta\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\beta} = \frac{dS}{d\beta} = \frac{\frac{1}{2}r^2 d\beta}{d\beta} = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{a}{\sin 2\beta}$$

$\Delta\beta$ が非常に小さいときの S は扇形の面積と等しいとしてよい。

補足

極表示の面積公式を使って面積を求める手順

1. $f(x, y) = 0$ または $y = f(x)$ に $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を代入して，$r = g(\theta)$ または $r^2 = h(\theta)$ を得る。
2. $dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\{g(\theta)\}^2 d\theta$ または $dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}h(\theta)d\theta$ を積分して面積を得る。

4　演習題

(2)

$$mx - \frac{x}{x^2+1} = \frac{mx^3 + (m-1)x}{x^2+1} = \frac{x(mx^2 + m - 1)}{x^2+1}$$

より，$mx^2 + m - 1 = 0$ が $x > 0$ の解をもつような実数 m の範囲を求めればよい。

$m = 0$ とすると，$0 + 0 - 1 = 0$ となるので不適。

$m = 1$ とすると，$x = 0$ となるので不適。

よって，$m \neq 0$，$m \neq 1$ であり，これより $x^2 = \frac{1-m}{m} > 0$　$\therefore m(1-m) > 0$　$\therefore 0 < m < 1$

このとき，解の 1 つは $\sqrt{\frac{1-m}{m}} > 0$ となるので，$mx - \frac{x}{x^2+1} = 0$ は $x > 0$ の解をもつ。

例題 7　面積の最大・最小

7　演習題

(2)

補足：$\sin t - t\cos t$ （$0 < t < \pi$ ）について

$f(t) = \sin t - t\cos t$ とおくと，$f'(t) = t\sin t > 0$ （$\because 0 < t < \pi$ ）

これと $f(0) = 0$ より，$0 < t < \pi$ において，$f(t) > 0$

よって，$\sin t - t\cos t > 0$ （$0 < t < \pi$ ）

例題 9　面積の数列・級数

(2)

解答の解説補足

S_n の積分区間を π だけ進めると S_{n+1} の積分区間になるから，

S_n から S_{n+1} の式をつくるのなら， x の位相を π だけ進めればよい。

つまり， $t=x+\pi$ とおいて S_n を置換積分すればよい。

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^x|\sin x|dx \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{t-\pi}|\sin(t-\pi)dt| \\
&= e^{-\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^t|\sin t|dt \\
&= e^{-\pi}S_{n+1}
\end{aligned}$$

別解

$$\left(e^x \sin x\right)' = e^x \sin x + e^x \cos x \quad \cdot\cdot\cdot ① \qquad \left(e^x \cos x\right)' = -e^x \sin x + e^x \cos x \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

①−②より， $\left\{e^x(\sin x-\cos x)\right\}' = 2e^x \sin x \quad \therefore e^x \sin x = \frac{1}{2}\left\{e^x(\sin x-\cos x)\right\}'$

これと $y=\sin x$ は区間 $[(n-1)\pi, n\pi]$ において，常に負または正であることより，

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|e^x \sin x\right|dx \\
&= \left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^x \sin x dx\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}e^{n\pi}\cos n\pi - \frac{1}{2}e^{(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|e^{n\pi}(-1)^n - \frac{1}{2}e^{(n-1)\pi}(-1)^{(n-1)}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}e^{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{2}e^{(n-1)\pi}(-1)^n\right| \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{n\pi} + e^{(n-1)\pi}\right) \\
&= \frac{e^{\pi}+1}{2}\left(e^{\pi}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

よって，数列 $\{S_n\}$ は初項 $S_1 = \frac{e^{\pi}+1}{2}$，公比 e^{π} の等比数列である。

ゆえに， $S_2{}^2 - S_1S_3 = S_2{}^2 - \frac{S_2}{e^{\pi}}\cdot e^{\pi}S_2 = S_2{}^2 - S_2{}^2 = 0$

9　演習題

(1)

$f(x)=e^{-x}\sin x$ の区間 $[(k-1)\pi, k\pi]$ における面積を s_k とすると，$s_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|e^{-x}\sin x\right|dx$

ここで，

$\left(e^{-x}\sin x\right)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$　・・・①，$\left(e^{-x}\cos x\right)'=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$　・・・②

①＋②より，$\left(e^{-x}\sin x\right)'+\left(e^{-x}\cos x\right)'=-2e^{-x}\sin x$　$\therefore e^{-x}\sin x=\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right\}'$

$$
\begin{aligned}
\therefore s_k&=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right\}'\right|dx\\
&=\frac{1}{2}\left|\left[e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|e^{-k\pi}\cos k\pi-e^{(k-1)\pi}\cos(k-1)\pi\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|e^{-k\pi}(-1)^k-e^{-(k-1)\pi}(-1)^{k-1}\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|e^{-k\pi}(-1)^k+e^{-(k-1)\pi}(-1)^k\right|\\
&=\frac{1}{2}\left(e^{-k\pi}+e^{(k-1)\pi}\right)\\
&=\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-(k-1)\pi}\\
&=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\left(e^{-\pi}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore S(n)&=\sum_{k=1}^{n}s_k\\
&=\frac{s_1-s_{n+1}}{1-e^{-\pi}}\\
&=\frac{\frac{e^{-\pi}+1}{2}-\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}\\
&=\frac{\left(e^{-\pi}+1\right)\left(1-e^{-n\pi}\right)}{2\left(1-e^{-\pi}\right)}\\
&=\frac{\left(1+e^{\pi}\right)\left(1-e^{-n\pi}\right)}{2\left(e^{\pi}-1\right)}
\end{aligned}
$$

(2)

(1)より，$\lim_{n\to\infty}S(n)=\frac{1+e^{\pi}}{2\left(e^{\pi}-1\right)}$

例題 11　極表示された曲線

(1)

$\left(e^{-2t}\sin 2t\right)' = -2e^{-2t}\sin 2t + 2e^{-2t}\cos 2t$ より，　$e^{-2t}\cos 2t - e^{-2t}\sin 2t = \frac{1}{2}\left(e^{-2t}\sin 2t\right)'$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-2t}\cos 2t dt - \int_0^\pi e^{-2t}\sin 2t dt &= \int_0^\pi \left(e^{-2t}\cos 2t - e^{-2t}\sin 2t\right)dt \\ &= \int_0^\pi \left(e^{-2t}\sin 2t\right)' dt \\ &= \left[e^{-2t}\sin 2t\right]_0^\pi \\ &= 0\end{aligned}$$

ゆえに，　$\int_0^\pi e^{-2t}\sin 2t dt = \int_0^\pi e^{-2t}\cos 2t dt$