微積分総合

例題 2　平均値の定理と極限／はさみうち

(3)

(2)より，$\left|f(a_n)-f(\beta)\right|\leq M\left|a_n-\beta\right|$

これと $a_{n+1}=f(a_n)$，$f(\beta)=\beta$ より，$\left|a_{n+1}-\beta\right|\leq M\left|a_n-\beta\right|$

よって，$\left|a_{n+1}-\beta\right|\leq\left|a_n-\beta\right|\leq M^2\left|a_{n-1}-\beta\right|\leq\cdots\leq M^n\left|a_1-\beta\right|\xrightarrow{n\to\infty}0$　$\left(\because\left|M\right|<1\right)$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$

類題

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2)　x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。

$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ。

（2005 東京大学）

類題の解答と解説

(1)

$$f(x)=\frac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}+\frac{1}{2}x\cdot -2e^{-2(x-1)}=\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)}+\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-e^{-2(x-1)}+\left(-x+\frac{1}{2}\right)\cdot -2e^{-2(x-1)}=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

よって，$x>\frac{1}{2}$ における $f'(x)$ の増減は次表のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$

また，$x>\frac{1}{2}$ ならば,

$$\frac{1}{2}-f'(x)=\frac{1}{2}-\left\{\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)}+\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)}>0$$

より，$f'(x)<\frac{1}{2}$

よって，$0\leq f'(x)<\frac{1}{2}$

(2)

解法のストラテジー

$\lim_{n\to\infty}|x_n - 1| = 0$ を示せばよい。

(1)の $x > \frac{1}{2}$ であれば $0 \le f'(x) < \frac{1}{2}$，つまり $|f'(x)| < 1$ であることから，

平均値の定理を利用し，0 に収束する無限等比数列をつくることを発想する。

つまり，

$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = f'(c)$（$c$ は x_n と 1 の間の実数）より，$\left|\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1}\right| = |f'(c)|$

よって，$|f(x_n) - f(1)| = |f'(c)||x_n - 1|$

ここで，$f(x_n) = x_{n+1}$，$f(1) = 1$ だから，$|x_{n+1} - 1| = |f'(c)||x_n - 1|$

さらに，ここで，$0 \le f'(x) < \frac{1}{2}$ がいえれば，

$|x_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|x_n - 1| < \left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_{n-1} - 1| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ となる。

しかし，$0 \le f'(x) < \frac{1}{2}$ がいえるためには，$x_n > \frac{1}{2}$ が成り立つことを示さなければならない。

解

(1)より，$x > \frac{1}{2}$ ならば $f'(x) \ge 0$，すなわち $f(x)$ は単調に増加する。

ｉ）$n = 1$ のとき

$x_0 > \frac{1}{2}$，$x_{n+1} = f(x_n)$ より，

$x_1 = f(x_0) \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+e) > \frac{1}{2}$

ⅱ）$n = k$ のとき，$x_k > \frac{1}{2}$ とすると，

$x_{k+1} = f(x_k) \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+e) > \frac{1}{2}$ より，

$n = k+1$ のときも $x_{k+1} > \frac{1}{2}$ が成り立つ。

よって，ｉ)，ⅱ）より，$x_n > \frac{1}{2}$ が成り立つ。

$x_n \neq 1$ のとき，x_n と 1 の間に任意の実数 c をとると，

平均値の定理，$\dfrac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c)$　が成り立つ。

よって，

$$\left|\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}\right|=|f'(c)|$$

$$\therefore |f(x_n)-f(1)|=|f'(c)||x_n-1|$$

$x_n>\dfrac{1}{2}$ より，$0\leq f'(c)<\dfrac{1}{2}$

また，$f(x_n)=x_{n+1}$，$f(1)=1$

よって，$|x_{n+1}-1|<\dfrac{1}{2}|x_n-1|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2|x_{n-1}-1|<\cdots<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$

あるいは，

x_n と x_{n-1} の間に任意の実数 d をとると

$\left|\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right|=|f'(d)|$　が成り立つ。

$x_n>\dfrac{1}{2}$ より，$0\leq f'(d)<\dfrac{1}{2}$，

また，$x_{n+1}=f(x_n)$，$x_n=f(x_{n-1})$

よって，

$$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|<\left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2}-x_{n-3}|<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_2-x_1|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

よって，α を有限確定値とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ より，$\alpha=f(\alpha)$

よって，$\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha\left\{1+e^{-2(\alpha-1)}\right\}$

$x_n>\dfrac{1}{2}$ より，$\alpha>\dfrac{1}{2}$

よって，$e^{-2(\alpha-1)}=1$　　$\therefore \alpha=1$

例題 5　Σの面積化と不等式・極限

(ロ)

別解というかふつうの解

$\lim_{n\to\infty} a_n$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

よって,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$

$\frac{1}{\sqrt{2k+2}} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2k}}$ より, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$

よって, $\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

ここで,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \\
&= a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1
\end{aligned}$$

よって, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1\right) < b_n < \frac{1}{\sqrt{2}} a_n$

よって, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{a_n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) < \frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ より, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{a_n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，はさみうちの原理により,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

テクニックのまとめ的なもの

1. $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ と $\int_1^n f(x)dx$ の大小関係の求め方について

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$
$$= 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + \cdots + 1 \cdot f(n)$$

より，$\sum_{k=1}^{n} f(k)$ を横の長さ 1，縦の長さ $f(k)$ の長方形の面積の和とみなし，

$\sum_{k=1}^{n} f(k)$ と $\int_1^n f(x)dx$ を座標平面上に図示し，大小関係を具体化する。

2. 式変形：$\int_1^n f(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx$

証明

$$\int_1^n f(x)dx = \int_{n-1}^{n} f(x)dx + \int_{n-2}^{n-1} f(x)dx + \int_{n-3}^{n-2} f(x)dx + \cdots + \int_1^2 f(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx$$

3. $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ と $\int_\beta^\alpha f(x)dx$ の等式のつくり方

$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_\beta^\alpha f(x)dx + s_n$ （s_n は有限確定値）表す。

（$a+b+c<m$ を $a+b+c+d=m$ にする的な？）

4. $\int_\beta^\alpha \frac{g(x)}{f(x)}dx < 1$ の証明問題について

$\alpha \leq x \leq \beta$ において，$g(x) - f(x) < 0$ であることが示されれば，

$g(x) < f(x)$ より，$\frac{g(x)}{f(x)} < 1$ （$\alpha \leq x \leq \beta$）となるから，$\int_\beta^\alpha \frac{g(x)}{f(x)}dx < 1$ が成り立つ。

5. $f''(x)$ の扱い方と $f(x)$

$f''(x) > 0$ のとき

$f'(x)$ は単調増加であることから，$f'(x)$ と $f(x)$ の関係を調べる。

$f(x)$ は下に凸であるから，$f(x)$ の概形を図示し調べる。

$f''(x) < 0$ のとき

$f'(x)$ は単調減少であることから，$f'(x)$ と $f(x)$ の関係を調べる。

$f(x)$ は上に凸であるから，$f(x)$ の概形を図示し調べる。

結局のところ，テクニックにすぎないので，
演習を積んだり復習をしつこく繰り返したりすることで，因数分解の問題を解くように，
理屈ではなく無意識に処理できるようにするしかないと思います。