平面図形

メネラウスの定理とチェバの定理をまとめて覚える方法

三角形 ABC の辺を AB，BC，CA と表し，

それぞれの辺の内分点・外分点を P，Q，R とすると，

比の取り方は下表となる。

辺	内分点・外分点	比の取り方
AB	**P**	**AP/PB**
BC	**Q**	**BQ/QC**
CA	**R**	**CR/RA**

すると，メネラウスの定理の式とチェバの定理の式は，

$$\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PB}}\times\frac{\mathbf{BQ}}{\mathbf{QC}}\times\frac{\mathbf{CR}}{\mathbf{RA}}=1$$

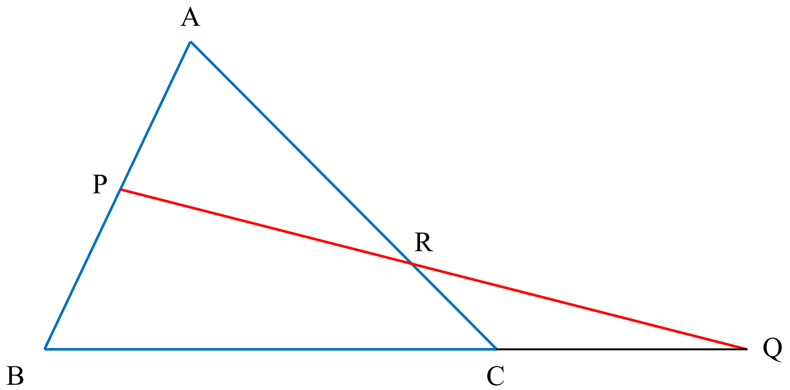
と統一できる。

後は，

外分点の数が偶数のときは，「チェバの定理より～」

外分点の数が奇数のときは，「メネラウスの定理より～」

とすればよい。



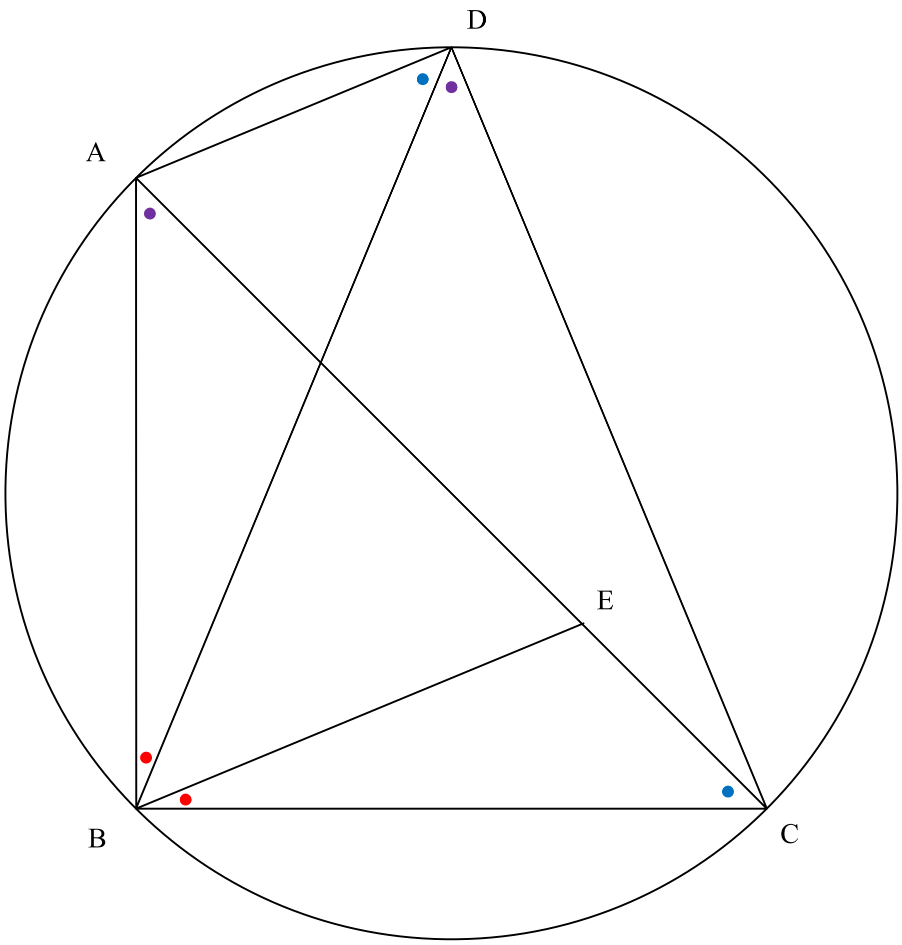
トレミーの定理

弦の長さを求めるのに便利

円に内接する四角形 ABCD について,

対角線の長さの積＝対辺の長さの積の和,

すなわち $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ が成り立つ。



証明

対角線 AC 上に∠ABD＝∠CBE となる点 E をとる。

△ABD ∽ △EBC より, AD : EC＝BD : BC

$\therefore BD \cdot EC = BC \cdot DA$　・・・①

△DBC ∽ △ABE より, DC : AE＝BD : BA

$\therefore BD \cdot AE = AB \cdot CD$　・・・②

①＋②より,

$BD \cdot (AE + EC) = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

よって,

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

例題 5　正五角形

正 n 角形問題を解くとき注目すべき点・角・図形

点について

頂点，辺の中点，外接円の中心

角について

円周角，中心角

図形について

頂点を結んでできる平行四辺形（ひし形）または三角形

頂点，外接円の中心，辺の中点でできる直角三角形

外接円の面積　別解 1

$$\begin{aligned}\mathrm{AO} &= \mathrm{AM} + \mathrm{MO} \\ &= \sqrt{\mathrm{AE}^2 - \mathrm{ME}^2} + \sqrt{\mathrm{OE}^2 - \mathrm{ME}^2} \\ &= \sqrt{1 - \mathrm{ME}^2} + \sqrt{\mathrm{OE}^2 - \mathrm{ME}^2}\end{aligned}$$

外接円の半径を r とすると， $\mathrm{AO} = \mathrm{OE} = r$ より，

$$r = \sqrt{1 - \mathrm{ME}^2} + \sqrt{r^2 - \mathrm{ME}^2}$$

$$\therefore r - \sqrt{1 - \mathrm{ME}^2} = \sqrt{r^2 - \mathrm{ME}^2}$$

$$\therefore \left(r - \sqrt{1 - \mathrm{ME}^2}\right)^2 = \left(\sqrt{r^2 - \mathrm{ME}^2}\right)^2$$

