

場合の数

要点の整理

27 ページの例の解法について

0~9999 の整数を 0 を含めて順に表すと、

0000, 0001, 0002, ..., 9999 となる。

整数は全部で 10000 個あり、それぞれの整数は 4 個の数で構成されているから、

これらの整数を表すのに使われた数は全部で 40000 個である。

任意の桁の数が 0 である場合の数=1 である場合の数=...=9 である場合の数だから、

0~9 のどの数をとっても、その使われた数は、 $\frac{40000}{10} = 4000$ 個である。

1 については、0001~9999 において 4000 個使われることになる。

よって、1~10000 においては、 $4000 + 1 = 4001$ 個使われる。

別解

0000~9999 で表される整数に含まれる 1 の数が

1 個のときの 1 の総数

○を 1 以外の数とすると、1○○○, ○1○○, ○○1○, ○○○1 の 4 通りに表せる。

○○○の順列の数は 1 以外の 9 個の数について重複を許す順列より 9^3 だから、

全順列の数は 4×9^3

よって、整数の数は全部で 4×9^3 個あり、各整数における 1 の数は 1 個だから、

1 の数は全部で $4 \times 9^3 \times 1 = 2916$ 個

2 個のときの 1 の総数

同様に、○, ○, 1, 1 を使った表し方は、 $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 通り。

○○の順列の数は 9^2 だから、全順列の数は 6×9^2

よって、整数の数は全部で 6×9^2 個あり、各整数における 1 の数は 2 個だから、

1 の数は全部で $6 \times 9^2 \times 2 = 972$ 個

3 個のときの 1 の総数

同様に、○, 1, 1, 1 を使った表し方は 4 通り。

○に入ることができる数は 0~9 のうち、1 を除く 9 つだから、全順列の数は、 4×9

よって、整数の数は全部で 4×9 個あり、各整数における 1 の数は 3 個だから、

1 の数は全部で $4 \times 9 \times 3 = 108$ 個

4 個のときの 1 の数

1111 より、4 個

以上より、 $2916 + 972 + 108 + 4 = 4000$

ゆえに、1~10000 においては、1 が $4000 + 1 = 4001$ 個使われる。

例題3 順列/2種類のものの並び**後半**

男子の並べ方は $5!$ 通り。

女子が隣り合わないように入れる場合の数は、

女子が①男②男③男④男⑤男⑥の①～⑥のどれかに入る場合の数だから、

$6 \times 5 \times 4 = 120$ 通り。

よって、 $5! \times 120 = 14400$ 通り。

例題6 円順列と数珠順列**同じものを含む円順列の求め方**

1対1対応の演習数学A「場合の数」の例題「円順列と数珠順列」の

「白玉6個、赤玉3個を円形に並べる方法は全部で何通りあるか？」

という問題が気になったので・・・

解法は、友田先生の解法を元にさせていただきました。

<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/>

1つを固定する解き方の考え方**異なる n 個の円順列**

A,B,C,D,E,F,G,H,I の円順列の場合

A から I のうち適当な1つの文字を、たとえば A を左端に固定する。

A,B,C,D,E,F,G,H,I

残りの文字を適当に並べ、右端にきた文字と A をつないで円にする。

例

ABCDEFGHI

図より、B,C,D,E,F,G,H,I の並べ方を変えると円順列も変わるの明らかである。

よって、円順列の数は、B,C,D,E,F,G,H,I の順列の数と一致し、

その数は、 $8!$ 通りである。

つぎに、B を左端に固定してみる。

B,C,D,E,F,G,H,I,A

残りの文字を適当に並べ、右端にきた文字と B をつないで円にする。

例

BCDEFGHIA

でも、この例を1つずらすと A を左端に固定したときの、上の例と同じである。

ABCDEFGHI

結局、固定する文字を変えたところで、Aを固定した場合の円順列と同じになってしまう。
よって、異なる n 個の円順列は、 $(n-1)!$ となる。

同じものを含む円順列への応用と限界

1つしかないものがある場合は使える。

例：A,B,B,B,C,C,C,Cの場合

1つしかない文字Aを左端に固定する。

\boxed{A} B,B,B,C,C,C,C

残りの文字を適当に並べ、右端にきた文字とAをつないで円にする。

例

\boxed{A} BBBCCCC
└──────────┘

異なる n 個の円順列の場合と同様、

円順列は、残りの8文字、B,B,B,C,C,C,C,Cの順列で決まってしまう。

よって、円順列の数は、 $\frac{8!}{3!5!} = 56$ 通り

補足

円順列は、Aの右に並ぶBの数が0個、1個、2個、3個の場合に排反に分類できるが、それらの順列の和とB,B,B,C,C,C,C,Cの順列が一致するのは明らかである。

