確率

確率問題解法のコツと注意

1．すべてのものを区別すると楽に解ける場合が多い。

区別できない複数のサイコロを振っても，着色し区別してから振っても
任意の事象が起こる確率は変わらない。
ならば，区別するほうが，目の出方の組み合わせを考えるだけですむので，
楽に確率が求められる。
同様に，
くじびきの当たりくじとはずれくじ，円形テーブルの各席も区別すると，
組み合わせや円順列でないふつうの順列として扱えるので，確率を求める上で楽である。

2．分母の場合の数と分子の場合の数は同じ基準で求めないといけない。

分母が重複順列ならば分子も重複順列，分母が組合わせならば分子も組合せなど

3．複雑な事象の場合

・事象を排反に分類する
・余事象を利用する
・うまく排反に分類しようとしても分類が煩雑，困難，不可能だったりする場合は，
　ベン図を描いて，ド・モルガンの法則や加法定理の活用を考える。
　ド・モルガンの法則：$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$，　$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$
　加法定理：$P \cup Q = P + Q - P \cap Q$

4．数字ではなく文字が与えられた場合

・いきなり文字を使って解こうとせず，まず数字を代入し検証する。
・表・グラフ・樹形図・ベン図などの形で視覚化できないか試みる。
・式そのもの，式の中の共通部分，求めるべき値などは，
　文字に置き換えて考えやすくする。
　置き換えたものを処理する過程でさらに置き換える 2 重の置き換えもある。

5．必要条件から入る

直接解を求めようとせず，まず解の候補，つまり必要条件を満たすものを求め，
それぞれについて十分性を調べる。

例題 1　全順列型／全部を一列に並べる

解法 1：番号のついた席に座るとし，その席の組合せで考える。

席を左から $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ とし，

男女はいずれか 1 つの席につくとしても同じである。

特定の男女が隣り合う席の組合せは，$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8)$ の 7 通りある。

2 席の組合せは，全部で ${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ 通り。

よって，求める確率は，$\dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$

補足 1

他の男女の席の取り方については，自由である（確率 1）だから，無視してよい。

補足 2

特定の男子を A，特定の女子を B とし，順列で考えると，

A，B が隣り合うときの席の順列は，席の組合せ×$2 = 7 \times 2$

A，B の席の順列は，$8 \times 7 = 56$

よって，求める確率は，$\dfrac{7 \times 2}{56} = \dfrac{1}{4}$

解法 2：一般的な解法

特定の男子を A，特定の女子を B とし，A と B を一体とみなすと，

AB のときと BA のときとで，それぞれ 7!通りあるから，

A と B が隣り合う順列の数は，$2 \times 7!$

また，全順列の数は，$8!$

よって，求める確率は，$\dfrac{2 \times 7!}{8!} = \dfrac{1}{4}$

あるいは，

A，B と同一物体 6 個の順列で考えてもよい。

特定の男子を A，特定の女子を B とし，A と B を一体とみなすと，

AB のときと BA のときとで，それぞれ 7 通りあるから，

A と B が隣り合う順列の数は，2×7

また，全順列の数は，$\dfrac{8!}{6!}$

よって，求める確率は，$\dfrac{2 \times 7}{\frac{8!}{6!}} = \dfrac{2 \times 7}{8 \times 7} = \dfrac{1}{4}$

応用

特定の男子 1 人と特定の女子 1 人が間に 2 人を挟んで並ぶ確率を求めよ。

解

解法 1 による解き方

特定の男女の席の組合せは$(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8)$の 5 通りあり，

席の組合せそれぞれについて，特定の男女の着席の仕方は $2!$通り。

よって，特定の男女が隣り合う着席の仕方は全部で$5\times 2!=10$通り。

特定の男女の着席の仕方は全部で$8\times 7=56$通りあるから，

求める確率は，$\dfrac{10}{56}=\dfrac{5}{28}$

解法 2 による解き方

特定の男女と特定の男女に挟まれた 2 人の計 4 人を 1 体と見なすと，順列の数は $5!$

特定の男女と特定の男女に挟まれた 2 人の計 4 人の順列の数は$2!\times {}_6\mathrm{P}_2=60$

より，条件を満たす順列の数は$5!\times 60$

よって，求める確率は，$\dfrac{5!\times 60}{8!}=\dfrac{5}{28}$

例題 2　同時型／いくつかを同時に選ぶ

(1)

