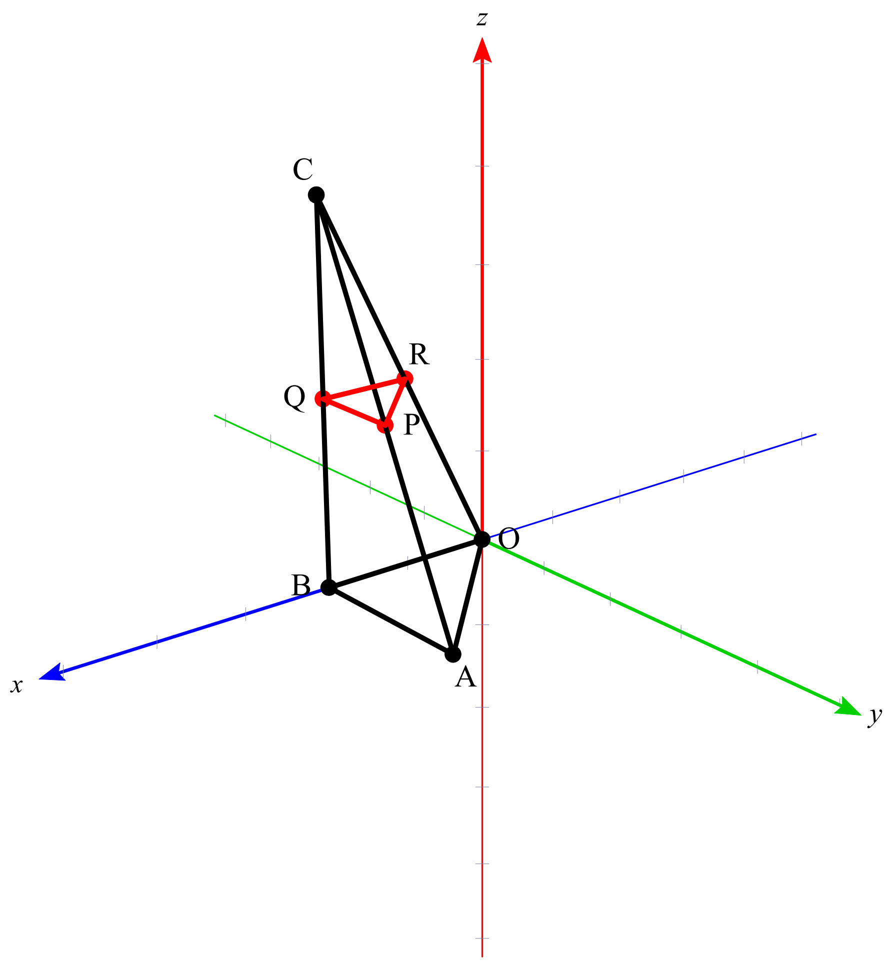
積分（体積）基本は，体積＝∫微小体積 ＝∫(適当な底面積×微小の高さ)

例題 8　立体の回転体／切るタイミング

解法のポイント

1. 立体を xy 平面に平行な平面で切ったときの切断面の頂点の座標を，
   原点を定点とする位置ベクトルの成分表示から求め，z で表す。
2. 切断面を z 軸のまわりに回転してできる平面の面積 $S(z)$ を求める。
3. 体積を $\int_{\beta}^{\alpha} S(z)dz$ から求める。



四面体 OABC を底面 OAB に平行な平面で切ったときの切り口の図形について考える。
切り口の頂点は辺 AC，BC，OC 上の点だから，それぞれの点を P，Q，R とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\1-s\\2s\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{P}(1,1-s,2s)$　$(0\le s\le 1)$　・・・①

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\\2t\end{pmatrix}$$

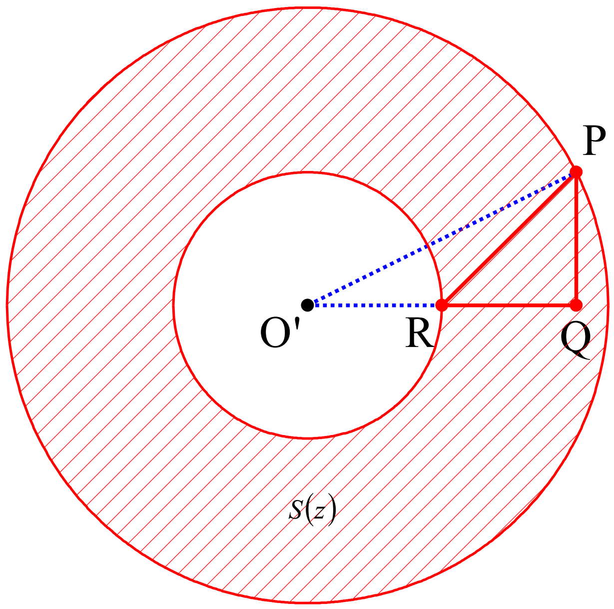
よって，$\mathrm{Q}(1,0,2t)$　$(0\le t\le 1)$　・・・②

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=u\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}u\\0\\2u\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{R}(u,0,2u)$　・・・③

①，②，③の z 座標が等しいから，$2s=2t=2u=z$ $(0\le z\le 2)$ とおくと，

$\mathrm{P}\left(1,1-\dfrac{z}{2},z\right)$，$\mathrm{Q}(1,0,z)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{z}{2},0,z\right)$



よって，四面体を z 軸のまわりに回転したとき，切り口が描く面積を $S(z)$ とすると，
図より，

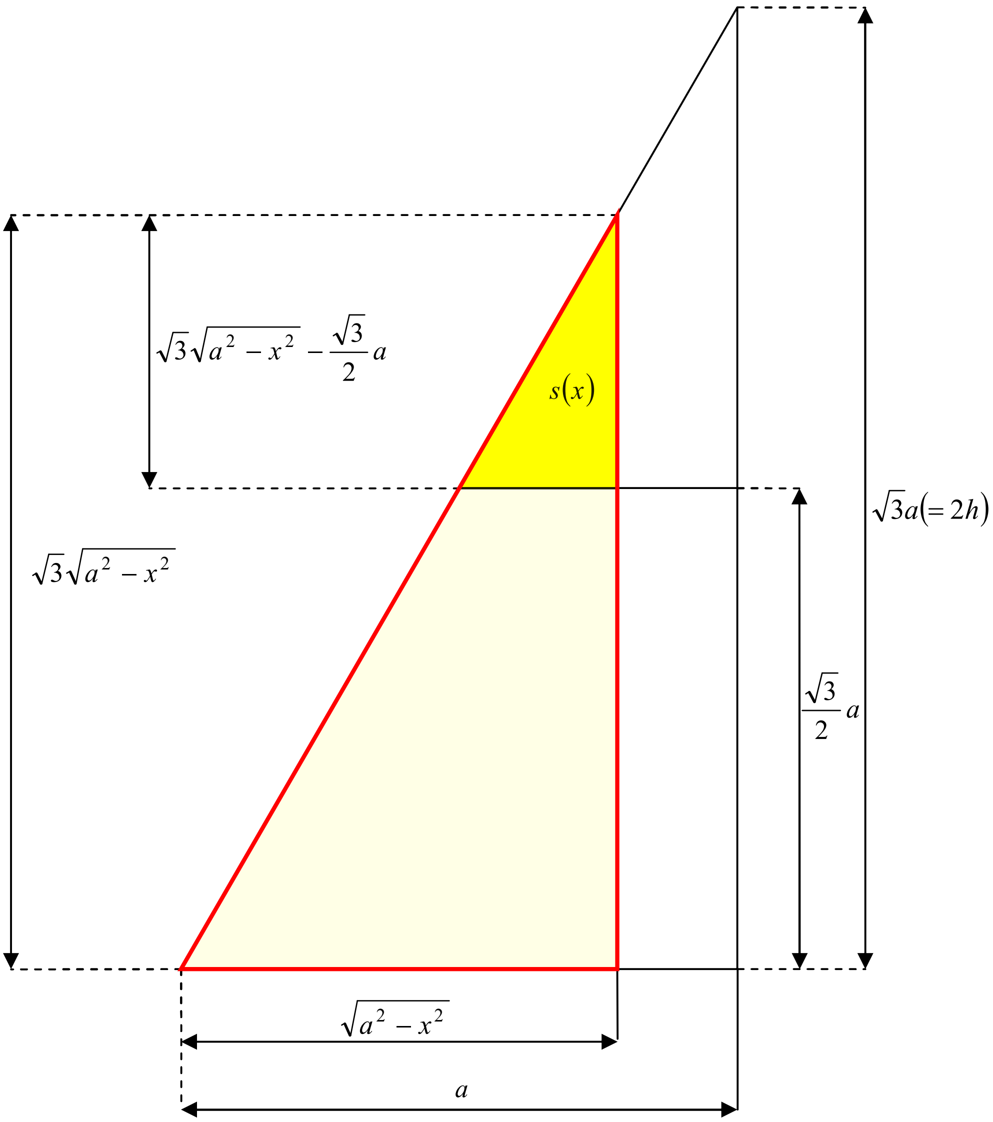
$$
\begin{aligned}
S(z) &= \pi \cdot \mathrm{O'P}^2 - \pi \cdot \mathrm{O'R}^2 \\
&= \pi\left(\mathrm{O'Q}^2 + \mathrm{QP}^2\right) - \pi \cdot \mathrm{O'R}^2 \\
&= \pi\left\{1^2 + \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2\right\} - \pi\left(\frac{z}{2}\right)^2 \\
&= \pi(2 - z)
\end{aligned}
$$

よって，求める体積は，

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 S(z)dz &= \int_0^2 \pi(2 - z)dz \\
&= \pi\left[2z - \frac{1}{2}z^2\right]_0^2 \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

例題 10　非回転体／円柱の一部

(2)の説明



任意の x における断面は上図の赤色実線で囲まれた直角三角形である。

この直角三角形の黄色で塗りつぶされた部分が高さ h の平面の上の部分の断面である。

赤色実線で囲まれた直角三角形の面積を $S(x)$，

黄色で塗りつぶされた直角三角形の面積を $s(x)$ とすると，

相似比から $s(x) \leq \frac{1}{4}S(x)$ であるのは明らかであり，

しかも，赤色実線で囲まれた直角三角形の高さ $\sqrt{3}\sqrt{a^2-x^2}$ が $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 以下になったとき，

すなわち $\frac{\sqrt{3}}{2}a \leq x \leq a$ のとき，$s(x)=0$ である。

よって，$\frac{V}{4}=\frac{1}{4}\cdot 2\int_0^a S(x)dx = 2\int_0^a \frac{1}{4}S(x)dx > 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} s(x)dx = V'$

補足

$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$ において，

赤色実線で囲まれた直角三角形と黄色で塗りつぶされた直角三角形の相似比は，

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{a^2-x^2}}=1-\frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

ここで，$\sqrt{a^2-x^2} \leq a$ より $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \geq \frac{1}{a}$