1つしかないものがない場合はややこしい。

例：A,A,B,B,B,C,C,C,Cの場合

たとえば、Aを左端に固定する。

\boxed{A} A,B,B,B,C,C,C,C

残りの文字を適当に並べ、右端にきた文字とAをつないで円にする。

例

\boxed{A} ABBBCCCC
└──────────┘

でも、この円順列は、次の円順列と同じである。

\boxed{A} BBBCCCCA
└──────────┘

したがって、

残りの文字A,B,B,B,C,C,C,Cの順列と円順列は一致しない。

1つしかないものがない場合の円順列の求め方

問

白玉6個, 赤玉3個を円形に並べる方法は全部で何通りあるか?

解法

赤玉をR, 白玉をWとすると,

Rの数が3, Wの数が6の円順列だから, 1つを固定する方法で解くのは困難である。

たとえば, 1つのRを左端に固定した場合,

$$\left. \begin{array}{l} \text{RRRWWWWW} \\ \text{RRWWWWW} \\ \text{RWWWWWRR} \end{array} \right\} \text{の円順列は一致してしまう。}$$

そこで, 原点に戻って考える。

A,B,C,D,E,F,G,H,Iの順列

順列がABCDEFGHIのとき

$$\left. \begin{array}{l} \text{ABCDEFGHI} \\ \text{BCDEFGHIA} \\ \text{CDEFGHIAB} \\ \text{DEFGHIABC} \\ \text{EFGHIABCD} \\ \text{FGHIABCDE} \\ \text{GHIABCDEF} \\ \text{HIABCDEFG} \\ \text{IABCDEFGH} \end{array} \right\} \text{円順列にすると, 同じ順列になってしまう。}$$
これは, 他の順列についても成り立つから, 円順列の数は, $\frac{9!}{9}$ よって, 異なる n 個の円順列の数は, $\frac{n!}{n}$

あとは, R,R,R,W,W,W,W,Wの並べ方の工夫である。

では, 解法へ

まず、並べ方を工夫してみる。

R,R,R,W,W,W,W,W の順列を R,R,R,W,W,W,W,W の繰り返し配列について分類する。

R が 3 個, W が 6 個だから, 公約数は 3 と 1 である。

よって, 次の 2 つのタイプの繰り返し単位ができる。

3 個の R, 6 個の W をそれぞれ 3 分割することでできる繰り返し単位による繰り返し配列

繰り返し単位の要素: (R,W,W)

繰り返し配列の例: |RWW|RWW|RWW|

3 個の R, 6 個の W をそれぞれ 1 分割することでできる繰り返し単位による繰り返し配列

繰り返し単位の要素: (R,R,R,W,W,W,W,W,W)

繰り返し配列の例: |RRRWWWWWW|

繰り返し単位が 1 個しかないのに「繰り返し配列」というのはおかしいが,

流れの都合上そうしてしまいました。「繰り返し配列なし」でもいいです。

次に, それぞれの場合についての円順列を求める。

A. 3 個の R, 6 個の W をそれぞれ 3 分割することでできる繰り返し単位の円順列

繰り返し単位の順列の数

繰り返し単位の要素は, (R,W,W) で, これが 3 単位できる。

また, 繰り返し単位の要素の順列の数は, $\frac{3!}{2!}$ である。

RWW, WRW, WWR の 3 つであるのは自明だが, あえて同じものを含む順列の式で表した。

繰り返し配列の順列の総数

繰り返し配列だから, 繰り返し単位の順列を決めると, 残りの順列は 1 通りである。

よって, 繰り返し配列の全順列も, $\frac{3!}{2!}$ となる。

円順列にするとどうなるか

たとえば, 繰り返し単位の順列が RWW の場合,

全体の順列は, |RWW|RWW|RWW| となる。

ここで, |RWW|RWW|RWW| で考えると,

$$\left. \begin{array}{l} |RWW|RWW|RWW| \\ |WRW|WRW|WRW| \\ |WWR|WWR|WWR| \end{array} \right\} \text{ は, 1 つずつならただけの関係なので, 同じ円順列になる。}$$