カードの組合せは，${}_{20}C_2 = 190$ 通り。

和が奇数となるカードの組合せは，{偶，奇} の組合せより，${}_{10}C_1 \cdot {}_{10}C_1 = 100$ 通り。

和が偶数になるのは，その余事象だから，求める確率は，$1 - \dfrac{100}{190} = \dfrac{9}{19}$

補足：順列で考えてもよい

同時に 1 と 2 を抜き出したといっても，
精密に時間を調べれば 1 の方が先だったり 2 の方が先だったりするから，
カードを順に 2 枚抜き出したとしてもよい。
この説明に無理があるなら，
厳密な意味での「同時」に複数のカードを抜き出してから，
それらを並べるという操作を行うとすると，
並べたときの順列は同様に確からしいから，
ある組合せとなる確率を求めるとき，
その組合せが含まれる順列の和を全順列の和で割ればよい。
したがって，ある組合せの確率を求めるにあたり，
順列から組合せへもっていってもよい。
たとえば，(1)では，
全順列 $= 20 \times 19$ 通り
偶，奇となるのは，10×10 通り
奇，偶となるは，10×10 通り
よって，

和が奇数となる確率は，$\dfrac{10 \times 10 + 10 \times 10}{20 \times 19} = \dfrac{10}{19}$

和が偶数になるのは，その余事象だから，求める確率は，$1 - \dfrac{100}{190} = \dfrac{9}{19}$

例題 3　サイコロ型について

「サイコロ型の組合せ（元に戻す型）は同様に確からしくはない」について

区別のない 2 個のサイコロを同時に振ったとき，

出る目の組合せが$\{1,1\}$になる確率と$\{1,2\}$になる確率を求めよ。

という問題で，

目の出方の組合せの総数は，異なる目の出方＋同じ目の出方より，${}_6C_2+6=21$通り。

よって，目の組合せが$\{1,1\}$となる確率も$\{1,2\}$となる確率も$\frac{1}{21}$とするのが誤りであるのは，

「同じ目が出ること異なる目がでることは同様に確からしい」

と決めてかかっているからである。

サイコロを順に振っても組合せの確率は変わらないから，それで考察すると，

組合せが$(1,1)$になる確率

最初のサイコロの目の出方が 1 で，その確率は$\frac{1}{6}$

次のサイコロの目の出方の 1 のみだから，その確率は$\frac{1}{6}$

よって，組合せが$(1,1)$となる確率$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

組合せが$\{1,2\}$となる確率

最初のサイコロの目が 1 または 2 で，その確率は$\frac{1}{3}$

次のサイコロの目の出方は，最初のサイコロの目が 1 ならば 2，2 ならば 1 と，

1 通りしか許されないから，その確率は$\frac{1}{6}$

よって，組合せが$\{1,2\}$となる確率$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

同じ目の組合せの場合，最初のサイコロの目の出方が 1 通りしか許されないのに対し，

異なる目の組合せの場合では 2 通り許されるという点で異なるため，

同じ目が出ることと異なる目がでることは同様に確からしくない。

（ランダムウォークの経路別確率の考え方と似ているような気がする）

また，サイコロを順に振って組合せの確率を求める方法は，

確率を順列から求める方法と同じだから，

カードを引いては元に戻すなどサイコロ型の組合せ問題においては，

順列で考えて解かなければならない。

例題 5　反復試行／最大確率

確率を表す数列 P_n が $n=k$ （$1 \le k \le 9$）で最大であるためには，

$P_{k-1} \le P_k$ かつ $P_k \ge P_{k+1}$ であればよい。

$$P_{k-1} = {}_{10}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{11-k} = \frac{10!}{(11-k)!(k-1)!}\frac{3^{11-k}}{4^{10}}$$

$$P_k = {}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} = \frac{10!}{(10-k)!k!}\frac{3^{10-k}}{4^{10}}$$

$$P_{k+1} = {}_{10}\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{9-k} = \frac{10!}{(9-k)!(k+1)!}\frac{3^{9-k}}{4^{10}}$$

より，

$P_{k-1} \le P_k$ のとき，

$$\frac{10!}{(11-k)!(k-1)!}\frac{3^{11-k}}{4^{10}} \le \frac{10!}{(10-k)!k!}\frac{3^{10-k}}{4^{10}}$$

$$\therefore \frac{3}{11-k} \le \frac{1}{k}$$

$$\therefore \frac{11-k}{3} \ge k$$

$$\therefore 4k \le 11$$

$$\therefore 1 \le k \le 2 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$P_k \ge P_{k+1}$ のとき

$$\frac{10!}{(10-k)!k!}\frac{3^{10-k}}{4^{10}} \ge \frac{10!}{(9-k)!(k+1)!}\frac{3^{9-k}}{4^{10}}$$

$$\therefore \frac{3}{10-k} \ge \frac{1}{k+1}$$

$$\therefore \frac{10-k}{3} \le k+1$$

$$\therefore 4k \ge 7$$

$$\therefore 2 \le k \le 9 \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