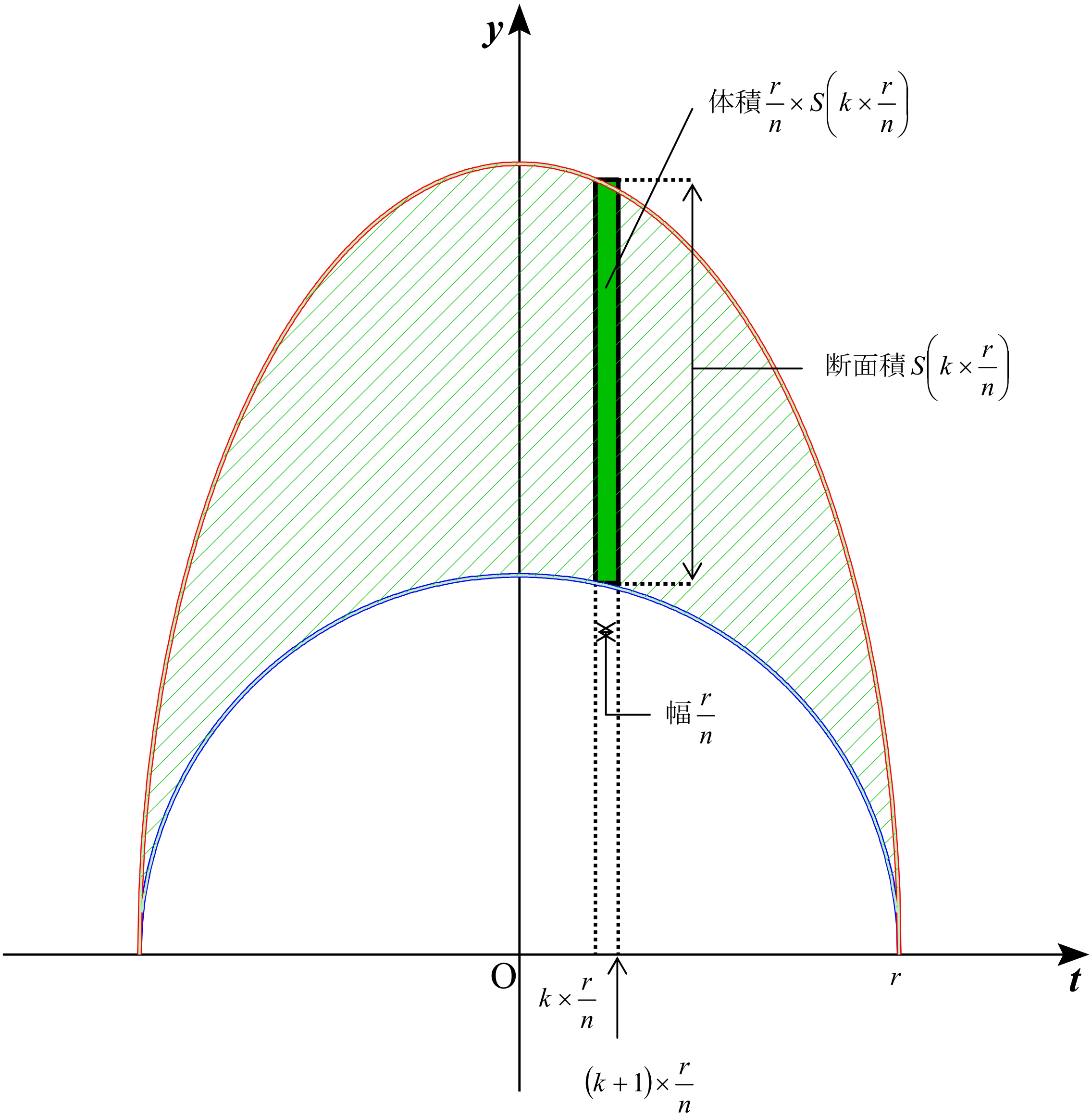
$$\therefore \frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}} \geq \frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore 1-\frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}} \leq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$s(x)=\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2 S(x) \leq \frac{1}{4}S(x)$$

10　演習題



$$\frac{V}{2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{r}{n}S\left(k\times\frac{r}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}S\left(\frac{r}{n}\right)+\frac{r}{n}S\left(\frac{2r}{n}\right)+\cdots+\frac{r}{n}S\left(\frac{kr}{n}\right)+\cdots+\frac{r}{n}S(r)$$

$$=\int_0^r S(t)dt$$

$$=\int_0 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta}+\theta-\frac{\pi}{2}\right)\left(r^2-t^2\right)dt$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\tan\theta}+\theta-\frac{\pi}{2}\right)r^3$$

$$\therefore V=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\tan\theta}+\theta-\frac{\pi}{2}\right)r^3$$

11　非回転体／2 つの立体の共通部分

非回転体の体積を求める手順

立体を xy 平面に平行な平面，yz 平面に平行な平面，zx 平面に平行な平面の
いずれか適当な平面で切る。
そうすれば，切断面の面積が，
xy 平面に平行な平面で切った場合，変数を z とする関数，たとえば $f(z)$ で，
yz 平面に平行な平面で切った場合，変数を x とする関数，たとえば $g(x)$ で，
zx 平面に平行な平面で切った場合，変数を y とする関数，たとえば $h(y)$ で表せるので，
体積を求める手続きが単純化され，効率的である。
それが無理あるいは軸が与えられていないならば，
軸を新たに設定し，上と同様の操作を行う。

↓

切断面の面積を求める。

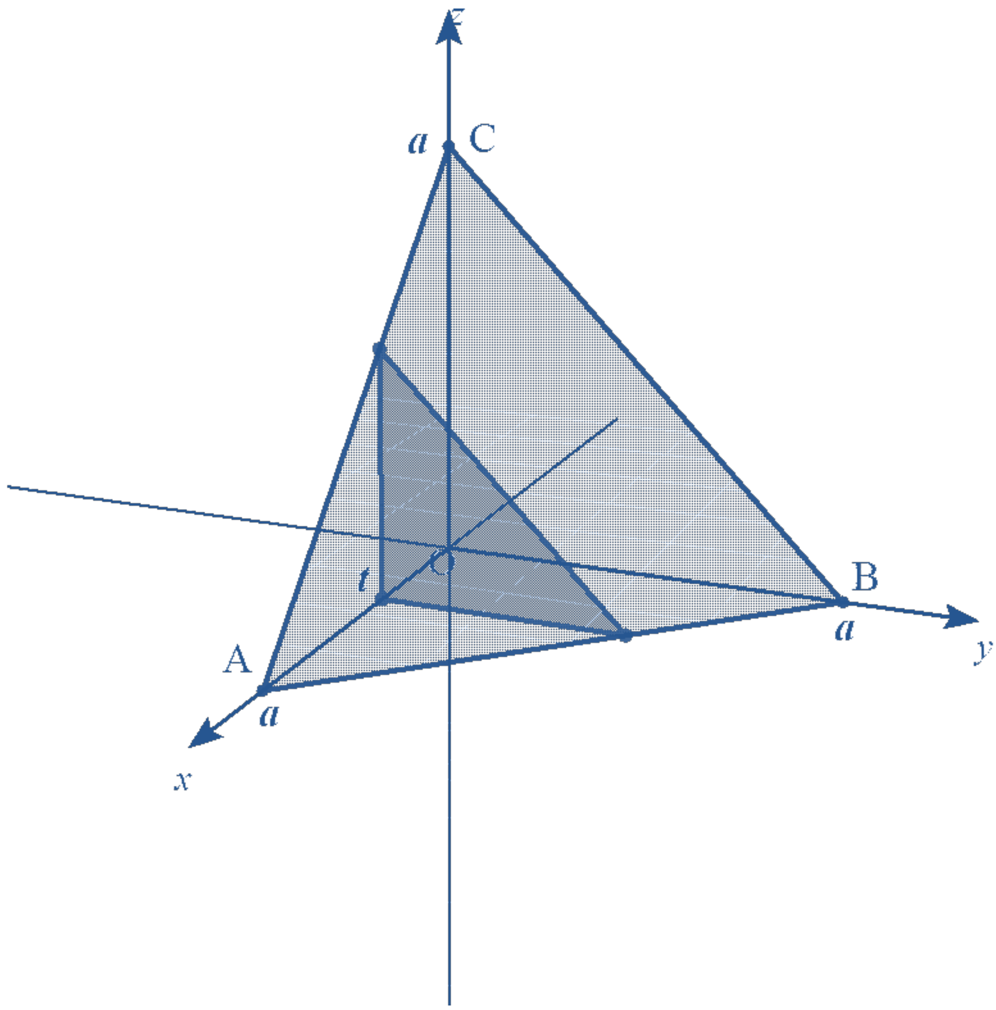
↓

積分し，体積を求める。

問題の場合は，yz 平面に平行な平面で切った切断面の面積を，
誘導上，x の関数 $S(x)$ とはせず，$x=t$ とおき，$S(t)$ としている。
誘導なしならば，$S(x)$ で扱い，

$V=\int_{\beta}^{\alpha}S(x)dx$ とした方が解法の筋が理解されやすい気がする。

(1)



平面 α と平面 $x=t$ が xy 平面と交わる点の座標

　直線 AB の式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$ より，　$x+y=a \ (z=0)$

　よって，平面 $x=t$ との交点の座標は，$(t, a-t, 0)$

平面 α と平面 $x=t$ が xz 平面と交わる点の座標

　直線 AC の式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{a}=1$ より，　$x+z=a \ (y=0)$

　よって，平面 $x=t$ との交点の座標は，$(t, 0, a-t)$

補足：知っておくと便利

x 軸切片が a，y 軸切片が b の直線の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a$ と b は 0 でない実数）

証明

$\mathrm{A}(a,0)$，$\mathrm{B}(0.b)$を通る直線の方程式は，$y=-\dfrac{b}{a}x+b$

$\therefore \dfrac{b}{a}x+y=b$

$\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

あるいは,

$\mathrm{A}(a,0)$，$\mathrm{B}(0.b)$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$より，その法線ベクトルの 1 つは$\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}$である。

よって，直線 AB は$bx+ay=c$と表せる。

これが点$\mathrm{A}(a,0)$を通ることより，$ba+0=c$

よって，$bx+ay=ab$　$\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

x 軸切片が a，y 軸切片が b，z 軸切片が c の平面の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$（$a,b,c$ は 0 でない実数）

証明

$\mathrm{A}(a,0,0)$，$\mathrm{B}(0.b,0)$，$\mathrm{C}(0,0,c)$を通る平面の方程式を $px+qy+rz=s$ とすると,