他の繰り返し単位の場合でも同じだから,

円順列にすると同じ順列になるのが 3 つずつあることになる。

よって, 円順列の数は,

繰り返し配列の順列の総数を繰り返し単位の要素の数 3 で割った数になる。

すなわち $\frac{3!}{2!} \div 3 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

補足

繰り返し単位の要素の数をもう少し多くしたほうが分かりやすいかもしれないので、
繰り返し単位の要素を(R,R,B,W)とすると、

$$\text{繰り返し配列の順列の総数} = \text{繰り返し単位の要素の順列の数} = \frac{4!}{2!}$$

繰り返し配列を円順列にするとどうなるか？

たとえば、繰り返し配列|RRBW|RRBW|RRBW|を円順列にすると

$$\left. \begin{array}{l} |RRBW|RRBW|RRBW| \\ |RBWR|RBWR|RBWR| \\ |BWRR|BWRR|BWRR| \\ |WRRB|WRRB|WRRB| \end{array} \right\} \text{の4つは、同じ円順列になる。}$$

つまり、4つの「4」とは、繰り返し単位の要素の数の「4」のことであり、
円順列の数 = 繰り返し配列の順列の総数 ÷ 繰り返し単位の要素の数
となる。

よって、この場合の円順列の数は、 $\frac{4!}{2!} \div 4 = 3$ である。

B. 3個のR, 6個のWをそれぞれ1分割することでできる繰り返し単位の円順列

繰り返し単位(R,R,R,W,W,W,W,W,W)の要素の順列は、 $\frac{9!}{3! \cdot 6!}$ である。

しかし、この順列には、繰り返し単位の構成が(R,W,W)の繰り返し配列も含まれるから、
これを除外しなければならない。

したがって、

この場合の円順列を考える対象となる順列の数は、

$$\frac{9!}{3! \cdot 6!} - \frac{3!}{2!}$$

である。

これと繰り返し単位の要素の数が9であることから、

円順列の数は、

$$\left(\frac{9!}{3! \cdot 6!} - \frac{3!}{2!} \right) \div 9 = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

C. 円順列の総数

①+②より、10個

解法のまとめ

1. 各要素の数の公約数を調べる。
公約数が繰り返し単位数となるので、各要素を繰り返し単位に等配分する。
2. 重複を避けるため、繰り返し単位の要素の数が少ないものあるいは多いものから順に各円順列の数を求めていく。
(円順列の対象となる繰り返し配列の順列の数 \div 繰り返し単位の要素の数)
3. 各円順列の数を合計する。

練習問題

赤球4個、白球6個の円順列の数を求めよ。

解

公約数2,1より、繰り返し単位の数2,1

よって、円順列の数は、

$$\frac{5!}{2!3!} \div 5 + \left(\frac{10!}{4!6!} - \frac{5!}{2!3!} \right) \div 10 = 22$$

例題7 分割／組のみ区別（モノは区別しない）

(2)