①かつ②より，　$k=2$

このとき，　$P_1 \le P_2 \ge P_3 \ge P_4 \cdots \ge P_9 \ge P_{10}$ となるので，

求める n の値は 2 である。

例題 6　状況変化型／ポリアの壷の問題

(1)

赤玉だけを取り出し続けるから

試行回目	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-1$	n
総数	2	3	4	$\cdots$	$k+1$	$\cdots$	n	$n+1$
赤玉	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-1$	n
白玉	1	1	1	1	1	1	1	1

よって，求める確率は，$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

別解

漸化式で解く

求める確率を P_n（n は 2 以上の自然数）とすると，

試行を n 回行った後の袋に入っている白玉の個数が 1 個であるための必要条件は，

試行を $n-1$ 回行った後の袋に入っている白玉の個数が 1 個であることであり，

その確率は P_{n-1} である。

また，このとき n 回目の試行で赤玉を取りだす確率は，$\frac{n}{n+1}$ だから，

$$P_n=\frac{n}{n+1}\cdot P_{n-1}$$

よって，

$$P_n=\frac{n}{n+1}\cdot P_{n-1}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot P_{n-2}=\cdots=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n+1}$$

(2)

n 回中 1 回だけ白玉を取り出せばよい。

k 回目のみ白玉を取り出したとすると，

$k-1$ 回目までと $k+1$ 回目から n 回目までは赤玉だけを取り出すことになる。

k 回目に初めて白玉を取り出す確率

$$\frac{1}{k+1} \quad \cdots ①$$

$k-1$ 回目まで赤玉だけを取り出す確率

(1)より，$\dfrac{1}{(k-1)+1}=\dfrac{1}{k} \quad \cdots ②$

$k+1$ 回目から n 回目までは赤玉だけを取り出す確率

下表より，$\dfrac{k}{k+2}\cdot\dfrac{k+1}{k+3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n+1}=\dfrac{k(k+1)}{n(n+1)} \quad \cdots ③$

試行回目	$k+1$	$k+2$	$\cdots$	$n-1$	n
総数	$k+2$	$k+3$	$\cdots$	n	$n+1$
赤玉	k	$k+1$	$\cdots$	$n-2$	$n-1$
白玉	2	2	2	2	2

k 回目のみ白玉を取り出す確率は，①かつ②かつ③より，

$$\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{k(k+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

白玉を取り出す可能性があるの，1 回目～n 回目の n 通りあるから，

求める確率は，$n\times\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n+1}$

あるいは，

k 回目のみ白玉を取り出す場合について下表にまとめると，

試行回目	1	2	3	$\cdots$	$k-1$	k	$k+1$	$\cdots$	$n-1$	n
総数	2	3	4	$\cdots$	k	$k+1$	$k+2$	$\cdots$	n	$n+1$
赤玉	1	2	3	$\cdots$	$k-1$	k	k	$\cdots$	$n-2$	$n-1$
白玉	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2

$$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{k-1}{k}\times\frac{1}{k+1}\times\frac{k}{k+2}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