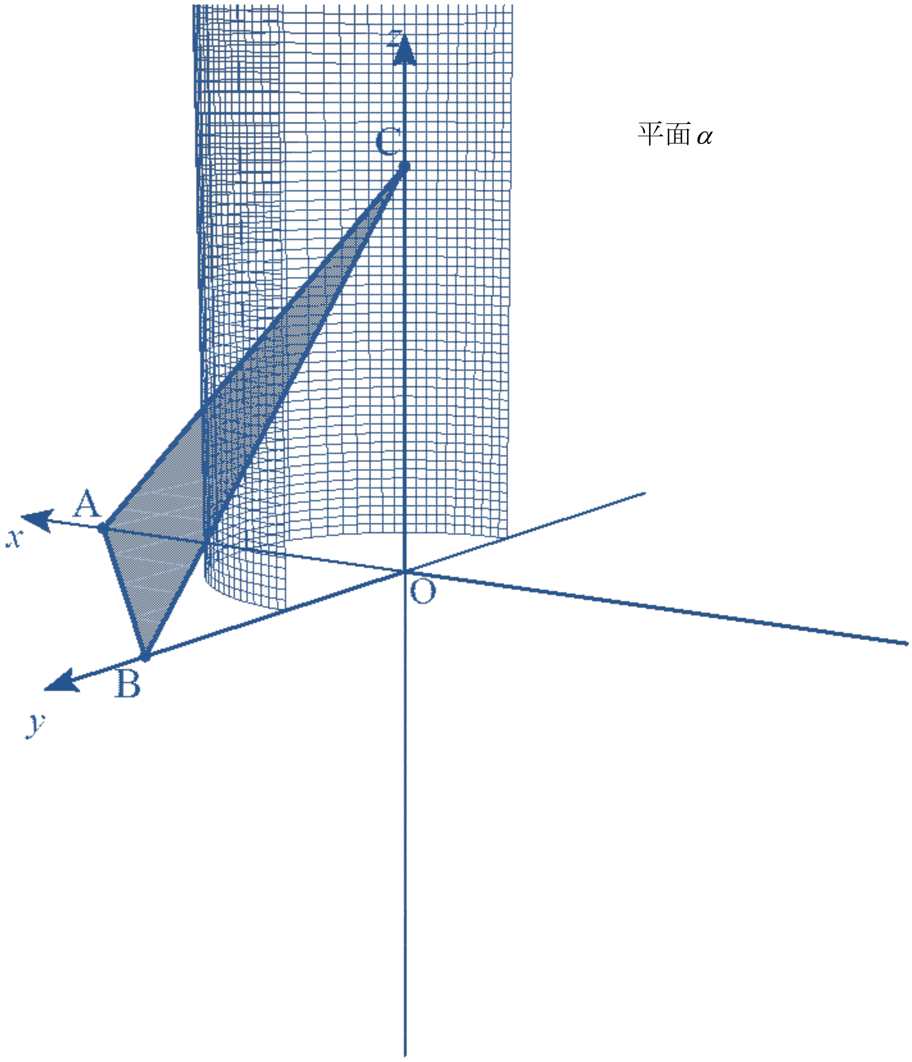
$pa=qb=rc=s$ より，$p=\dfrac{s}{a},q=\dfrac{s}{b},r=\dfrac{s}{c}$　$\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

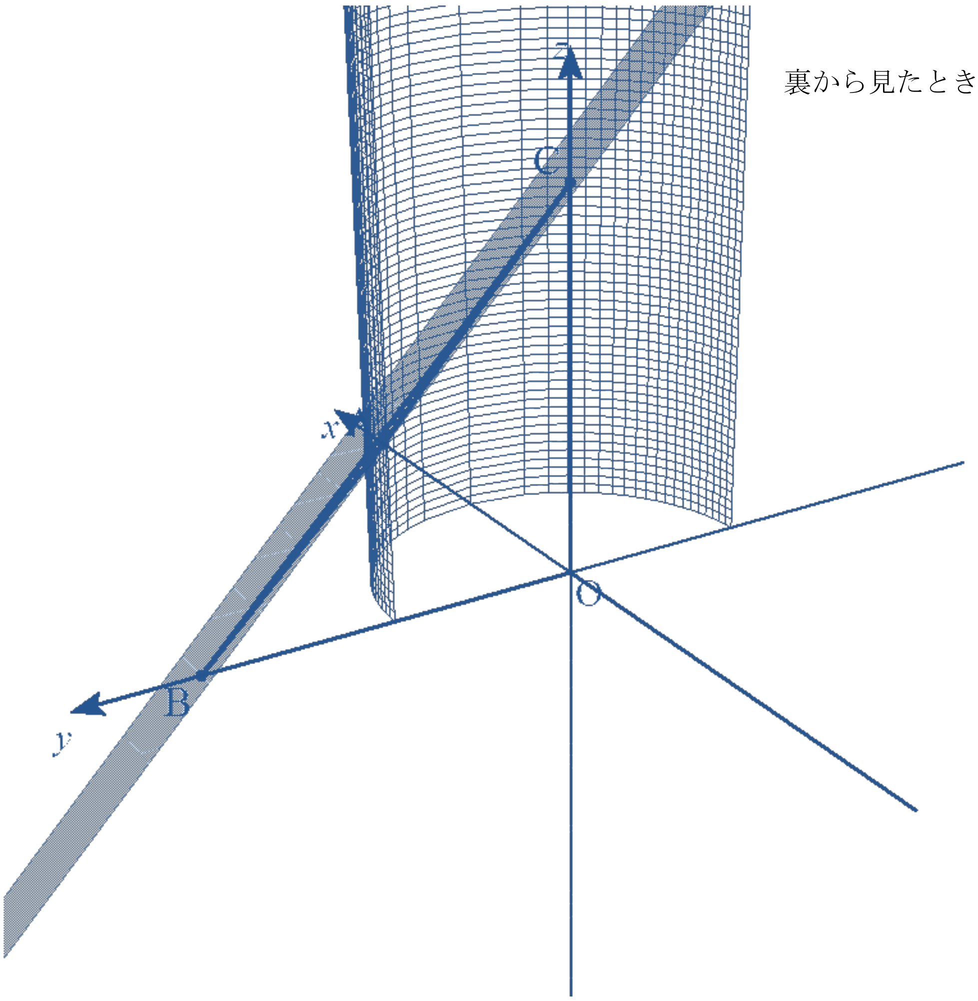
参考

数学小ネタの部屋 http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukoneta.html

平面図形・図形と式・ベクトル「切片と直線の方程式・平面の方程式」

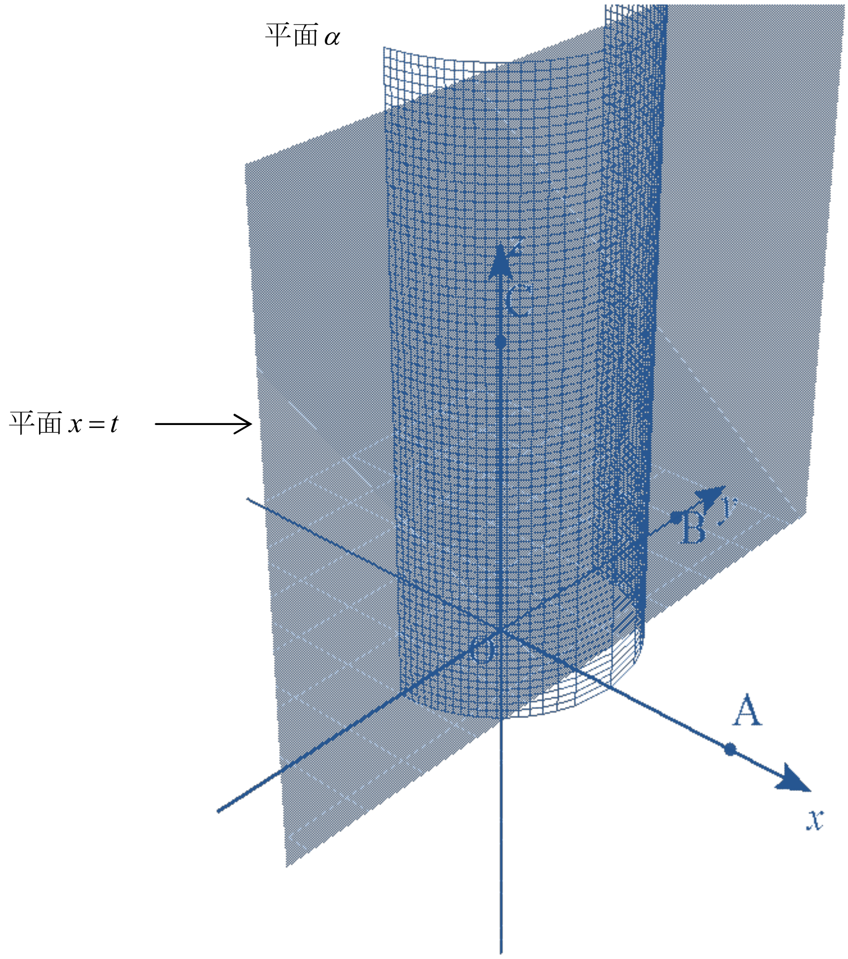
(2)