入っていない色があってもよい場合

11個の色のないアメ玉○○○○○○○○○○○○を3本の仕切り|||で仕切ってから、
たとえば、青 | 赤 | 黄 | 緑と着色すると考えると、

11個のアメ玉○と3本の仕切り|の順列だから、 $\frac{14!}{11!3!} = 364$ 通り。

(1)において、この解き方を使うと、

あらかじめ、青、赤、黄、緑の色をついたアメ玉を1個ずつ計4個確保しておけば、
残り7個のアメ玉については、入っていない色があってもよいから、

7個のアメ玉○と3本の仕切り|の順列より、 $\frac{10!}{7!3!} = 120$ 通り。

(3)において、この解き方を使うと、

青いアメ玉は1個か、または2個である。

青いアメ玉が1個のとき

赤、黄、緑のアメ玉を2個ずつ計6個確保しておけば、

残り4個のアメ玉は、赤、黄、緑でかつ入っていない色があってもよいから、

4個のアメ玉○と2本の仕切り|の順列より、 $\frac{6!}{4!2!} = 15$ 通り。

青いアメ玉が2個のとき

赤、黄、緑のアメ玉を3個ずつ確保すると、残りのアメ玉は0個

よって、1通り。

以上より、 $15+1=16$ 通り。

例題 8 分割／モノのみ区別（組は区別しない）

各グループの要素の数が異なる場合

要素 $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ を要素の個数が 5, 4, 3 個のグループに分けるとする。

たとえば, $\{a, b, c, d, e\}$, $\{f, g, h, i\}$, $\{j, k, l\}$ と分けた場合

それぞれにグループ名をつけて区別しなくても, グループの区別がつく。

各グループの要素の数が同じ場合

要素 $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ を 4 個ずつ 3 つのグループ A, B, C に分けるとすると,
グループ A に ${}_{12}C_4$ 通り, グループ B に ${}_8C_4$ 通り, グループ C に ${}_4C_4$ 通りの

${}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4$ 通りある。

ここで, A, B, C の区別をなくすと,

たとえば,

A $\{a, b, c, d\}$, B $\{e, f, g, h\}$, C $\{i, j, k, l\}$

A $\{a, b, c, d\}$, B $\{i, j, k, l\}$, C $\{e, f, g, h\}$

A $\{e, f, g, h\}$, B $\{a, b, c, d\}$, C $\{i, j, k, l\}$

A $\{e, f, g, h\}$, B $\{i, j, k, l\}$, C $\{a, b, c, d\}$

A $\{i, j, k, l\}$, B $\{a, b, c, d\}$, C $\{e, f, g, h\}$

A $\{i, j, k, l\}$, B $\{e, f, g, h\}$, C $\{a, b, c, d\}$

の 6 通りの区別, つまり A, B, C の順列 3! 分の区別がなくなる。

よって,

要素 $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ を 4 個ずつ区別のない 3 つのグループに分ける場合の数は,

${}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \div 3!$ 通りとなる。

(2)

まず男子を 2 人ずつ 3 つのグループに分け,

続いて女子を各グループに 2 人ずつ入れるとすると,

男子を 2 人ずつ 3 つのグループに分ける場合の数

グループの区別がないから, $\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!}$ 通り

続いて女子を各グループに 2 人ずつ入れる場合の数

男子のグループ分けにより, グループの区別ができたから,

${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2$ 通り

よって,

$\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!} \times {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 = 1350$ 通り

(3)

3つのグループは、AとBが居るグループとそうでない2つのグループに区別される。

AとBが居るグループに残りの男女の入り方の場合の数 $= {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 = 25$ 通り

残りの男女2人ずつを2つのグループに分ける場合の数 $= \frac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{2!} \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 = 18$ 通り

よって、 $25 \times 18 = 450$ 通り

A,A,A,B,C,D,E,F,G,H のグループ分けの場合の数**例題**

A,A,A,B,C,D,E,F,G,H の文字が書かれたカードが 10 枚ある。

これらのカードを 2 枚 1 組として 5 つに分ける。

このような分け方は全部で何通りあるか。

例題を解く前に伏線問題を 1 つ

A,B,C,D,E,F,G,H の文字が書かれたカードが 8 枚ある。

これらのカードを 2 枚 1 組として 4 つに分ける。

このような分け方は全部で何通りあるか。

解 1 : ふつうに解く

4 組の区別はないから、 $\frac{{}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{4!} = 105$ 通り

解 2 : 1 枚のカードを特別扱いして解く

A の組を A 組とし、A 組、残り 3 組の順に組をつくると、

A 組のつくり方の場合の数は 7 通り、

残りの 3 組の区別はないから、 $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15$ 通り。

よって、 $7 \times 15 = 105$ 通り

解 3 : 2 枚のカードを特別扱いして解く

A の組を A 組、B の組を B 組とする。

i) A と B が同じ組にならない場合

A 組、B 組、残り 2 組の順に組をつくると、

A 組のつくり方の場合の数 = 6 通り、B 組のつくり方の場合の数 = 5 通り、

残りの 2 組の区別はないから、 $\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_2}{2!} = 3$ 通り