白玉を取り出す可能性があるの，1 回目～n 回目の n 通りあるから，

求める確率は，$n\times\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n+1}$

別解

漸化式で解く

試行を n 回行った後の袋に入っている白玉の数が 2 個である確率を Q_n とすると，

試行を n 回行った後の袋に入っている白玉の数が 2 個であるための必要条件は，

試行を $n-1$ 回行った後の袋に入っている白玉の数が 1 個か 2 個であることである。

（ｉ）

試行を $n-1$ 回行った後の袋に入っている白玉の数が 1 個で n 回の試行で 2 個となる確率

試行を $n-1$ 回行った後の袋に入っている白玉の数が 1 個の確率は，

(1)より，$\dfrac{1}{(n-1)+1}=\dfrac{1}{n}$

また，n 回目に白玉を取り出す確率は，$\dfrac{1}{n+1}$

よって，求める確率は，$\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

（ⅱ）

試行を $n-1$ 回行った後の袋に入っている白玉の数が 2 個で，n 回の試行でも 2 個の確率

試行を $n-1$ 回行った後の袋に入っている白玉の数が 2 個の確率は，Q_{n-1}

n 回の試行で赤玉を取り出すから，その確率は，$\dfrac{n-1}{n+1}$

よって，求める確率は，$\dfrac{n-1}{n+1}\cdot Q_{n-1}$

（ｉ），（ⅱ）より，

$$Q_n=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{n-1}{n+1}Q_{n-1}$$

$\therefore n(n+1)Q_n-n(n-1)Q_{n-1}=1$

$A_n=n(n+1)Q_n$ とすると，$A_n-A_{n-1}=1$ より，

A_n は，初項 $A_0=0$，公差 1 の等差数列だから，$A_n=n$

$\therefore n=n(n+1)Q_n$

$$\therefore Q_n=\frac{1}{n+1}$$

補足

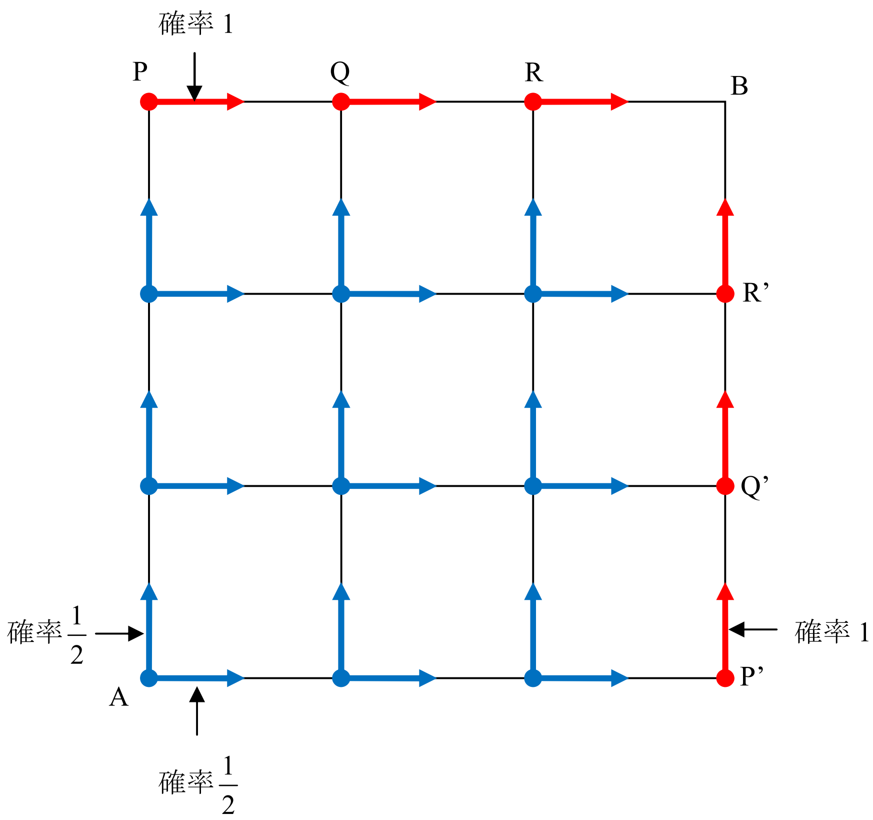
n を 2 以上の整数とすると，

A_n は，初項 $A_1=2(2-1)Q_1=2\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=1$，公差 1 の等差数列だから，$A_n=n$

例題 7　ランダムウォーク

経路別確率の例

A から B へ最短となる経路を選択しながら進むときの各交点での経路選択の確率



A→P→B の確率

A→P の確率×P→B の確率＝$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 = \frac{1}{8}$

A→P'→B の確率

P と P'の AB に関する対称性から，$\frac{1}{8}$

P を通らないで，A→Q→B の確率

A→Q の経路の取り方は，A→Q の全経路の数から A→P→Q の経路の数を引けばよい。

$\therefore {}_4C_1 - 1 = 3$

また，この経路の各交点において確率 $\frac{1}{2}$ で進路をとるから，

その確率は，$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

よって，P を通らない A→Q の確率×Q→B の確率＝$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 1 = \frac{3}{16}$

P'を通らないで，A→Q'→B の確率

Q と Q'の AB に関する対称性から，$\dfrac{3}{16}$

P，Q を通らないで，A→R→B の確率

A→R の経路の取り方は，A→R の全経路の数から A→Q→R の経路の数を引けばよい。

$\therefore {}_5\mathrm{C}_2 - {}_4\mathrm{C}_1 = 6$

また，この経路の各交点において確率$\dfrac{1}{2}$で進路をとるから，

その確率は，$6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

よって，P を通らない A→Q の確率×Q→B の確率＝$6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\times 1=\dfrac{3}{16}$