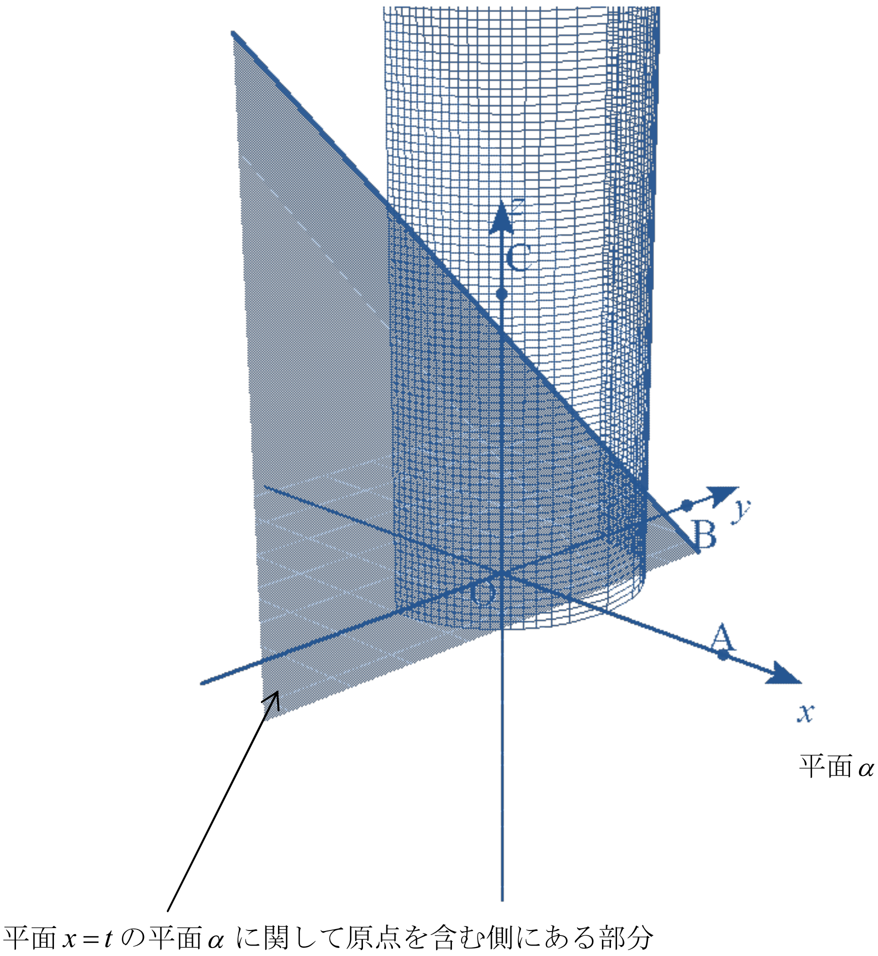


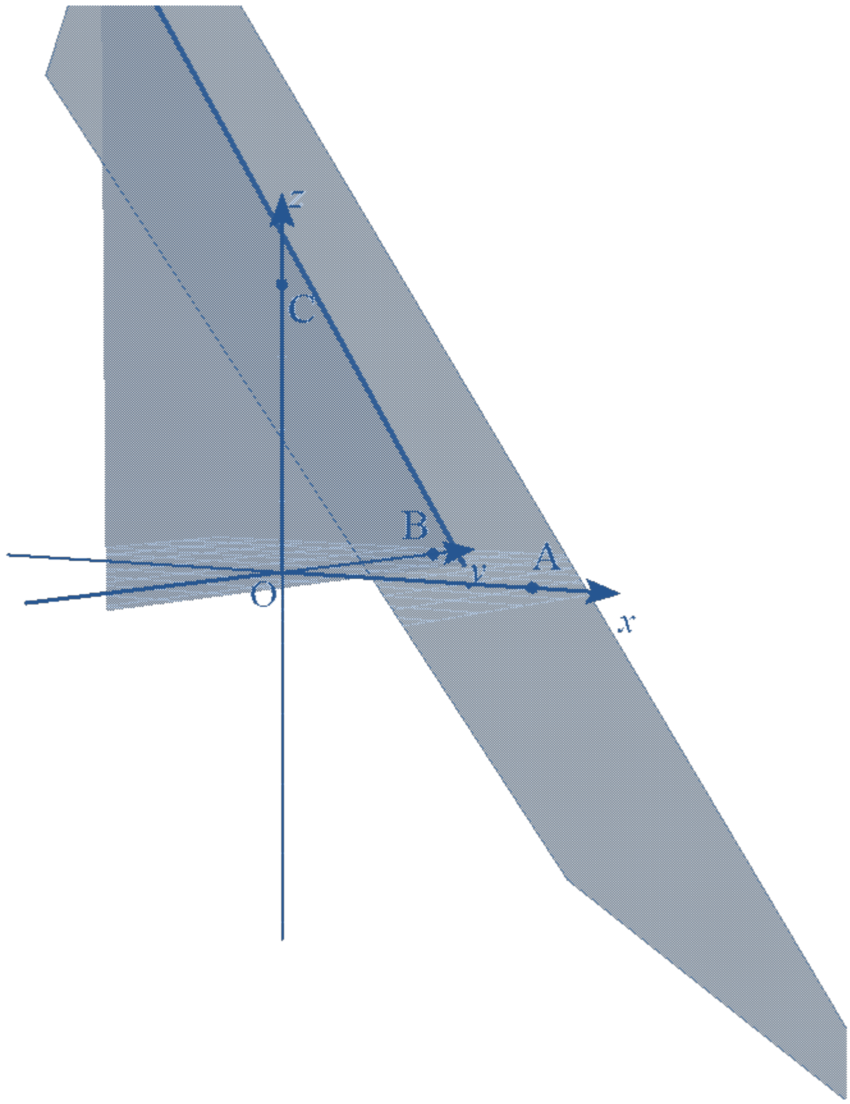
裏から見たとき

平面 $x = t$ で切る。

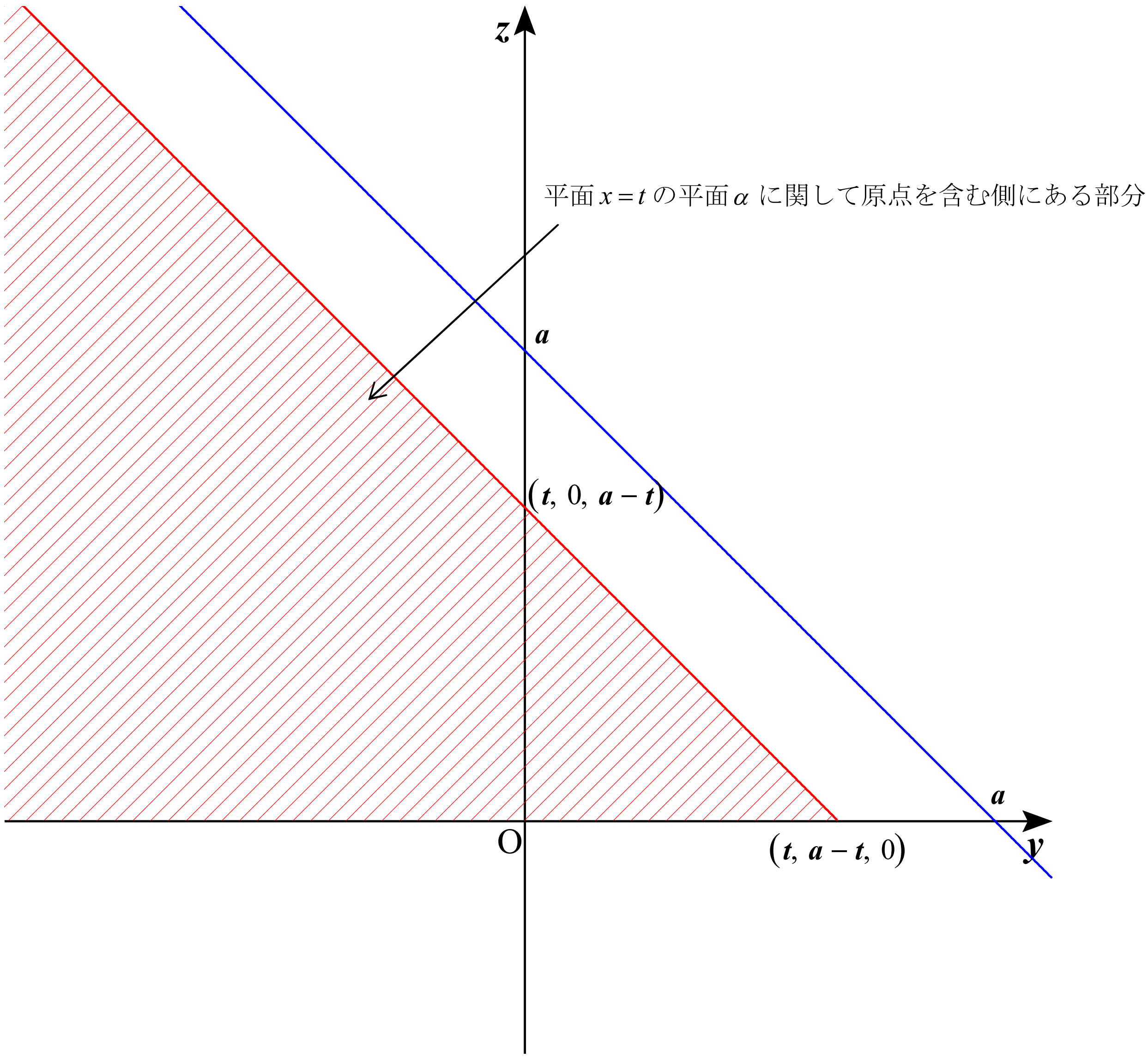


立体 M は平面 α に関して原点を含む側にあるから，
平面 $x=t$ の平面 α に関して原点を含む部分による切断面を考えればよい。
平面 $x=t$ の平面 α に関して原点を含む側にある部分について