よって、 $6 \times 5 \times 3 = 90$ 通り

ii) A と B が同じ組、すなわち AB 組になる場合

AB 組のつくり方は 1 通り、

残り 3 組の区別はないから、 $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15$ 通り

よって、 $1 \times 15 = 15$ 通り

i), ii) より、 $90 + 15 = 105$ 通り

解4: 3枚のカードを特別扱いして解く

Aの組をA組, Bの組をB組, Cの組をC組とする。

i) A,B,Cが同じ組にならない場合

A組, B組, C組, 残り1組の順に組をつくると,

A組のつくり方の場合の数=5通り, B組のつくり方の場合の数=4通り,

C組のつくり方の場合の数=3通り, 残りの1組のつくり方の場合の数=1通り

よって, $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$ 通り

ii) A,B,Cの間に1組できる場合

A,B,Cの間の組のつくり方の場合の数は, AB組, BC組, CA組の3通り,

あぶれたカードでの組のつくり方=5通り,

残り2組の区別はないから, $\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_2}{2!} = 3$ 通り

よって, $3 \times 5 \times 3 = 45$ 通り

i), ii)より, $60 + 45 = 105$ 通り

それでは, 例題の解説を

i) Aだけの組ができない場合

とりあえず3つのAを A_1, A_2, A_3 に分け, A_1 組, A_2 組, A_3 組と区別し,

A_1 組, A_2 組, A_3 組, 残り2組の順に組をつくると,

A_1 の組のつくり方の場合の数=7通り, A_2 の組のつくり方の場合の数=6通り,

A_3 の組のつくり方の場合の数=5通り, 残り2組の区別はないから, $\frac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{2!} = 3$ 通り

よって, $7 \times 6 \times 5 \times 3 = 630$ 通り

続いて, A_1, A_2, A_3 の区別を解消する。

たとえば, (A_1B, A_2C, A_3D) , (A_1B, A_2D, A_3C) , (A_1C, A_2B, A_3D) , (A_1C, A_2D, A_3B) ,
 (A_1D, A_2B, A_3C) , (A_1D, A_2C, A_3B) の6組はすべて (AB, AC, AD) の1組になってしまう。

つまり, 区別を解消すると, 場合の数が A_1, A_2, A_3 の順列分の1, すなわち $\frac{1}{3!}$ になる。

よって, $630 \times \frac{1}{3!} = 105$ 通り

ii) Aだけの組ができる場合

Aだけの組のつくり方の場合の数=1通り,

残りはA,B,C,D,E,F,G,Hで組をつくるから $\frac{{}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{4!} = 105$ 通り

$1 \times 105 = 105$ 通り

i), ii)より $110 + 110 = 220$ 通り

例題 10 図形／多角形の個数正 n 角形の 3 つの頂点を結んでできる鈍角三角形の数について n が偶数のときの鈍角三角形の数**手順 1**

正 n 角形の 1 つの頂点を A とし、 A から反時計回りに順に各頂点に $1, 2, \dots, k, \dots, n-1$ と番号をつけ、まず頂点 A を鈍角とする鈍角三角形の数を手順 2 で求める。

手順 2

番号 k を選ぶと、 k と円の直径をなす頂点の番号は、

頂点の間の数が n であることから、 $k + \frac{n}{2}$ である。

したがって、 k を選んだとき、 A が鈍角であるための残りの頂点の番号は、

$k + \frac{n}{2} + 1, k + \frac{n}{2} + 2, \dots, n-1$ となる。

よって、 k を選んだときの残りの頂点の数を a_k とすると、

$$a_k = (n-1) - \left(k + \frac{n}{2} + 1\right) + 1 = \frac{n}{2} - k - 1$$

鈍角三角形の数は残りの頂点の数で決まるから、頂点 k を選んだときの鈍角三角形の数も a_k である。

また、 $k + \frac{n}{2} + 1 \leq n-1$ かつ $k \geq 1$ より、 $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$