P'，Q'を通らないで，A→R'→B の確率

R と R'の AB に関する対称性から，$\dfrac{3}{16}$

例題 8　漸化式の活用　目標に至る手続きを細かくし，順に考える。

$P(1)$について

1 本のロープが輪になる確率だから，その確率は，1

$P(2)$について

順に結んでいくとすると，

2 本のロープ→1 本のロープ→輪

となる。

2 本のロープ→1 本のロープの確率

任意の端が，選択可能な 3 端から，輪にならない 2 端を選べばよいから，

その確率は，$\dfrac{2}{3}$

1 本のロープ→輪の確率

$P(1)$の確率だから，1

よって，$P(2)=\dfrac{2}{3}\cdot P(1)=\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{2}{3}$

$P(3)$について

順に結んでいくとすると，

3 本のロープ→2 本のロープ→1 本のロープ→輪

となる。

3 本のロープ→2 本のロープの確率

任意の端が，選択可能な 5 端から，輪にならない 4 端を選べばよいから，

その確率は，$\dfrac{4}{5}$

2 本のロープ→1 本のロープ→輪の確率

$P(2)$の確率だから，$\dfrac{2}{3}$

よって，$P(3)=\dfrac{4}{5}\cdot P(2)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{15}$　・・・**(1)の答**

$P(4)$について

順に結んでいくとすると，

4 本のロープ→3 本のロープ→2 本のロープ→1 本のロープ→輪

となる。

4 本のロープ→3 本のロープの確率

任意の端が，選択可能な 7 端から，輪にならない 6 端を選べばよいから，

その確率は，$\dfrac{6}{7}$

3 本のロープ→輪の確率

$P(3)$ の確率だから，$\dfrac{8}{15}$

よって，$P(4)=\dfrac{6}{7}\cdot P(3)=\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{8}{15}=\dfrac{16}{35}$　　・・・**(1)の答**

$P(n+1)$について

順に結んでいくとすると，

$n+1$本のロープ→n本のロープ→$n-1$本のロープ→・・・→1 本のロープ→輪

となる。

$n+1$本のロープ→n本のロープの確率

任意の端が，選択可能な$2n+1$端から，輪にならない$2n$端を選べばよいから，

その確率は，$\dfrac{2n}{2n+1}$

n本のロープ→$n-1$本のロープ→・・・→1 本のロープ→輪の確率

$P(n)$のことである。

よって，$P(n+1)=\dfrac{2n}{2n+1}\cdot P(n)$

$\therefore\dfrac{P(n+1)}{P(n)}=\dfrac{2n}{2n+1}$　　・・・**(2)の答**

例題 9　対等性の活用

(2)

△ABC と合同な三角形になる確率

A を 1 頂点とする三角形は，${}_7C_2 = 21$ 個つくることができる。

△ABC と合同な A を 1 頂点とする三角形は，

A と同一平面上の A を除く 3 頂点から 2 頂点を選べばよく，

そのような平面は 3 面あるから，

${}_3C_2 \times 3 = 9$ 個つくることができる。

頂点の選ばれ方は同様に確からしいから，

求める確率は，$\dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$

正三角形

A を 1 頂点とする三角形は，${}_7C_2 = 21$ 個つくることができる。

正三角形の 1 辺は面の対角線であり，A を 1 頂点とする正三角形は，

A と対角線の関係にある頂点 C，F，H の 3 頂点から 2 頂点を選ぶことにより，

${}_3C_2 = 3$ 個つくることができる。

頂点の選ばれ方は同様に確からしいから，

求める確率は，$\dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$

あるいは，

立方体 ABCDEFGH は，その中に 2 個の正四面体 ACFH と正四面体 BDEG を含むから，

正三角形は全部で $2 \times 4 = 8$ 個つくることができる。

8 個の頂点からつくることができる三角形は，${}_8C_3 = 56$ 個であり，

頂点の選ばれ方は同様に確からしいから，

求める確率は，$\dfrac{8}{56} = \dfrac{1}{7}$

例題 12　期待値の定義

(1)