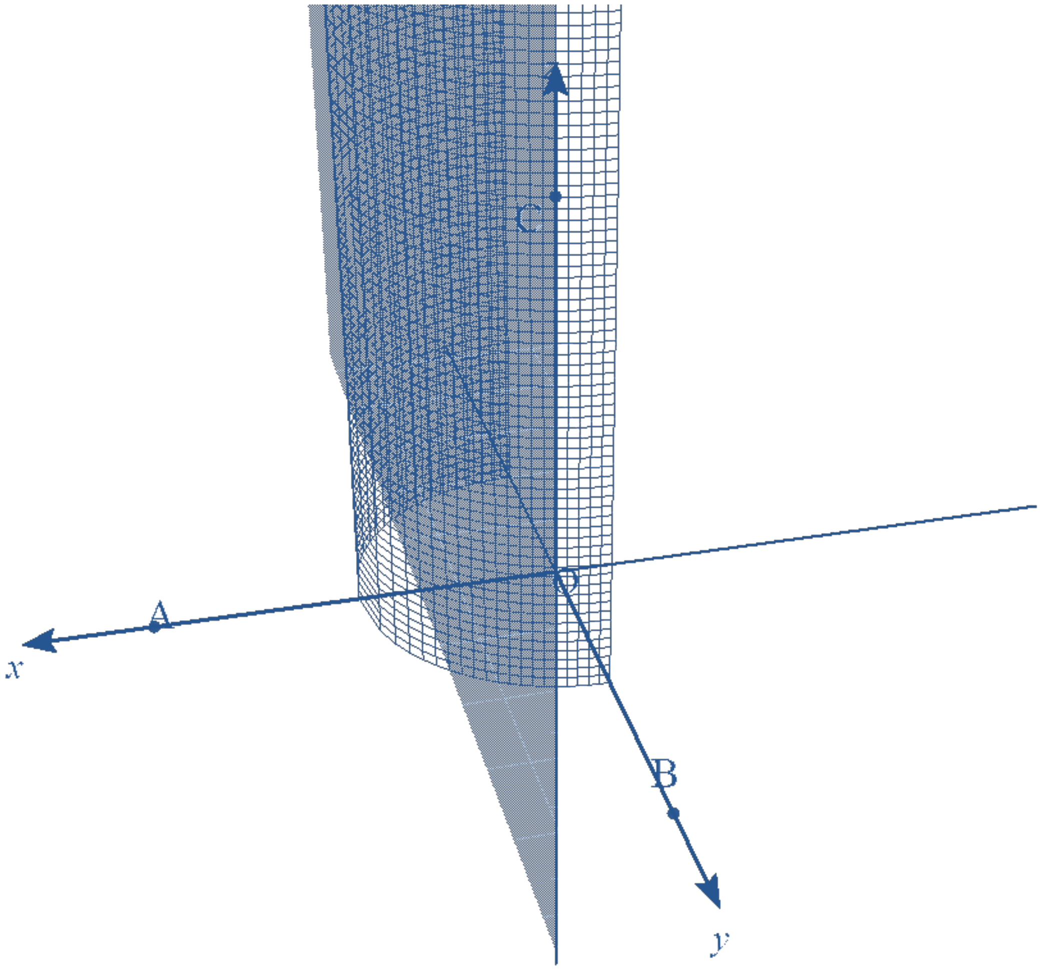



z
C
B
y
A
O
x

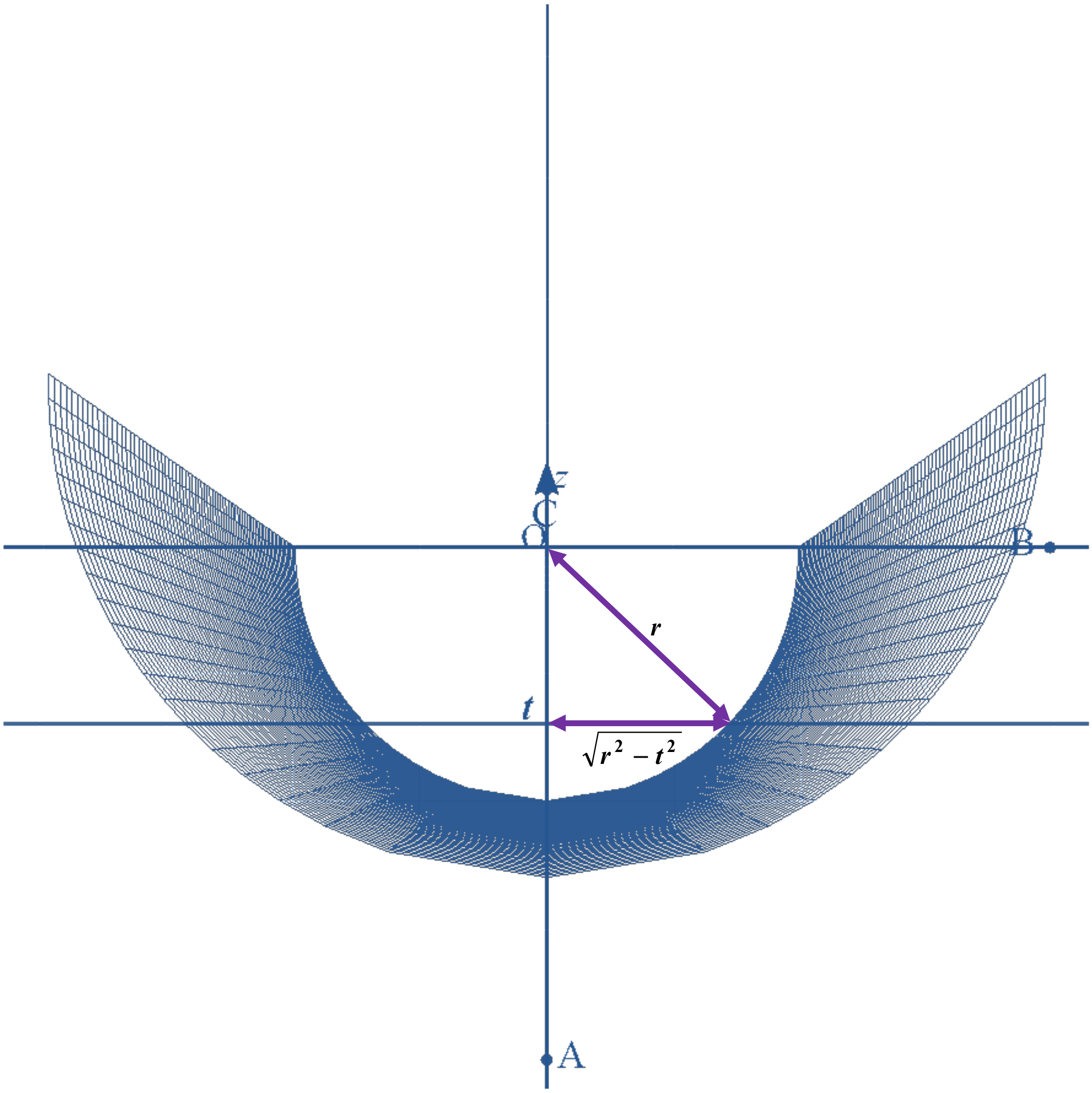
x 軸方向から見た平面 $x=t$ の平面 α に関して原点を含む側の部分・・・①



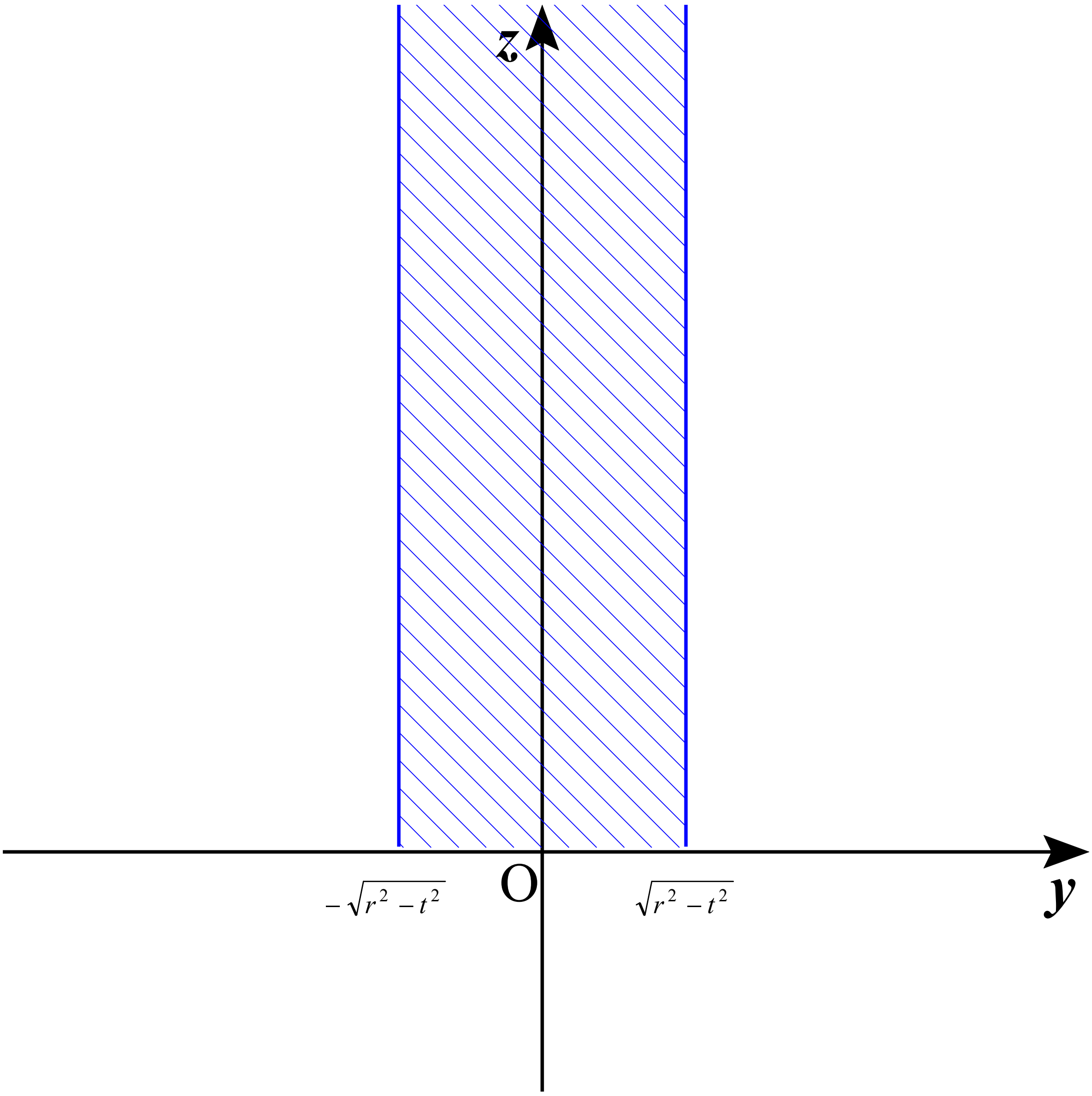
半径 r の半円柱の $x=t$ による切り口について



z 軸方向から xy 平面を見下ろした図



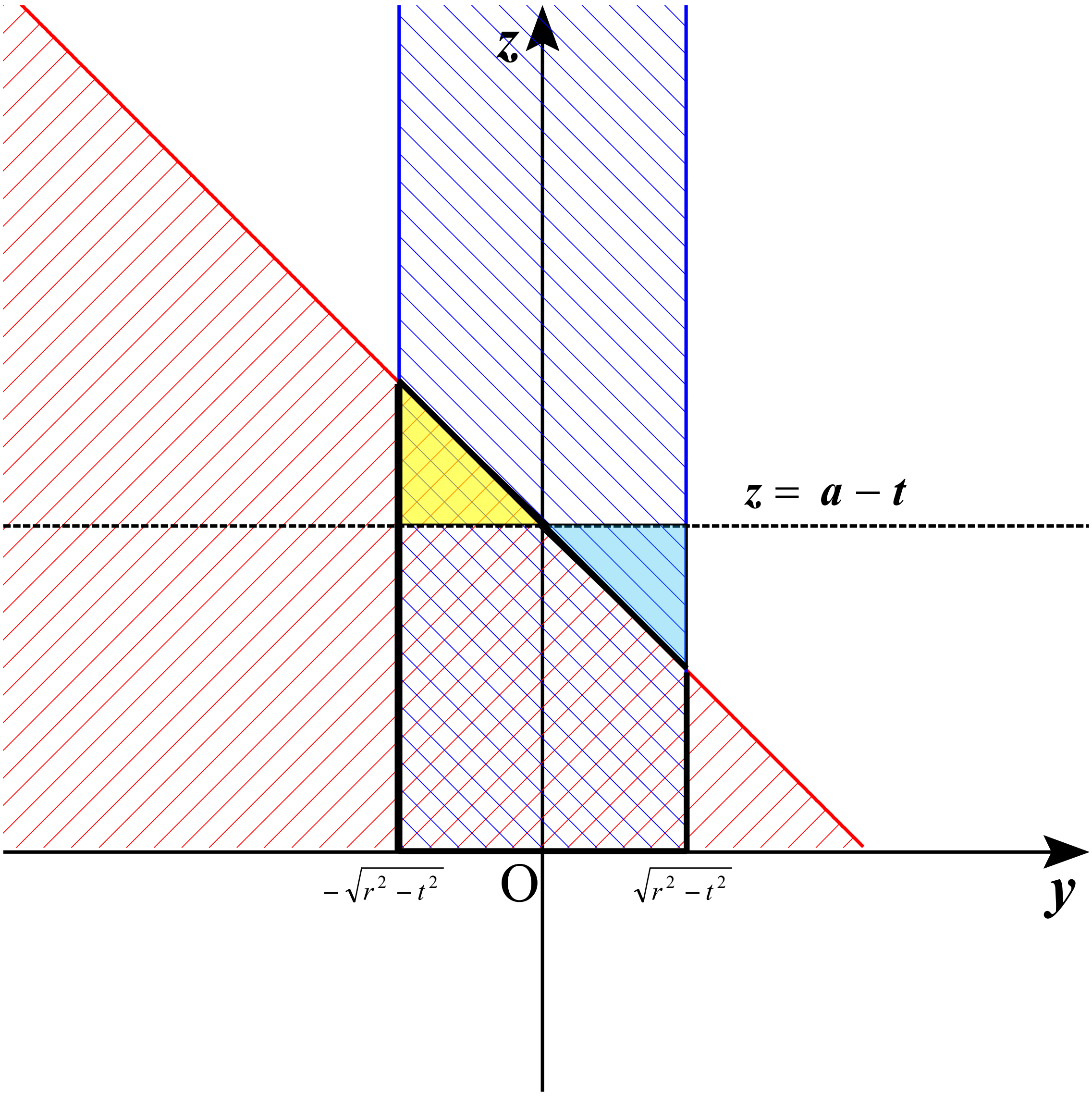
x 軸方向から見た平面 $x=t$ による半円柱の切断面　・・・②



M の平面 $x=t$ （$0 \leq t \leq r$）による切り口は，①かつ②を満たす部分，
すなわち，下図の黒色実線で囲まれた台形領域である。
この領域内の黄色の三角形と領域外の青色の三角形の面積が等しいから，