よって、頂点 A を鈍角とする三角形の数は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-2} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{\frac{n}{2}-4} + a_{\frac{n}{2}-3} + a_{\frac{n}{2}-2} \\ &= \left(\frac{n}{2} - 2\right) + \left(\frac{n}{2} - 3\right) + \left(\frac{n}{2} - 4\right) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ &= \frac{1 + \left(\frac{n}{2} - 2\right)}{2} \times \left(\frac{n}{2} - 2\right) \\ &= \frac{(n-2)(n-4)}{8} \end{aligned}$$

補足：等差数列の和 = 平均値 \times 項数 = $\frac{\text{初項の値} + \text{末項の値}}{2} \times \text{項数}$

手順 3

鈍角になれる頂点の数は全部で n 個あるから、

$$\text{鈍角三角形の総数} = \frac{n(n-2)(n-4)}{8}$$

n が奇数のときの鈍角三角形の数**手順 1**

正 n 角形の 1 つの頂点を A とし、
 A から反時計回りに順に各頂点に $1, 2, \dots, k, \dots, n-1$ と番号をつけ、
 頂点 A が鈍角の場合で考える。

手順 2

頂点 k を選ぶと、頂点 k と円の直径をなす頂点は、

頂点の間の数が n であることから、頂点 $k + \frac{n}{2}$ である。

ところが n は奇数である。

したがって、頂点 k を選んだとき、 A が鈍角であるための残りの頂点は、

$k + \frac{n+1}{2}, k + \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n-1$ となる。

よって、頂点 k を選んだときの鈍角三角形の数を b_k とすると、

$$b_k = (n-1) - \left(k + \frac{n+1}{2}\right) + 1 = \frac{n-1}{2} - k$$

また、 $k + \frac{n+1}{2} \leq n-1$ かつ $k \geq 1$ より、 $1 \leq k \leq \frac{n-3}{2}$

よって、頂点 A が鈍角の三角形の数は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} b_k &= \frac{n-3}{2} + \frac{n-5}{2} + \frac{n-7}{2} + \dots + 3 + 2 + 1 \\ &= \frac{\frac{n-3}{2} + 1}{2} \times \frac{n-3}{2} = \frac{(n-3)(n-1)}{8} \end{aligned}$$

手順 3

鈍角になれる頂点の数は全部で n 個あるから、

$$\text{鈍角三角形の総数} = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}$$

例題 12 二項定理 / 係数を求める

(イ)

別解

$$(x - 2y + z)(x - 2y + z)(x - 2y + z)(x - 2y + z)(x - 2y + z)(x - 2y + z)(x - 2y + z)(x - 2y + z)$$

$$\begin{array}{cccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & x & -2y & -2y & -2y & z & z & z \\ x & -2y & x & -2y & -2y & z & z & z \\ x & -2y & z & x & -2y & -2y & z & z \end{array}$$

⋮

結局, x が 2 個, $-2y$ が 3 個, z が 3 個の順列と同じ結果になる。

$$\text{よって, } \frac{8!}{2!3!3!} x^2 \cdot (-2y)^3 \cdot z^3 = -4480x^2y^3z^3$$

(ロ)

別解

$$\text{与式} = (a+b)^5 \{(a+b)+2\}^4$$

 a^4b^3 の項をもつための必要条件は $(a+b)^7$ が存在することであり, $(a+b)^5$ は必ずあるから, 必要なのは $\{(a+b)^2 + 2\}^4$ の $(a+b)^2$ の項である。

$$\{(a+b)^2 + 2\}^4 \text{ の } (a+b)^2 \text{ の項は, } {}_4C_2(a+b)^2 \cdot 2^2 = 24(a+b)^2$$

$$\text{よって, } (a+b)^5 \{(a+b)+2\}^4 \text{ の } (a+b)^7 \text{ の項は, } 24(a+b)^7$$

$$\therefore 24 {}_7C_4 a^4 b^3 = 24 \times 35 a^4 b^3 = 840 a^4 b^3$$