10 個の文章を玉，3 つの正答を白玉，7 つの誤答を黒玉に置き換え，
これらの玉が入った箱から，3 個の玉を選んだときの得点の期待値としてもよい。
ここで，
箱から全部（10 個）の玉を順に取り出していき，
取り出した順に左から並べていくと，その順列の総数は $\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}=120$
また，k 番目が白玉（正答）である場合の順列は，
k 番目が白玉である場合の数×残りの順列$=1\times\dfrac{9!}{2!\times 7!}=36$
よって，
1 回目が正の確率$=$2 回目が正の確率$=\cdots=$10 回目が正の確率$=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$
よって，
1 回目の期待値=2 回目の期待値$=\cdots=$10 回目の期待値$=a\times\dfrac{3}{10}+(-b)\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{3a-7b}{10}$
つまり，1 回あたりの得点の期待値は一様に$\dfrac{3a-7b}{10}$点である。
したがって，でたらめに 3 回選んだときの期待値は，$\dfrac{3a-7b}{10}\times 3$
$\dfrac{3a-7b}{10}\times 3=0$ より，$3a-7b=0$
よって，$a:b=7:3$

(2)

(1)より，$\dfrac{3a-7b}{10}\times 2=0\times 2=0$

例題 13　和の期待値

テキストの別解の説明

くじを A_1，A_2，B_1，B_2，B_3，B_4，C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，C_6 と区別すると，

A_1，A_2，B_1，B_2，B_3，B_4，C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，C_6 のどれを引く確率も $\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}$ である。

一方，それぞれのくじに与えられた得点（確率変数）は，

A_1，A_2 に対しては 6 点，B_1，B_2，B_3，B_4 に対しては 3 点，

C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，C_6 に対しては 0 点だから，

求める期待値は，

$$6\times\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}+6\times\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}+3\times\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}+3\times\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}+3\times\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}+3\times\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}=(6+6+3+3+3+3)\times\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}$$
$$=6$$

別解

予備知識（数学 C）

確率変数 $X+Y$ の期待値 $E(X+Y)$ について

確率変数 X と確率変数 Y の確率の関係が独立であろうと従属であろうと，

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ が成り立つ。

解

1 回目の得点を X_1，2 回目の得点を X_2，3 回目の得点を X_3 とすると，

合計得点 $X=X_1+X_2+X_3$ より，

$E(X)=E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)$

ここで，例題 12 の解法のように順列で考えると

どの回においても A を引く確率は $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，B を引く確率は $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

よって，

k 回目 $(1\leq k\leq 12)$ の得点の期待値を $E(X_k)$ とすると，

$E(X_k)=6\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}=2$

ゆえに，

$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=2+2+2=6$ $E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=2$ は，

例題 14　期待値の頻出問題／最大・最小番号

(1)

別解

カード 9 枚から 3 枚選ぶ場合の数= ${}_9\mathrm{C}_3 = 84$

X が 8 である場合の数= X が 8 以下である場合の数－ X が 7 以下である場合の数

$$= {}_8\mathrm{C}_3 - {}_7\mathrm{C}_3$$
$$= 21$$

よって，$\dfrac{21}{84} = \dfrac{1}{4}$

(2)

$X = k\ (3 \le k \le 9)$ である場合の数= ${}_k\mathrm{C}_3 - {}_{k-1}\mathrm{C}_3 = {}_{k-1}\mathrm{C}_{3-1} = {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$ より，

$X = k$ である確率= $\dfrac{\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}}{84} = \dfrac{(k-1)(k-2)}{168}\quad (3 \le k \le 9)$

以下同様

補足

パスカルの三角より，${}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$

数学 C：条件付き確率・期待値

条件付き確率

全事象の場合の数を $n(\mathrm{U})$

事象 A が起こる場合の数を $n(\mathrm{A})$

事象 B が起こる場合の数を $n(\mathrm{B})$

事象 A と事象 B の両方が起こる場合の数を $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ とすると，

事象 A が起こったという条件の下で，事象 B が起こる確率は $\dfrac{n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\mathrm{A})}$ であり，

この確率を条件 A つきの B の確率といい， $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ と表す。

よって， $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\mathrm{A})}$

あるいは， $\dfrac{n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\mathrm{A})}=\dfrac{\dfrac{n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\mathrm{U})}}{\dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{U})}}=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$ より， $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$

例

赤玉 4 個と青玉 6 個が入っている箱から，続けて 2 個取り出すとき，
最初の取り出した玉が赤玉のとき 2 回目に取り出した玉が青玉である確率を求めよ。
ただし，玉はすべて区別するものとする。