この台形領域の面積と高さ $a-t$，横の長さ $2\sqrt{r^2-t^2}$ の長方形の面積が等しい。

よって，$S(t)=2(a-t)\sqrt{r^2-t^2}$　・・・(答)



$$V=\int_0^r S(t)dt$$
$$=2\int_0^r (a-t)\sqrt{r^2-t^2}\,dt$$
$$=2a\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt-2\int_0^r t\sqrt{r^2-t^2}\,dt$$

ここで，

$\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt$ について

$\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt$ は半径 r の円の中心角 90° の扇形部分の面積を表しているから，

$$\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt=\frac{1}{4}\pi r^2$$

$\int_0^r t\sqrt{r^2-t^2}\,dt$ について

$$\left\{\left(r^2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}'=\frac{3}{2}\cdot\left(-t^2\right)'\cdot\left(r^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=-3t\sqrt{r^2-t^2}$$

より，

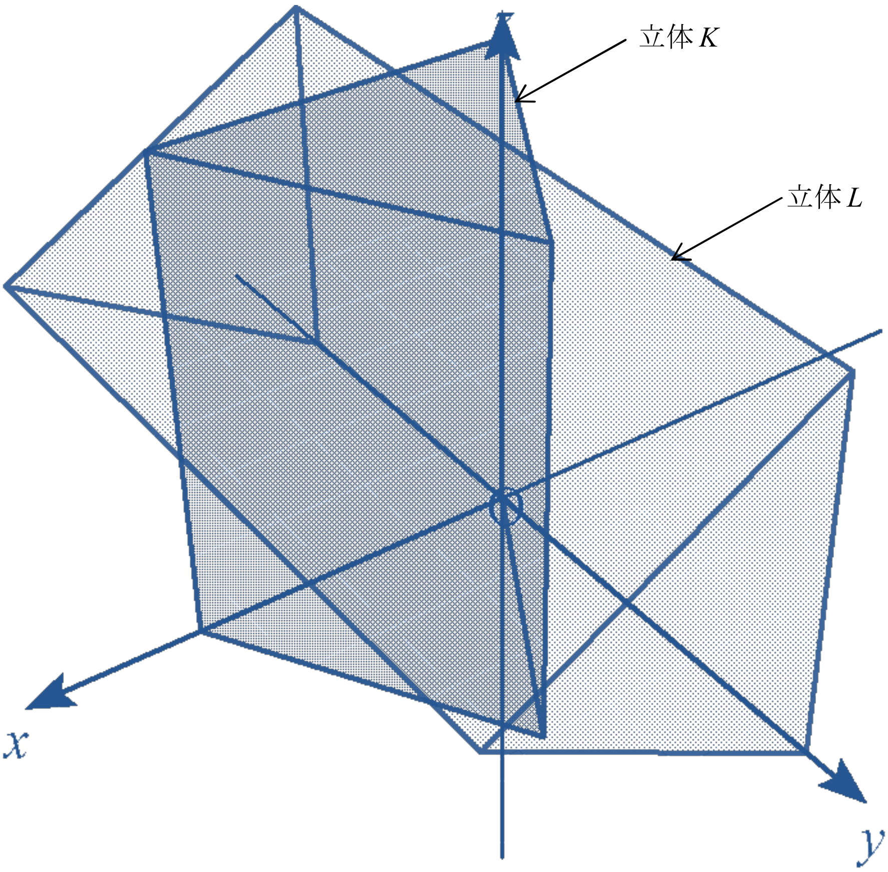
$$t\sqrt{r^2-t^2}=-\frac{1}{3}\left\{\left(r^2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}'$$

よって，

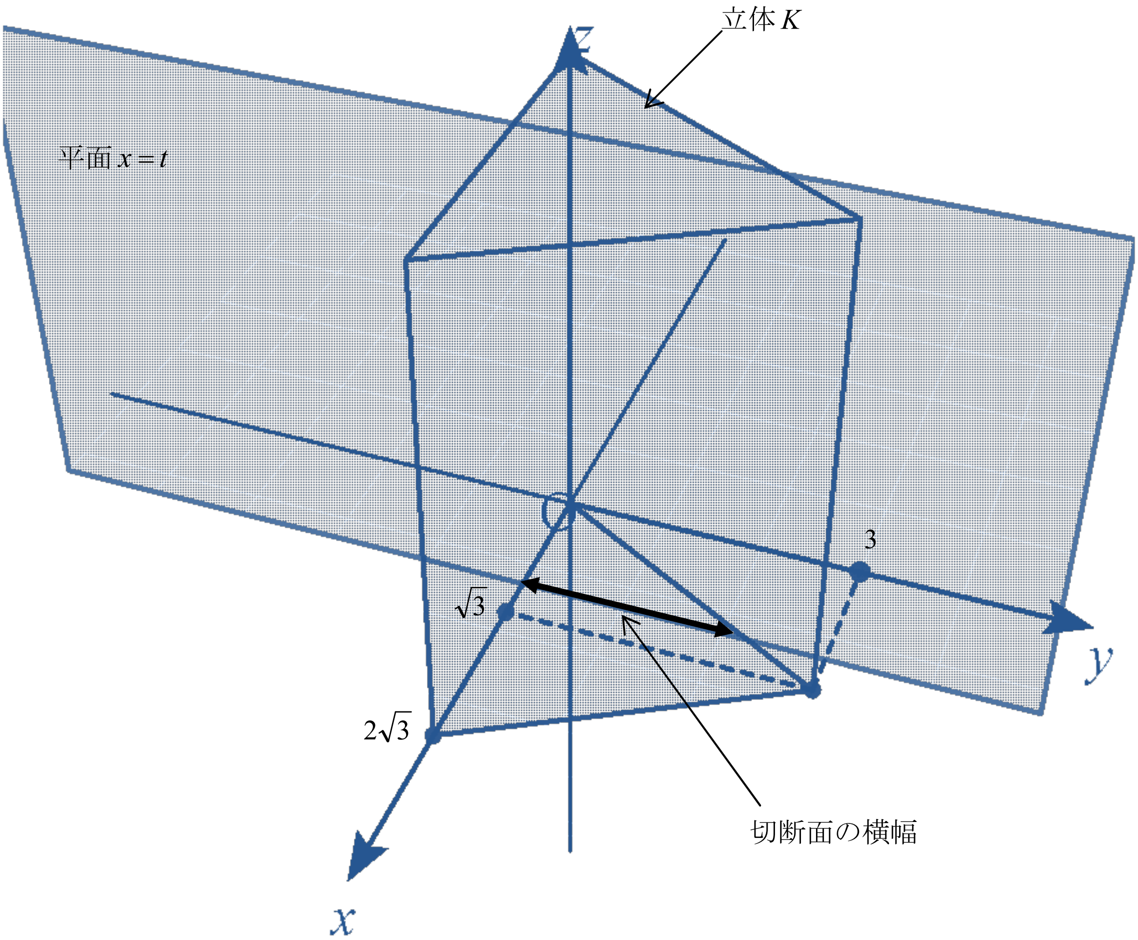
$$\int_0^r t\sqrt{r^2-t^2}\,dt=-\frac{1}{3}\left[\left(r^2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r$$
$$=\frac{1}{3}r^3$$

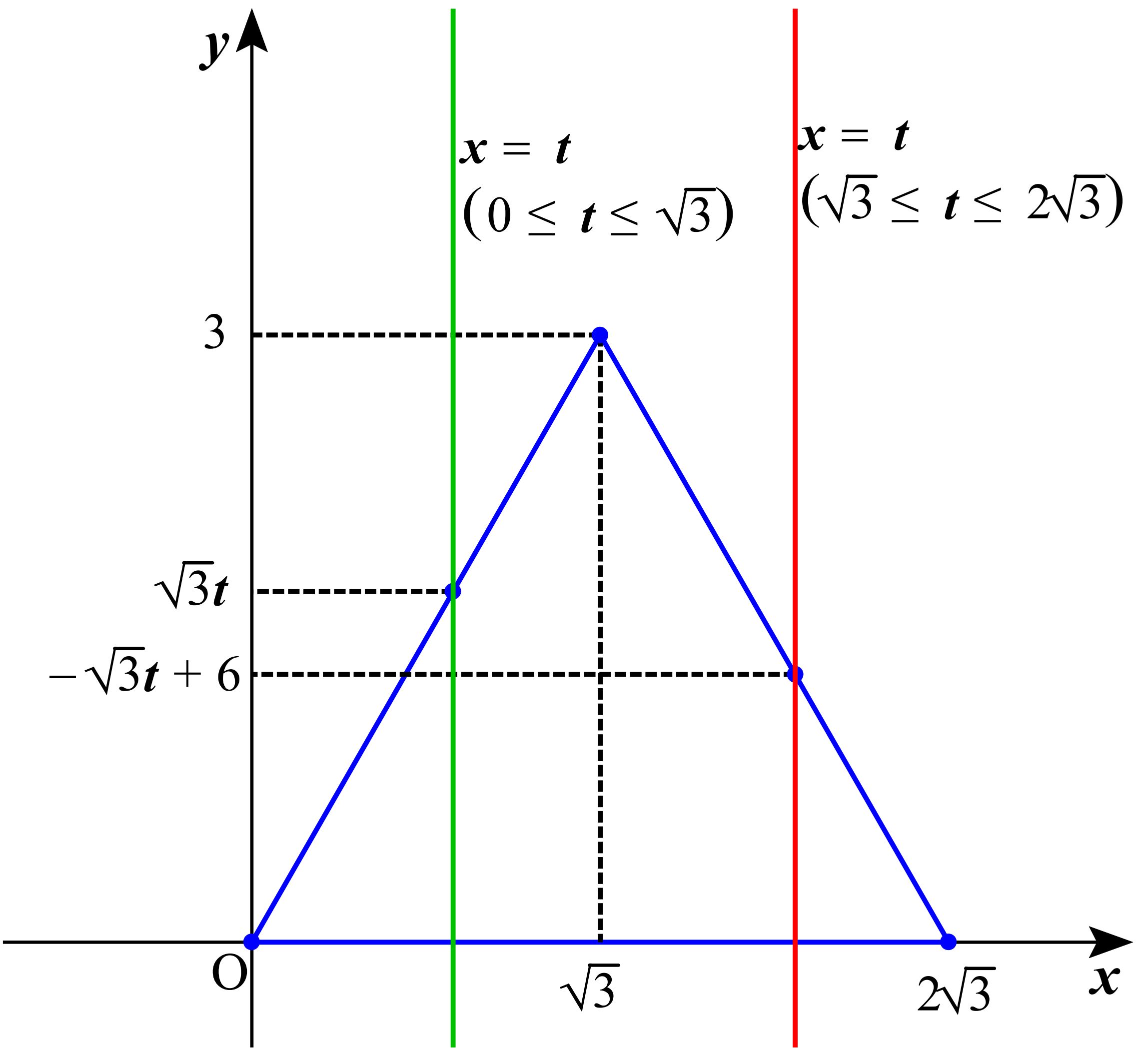
よって，$V=\dfrac{\pi ar^2}{2}-\dfrac{2}{3}r^3$　・・・(答)