解法 1

1 回目に赤玉を取り出す確率を $P(\mathrm{A})$，
2 回目に青玉を取り出す確率を $P(\mathrm{B})$ とすると，

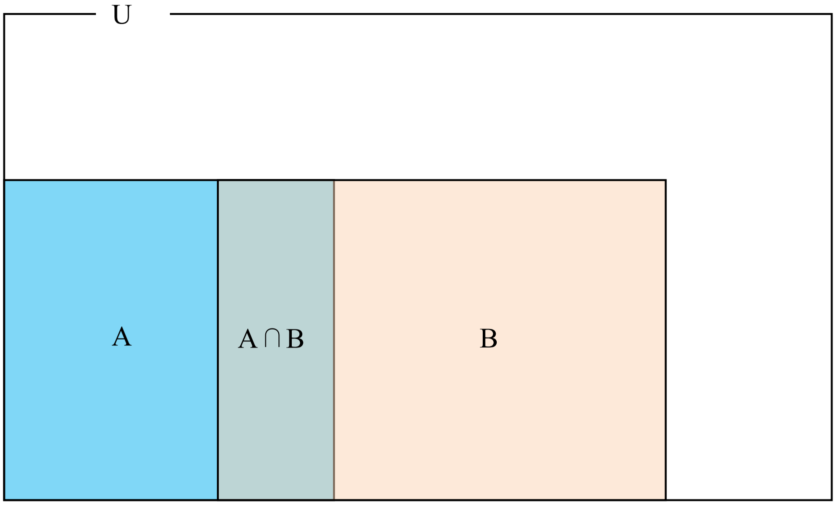
$P(\mathrm{A})=\dfrac{4}{10}$， $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{4\cdot 6}{10\cdot 9}$ より，

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}=\frac{\frac{4\cdot 6}{10\cdot 9}}{\frac{4}{10}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

解法 2

1 回目に赤玉を取り出す場合の数を $n(\mathrm{A})$，
1 回目が赤玉を 2 回目に蒼玉を取り出す場合の数を $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ とすると，
$n(\mathrm{A})=4\cdot 9$， $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=4\cdot 6$ より，

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\mathrm{A})}=\frac{4\cdot 6}{4\cdot 9}=\frac{2}{3}$$



従属事象

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ と $P(\mathrm{B})$ の関係について，$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \neq P(\mathrm{B})$ のとき，

A と B は従属であるといい，A，B を従属事象という。

従属事象の乗法定理

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$ より，$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$

独立事象

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ と $P(\mathrm{B})$ の関係が $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$ の場合もある。

これは，事象 A が起こったことが事象 B が起こる確率に影響しないことを示しており，

このときの事象 A と事象 B の関係を互いに独立といい，A，B を独立事象という。

たとえば，2 つのサイコロを振ったときに出る目の事象は独立事象である。

補足

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$ は，$\dfrac{n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{n(\mathrm{A})} = \dfrac{n(\mathrm{B})}{n(\mathrm{U})}$ を，

つまり，事象 A が起こった場合の数の中での事象 B が起こる場合の数と

全事象の中での事象 B が起こる場合の数が等しいことを意味している。

独立事象の乗法定理

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$ より，$P(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$

よって，$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$

補足

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$ ならば，$P(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$　$\therefore P(\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$

ここで，$\dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ より，$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$ ならば，$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A})$ である。

逆も成り立つから，$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \Leftrightarrow P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A})$

まとめ

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{n(\mathrm{A})} = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$，$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{n(\mathrm{B})} = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$

とくに，A と B が互いに独立な事象のとき，

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$　$(\Leftrightarrow P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}))$

期待値 Expectated Value

確率変数の期待値（確率変数の平均値）の定義

さいころを振るとき出る目，宝くじの賞金など確率に与えられている変量（変数）を確率変数（確率変量）という。

ある確率変数 X が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のどれか 1 つだけの値を必ずとり，

それぞれの値の確率を $p_1, p_2, \cdots, p_n$ $(p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1)$ とすると，

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$ を確率変数 X の期待値または平均値という。

期待値についての重要事項

確率変数： $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots, x_n\}$， $Y = \{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_j, \cdots, y_m\}$

X についての確率： $P(X = x_i) = q_i$

Y についての確率： $P(Y = y_j) = r_j$

X かつ Y についての確率： $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$

確率変数 X， Y の期待値をそれぞれ $E(X)$， $E(Y)$ とする。

1．確率変数 $X + Y$ の期待値 $E(X + Y)$ について

q_i と r_j が独立であろうと従属であろうと，

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

2．$E(aX + b) = aE(X) + b$

3．確率変数 XY の期待値 $E(XY)$ について

q_i と r_j が独立のとき

$E(XY) = E(X)E(Y)$

証明

1．の証明

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= (x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+\cdots+(x_1+y_j)p_{1j}+\cdots+(x_1+y_m)p_{1m} \\
&\quad +(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}+\cdots+(x_2+y_j)p_{2j}+\cdots+(x_2+y_m)p_{2m} \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad +(x_i+y_1)p_{i1}+(x_i+y_2)p_{i2}+\cdots+(x_i+y_j)p_{ij}+\cdots+(x_i+y_m)p_{im} \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad +(x_n+y_1)p_{n1}+(x_n+y_2)p_{n2}+\cdots+(x_n+y_j)p_{nj}+\cdots+(x_n+y_m)p_{nm} \\
&= x_1(p_{11}+p_{12}+\cdots+p_{1j}+\cdots+p_{1m}) \\
&\quad +x_2(p_{21}+p_{22}+\cdots+p_{2j}+\cdots+p_{2m}) \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad +x_i(p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{ij}+\cdots+p_{im}) \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad +x_n(p_{n1}+p_{n2}+\cdots+p_{nj}+\cdots+p_{nm}) \\
&\quad +y_1(p_{11}+p_{21}+\cdots+p_{i1}+\cdots+p_{n1}) \\
&\quad +y_2(p_{12}+p_{22}+\cdots+p_{i2}+\cdots+p_{n2}) \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad +y_j(p_{1j}+p_{2j}+\cdots+p_{ij}+\cdots+p_{nj}) \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad +y_m(p_{1m}+p_{2m}+\cdots+p_{im}+\cdots+p_{nm}) \\
&= (x_1q_1+x_2q_2+\cdots+x_iq_i+\cdots+x_nq_n)+(y_1r_1+y_2r_2+\cdots+y_jr_j+\cdots+y_mr_m) \\
&= E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

格好良く表現するなら，

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{x_i\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\left\{y_j\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_iq_i+\sum_{j=1}^{m}y_jr_j \\
&= E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

2 の証明

略

3．の証明

X と Y が互いに独立のとき $p_{ij}=q_i\cdot r_j$ だから，

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j q_i r_j$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i q_i\cdot\sum_{j=1}^{m}y_j r_j$$
$$=E(X)\cdot E(Y)$$

例題

1 から 6 までの目が $\frac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを振り，

1 回目に出る目を α，2 回目に出る目を β とする。

2 次式 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$ を $f(x)$ とおき，

$f(x)^2=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とする。

(1)　s および t の期待値を求めよ。

(2)　a,b,c および d の期待値を求めよ。

東京工業大学　2005

解

(1)

$$E(\alpha)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$
$$=\frac{7}{2}$$

同様に，$E(\beta)=\frac{7}{2}$

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$ より，

$s=-(\alpha+\beta)$，　$t=\alpha\beta$

$$\therefore E(s)=E(-\alpha-\beta)$$
$$=E(-\alpha)+E(-\beta)$$
$$=-E(\alpha)-E(\beta)$$
$$=-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=-7$$

α と β は互いに独立だから，

$$
\begin{aligned}
E(t) &= E(\alpha\beta) \\
&= E(\alpha)\cdot E(\beta) \\
&= \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} \\
&= \frac{49}{4}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x)^2 &= (x^2+sx+t)^2 \\
&= x^4+2sx^3+(s^2+2t)x^2+2stx+t^2 \\
&= x^4-2sx^3+(\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)x^2-2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)x+\alpha^2\beta^2
\end{aligned}
$$

$$E(a)=E(-2s)=-2E(s)=-14$$

$$
\begin{aligned}
E(b) &= E(\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)=E(\alpha^2)+E(\beta^2)+E(4\alpha\beta) \\
&= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)+\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)+4E(\alpha)E(\beta) \\
&= \frac{91}{6}+\frac{91}{6}+4\cdot\frac{49}{4} \\
&= \frac{238}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(c) &= E(-2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)) \\
&= -2E(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2) \\
&= -2\{E(\alpha^2\beta)+E(\alpha\beta^2)\} \\
&= -2\{E(\alpha^2)E(\beta)+E(\alpha)E(\beta^2)\} \\
&= -2\left(\frac{91}{6}\cdot\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{91}{6}\right) \\
&= -\frac{637}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(d) &= E(\alpha^2\beta^2) \\
&= E(\alpha^2)E(\beta^2) \\
&= \frac{91}{6}\cdot\frac{91}{6} \\
&= \frac{8281}{36}
\end{aligned}
$$