11　演習題



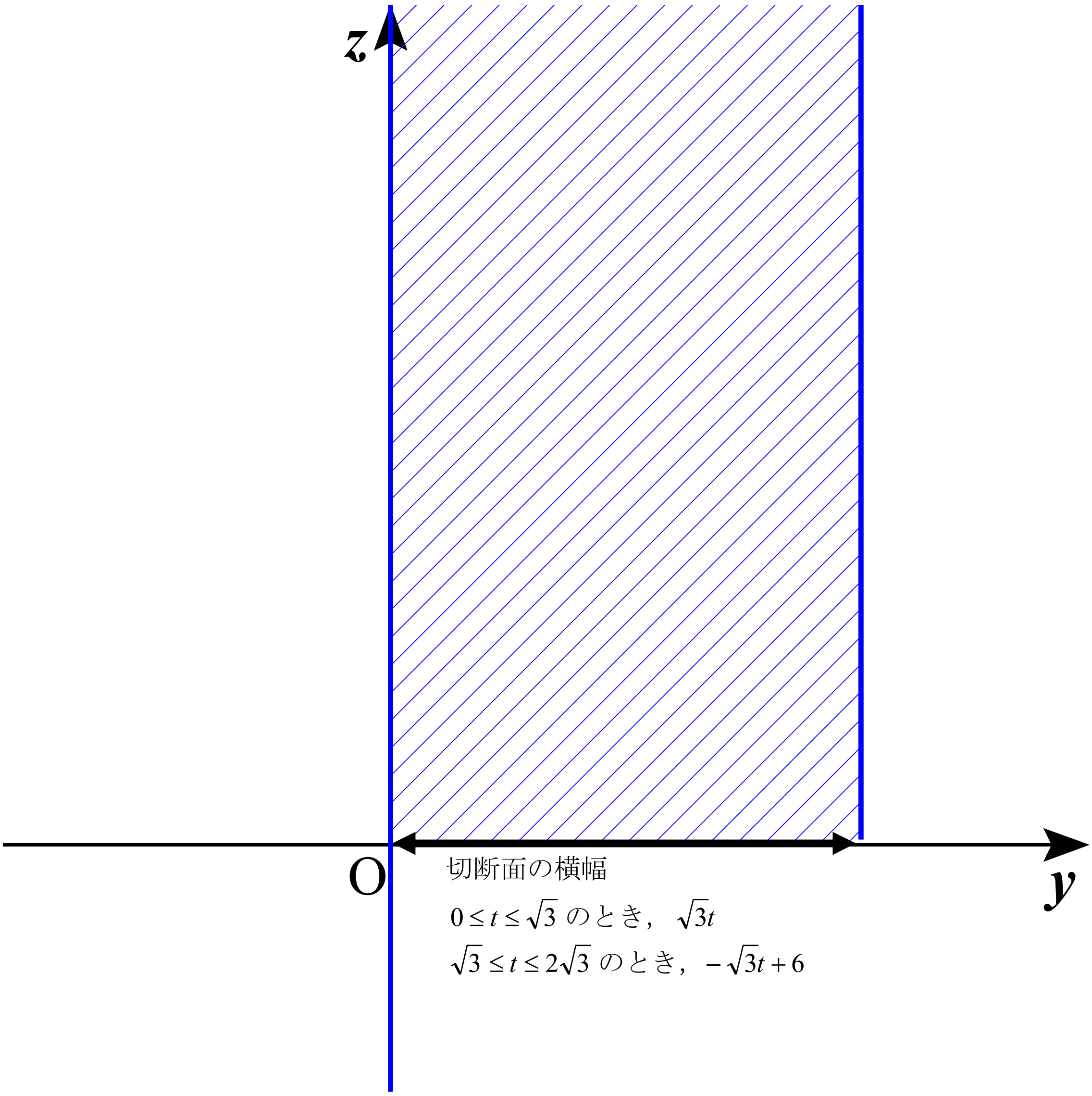
立体 ***K*** を平面 ***x*** **=*t*** で切った切断面について



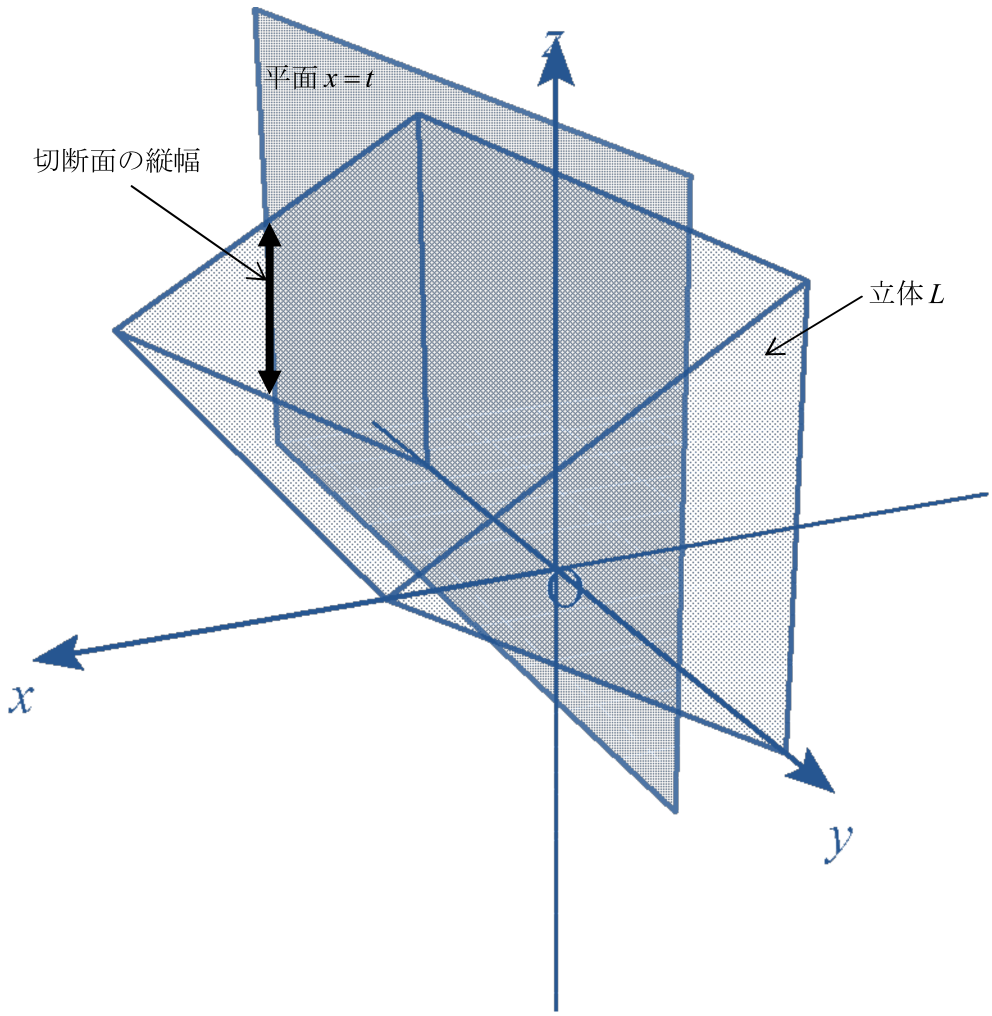


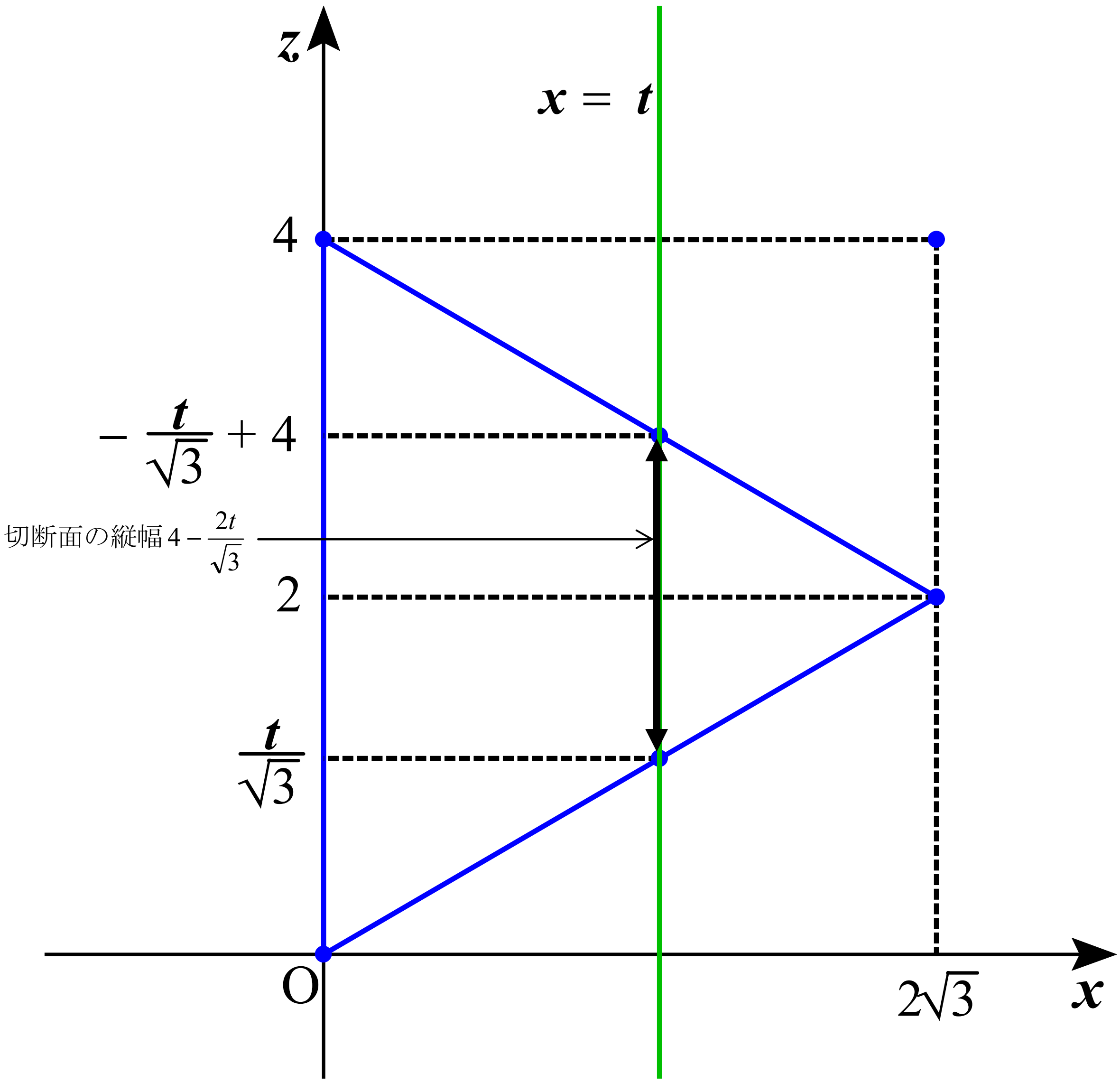
立体 K を平面 $x=t$ （$0 \leq t \leq \sqrt{3}$）で切ったときの切断面の横幅は $\sqrt{3}t$ で，
立体 K を平面 $x=t$ （$0 \leq t \leq \sqrt{3}$）で切ったときの切断面の横幅は $-\sqrt{3}t+6$ で表される。

立体 K の平面 $x=t$ による切断面　・・・①

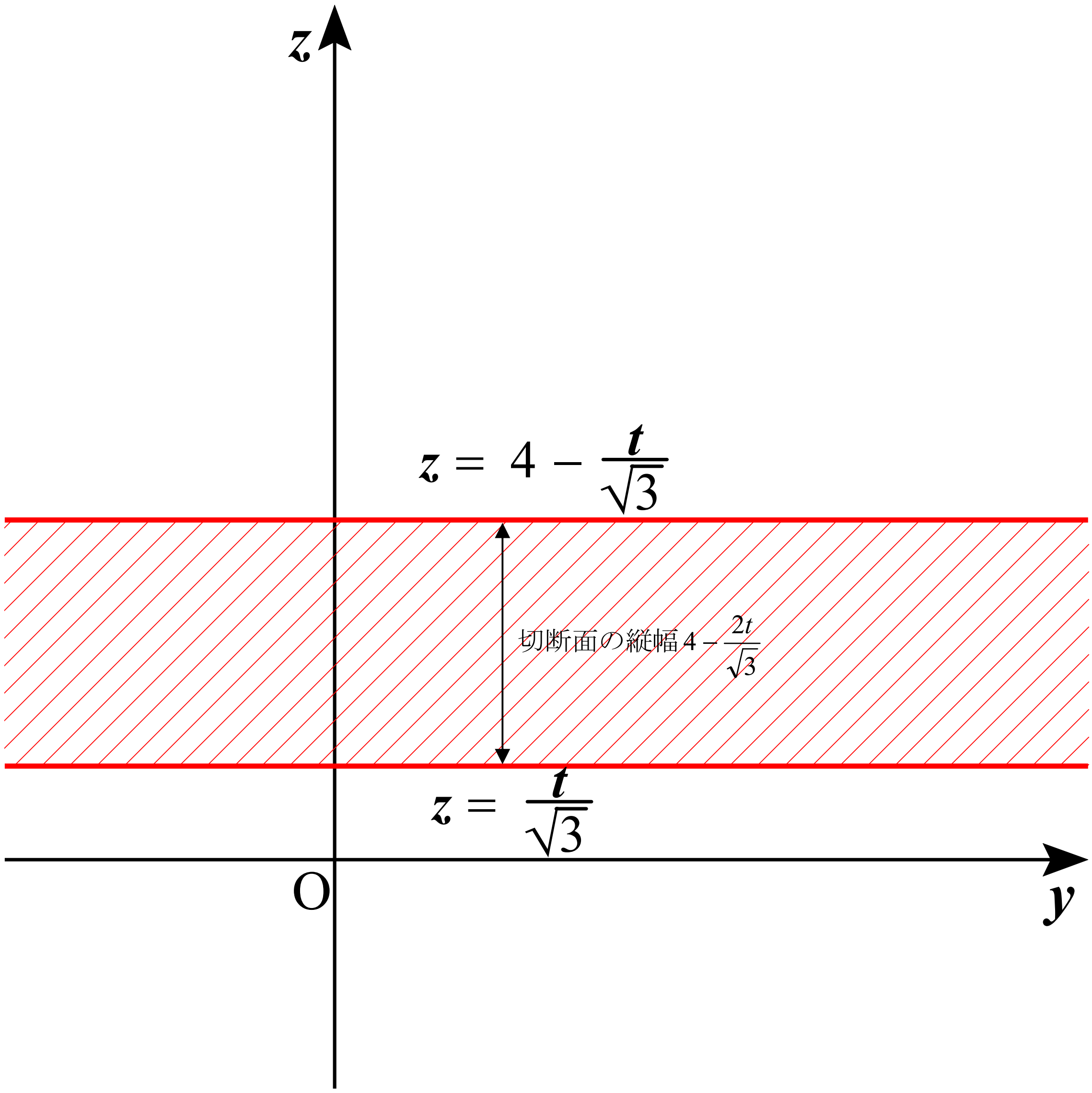


立体 ***L*** を平面 ***x*** =***t*** で切った切断面について

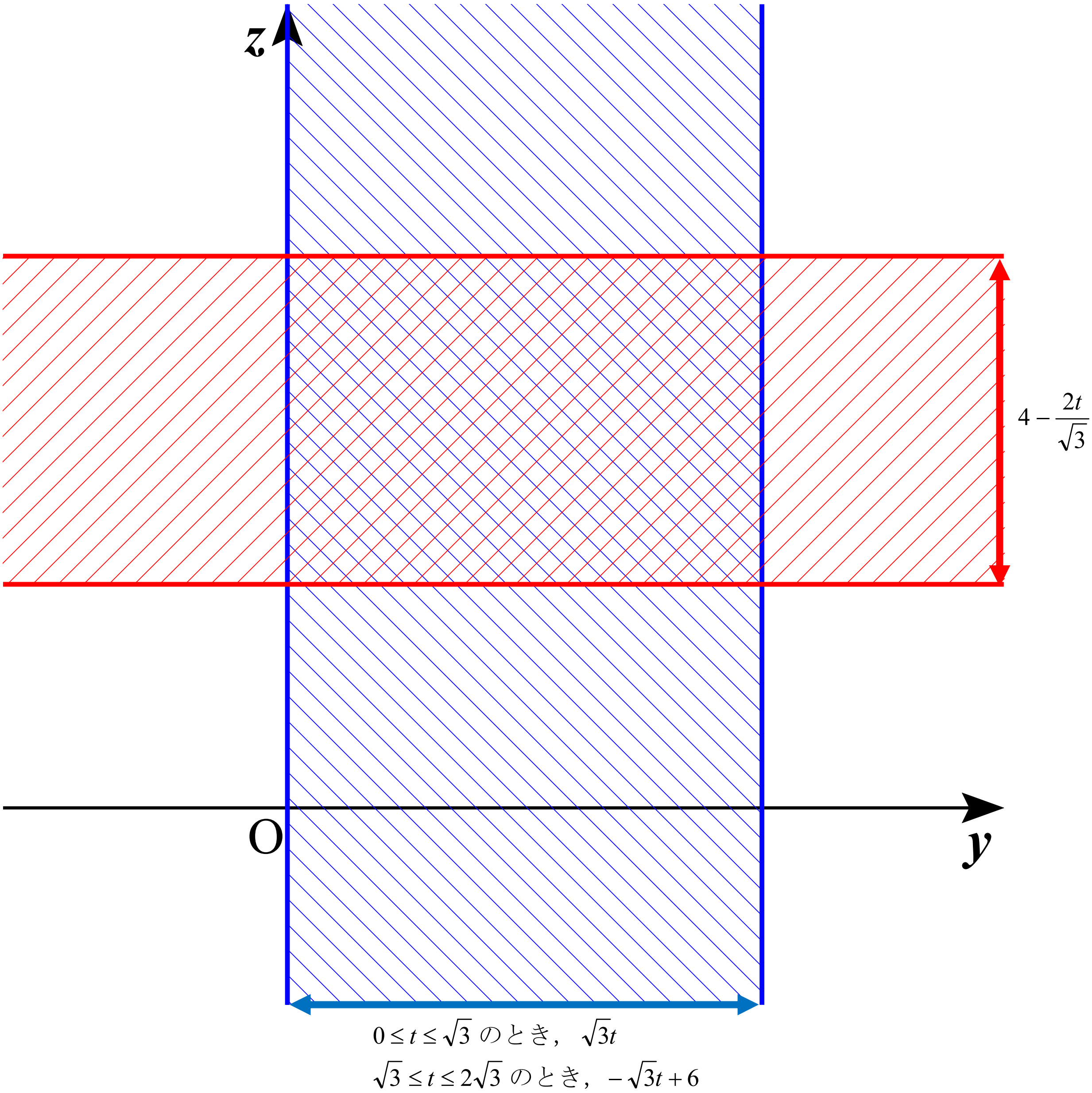



z
x = t
4
$-\frac{t}{\sqrt{3}}+4$
切断面の縦幅 $4-\frac{2t}{\sqrt{3}}$
2
$\frac{t}{\sqrt{3}}$
O
$2\sqrt{3}$
x

立体 L の平面 $x=t$ による切断面　・・・②



切断面①と切断面②を重ね合わせると，



よって，重ね合わさった部分の面積は，

$0 \leq t \leq \sqrt{3}$ のとき，$\sqrt{3}t\left(4-\dfrac{2t}{\sqrt{3}}\right)=-2t^2+4\sqrt{3}t=-2\left(t^2-2\sqrt{3}t\right)$

$\sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{3}$ のとき，$\left(-\sqrt{3}t+6\right)\left(4-\dfrac{2t}{\sqrt{3}}\right)=2t^2-8\sqrt{3}t+24=2\left(t-2\sqrt{3}\right)^2$

ゆえに，立体 K と立体 L の共通部分の体積は，

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} 2\left(t-2\sqrt{3}\right)^2 dt-\int_0^{\sqrt{3}} 2\left(t^2-2\sqrt{3}t\right)dt &= \frac{2}{3}\left[\left(t-2\sqrt{3}\right)^3\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}-2\left[\frac{1}{3}t^3-\sqrt{3}t^2\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot\left(\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right) \\ &= 6\sqrt{3} \quad \cdots \text{（答）}\end{aligned}$$