$$\therefore r = \frac{1}{2\sqrt{1 - \mathrm{ME}^2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \pi r^2 &= \frac{\pi}{4\left(1 - \mathrm{ME}^2\right)} = \frac{\pi}{4\left\{1 - \left(\frac{\mathrm{BE}}{2}\right)^2\right\}} \\ &= \frac{\pi}{4\left\{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right\}} \\ &= \frac{2\pi}{5 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10}\pi\end{aligned}$$

外接円の面積　別解 2

外接円の半径を r とする。

四角形 ABOE の面積を

底辺 BE の三角形 ABE の面積と底辺 BE の三角形 OBE の面積の和として求めると，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AM}+\frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{OM}&=\frac{1}{2}\mathrm{BE}(\mathrm{AM}+\mathrm{OM})\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{OA}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}r\\
&=\frac{1+\sqrt{5}}{4}r
\end{aligned}
$$

四角形の面積を

底辺 AB の三角形 AOB の面積と底辺 AE の三角形 AOE の面積の和として求めると，

三角形 AOB の面積＝三角形 AOE の面積より，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH}\times 2&=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH}\\
&=1\cdot\sqrt{\mathrm{AO}^2-\mathrm{AH}^2}\\
&=\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\\
&=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

よって，

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4}r=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}$$

$$\therefore (1+\sqrt{5})r=\sqrt{16r^2-4}$$

$$\therefore \left\{(1+\sqrt{5})r\right\}^2=\left(2\sqrt{4r^2-1}\right)^2$$

$$\therefore (6+2\sqrt{5})r^2=16r^2-4$$

$$\therefore (5-\sqrt{5})r^2=2$$

$$\therefore \pi r^2=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\pi=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\pi$$

例題 11　共通接線

別解

OA と OB を余弦定理を使って求める。

円外の点からの接線より，$\mathrm{MA}=\mathrm{MO}=\mathrm{MB}$　・・・①

$\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$ より，M は AB の中点　・・・②

$\mathrm{AB}=2\sqrt{Rr}$　・・・③

①，②，③より，

$\mathrm{MA}=\mathrm{MO}=\mathrm{MB}=\sqrt{Rr}$

四角形 ACOM について，

$\angle\mathrm{CAM}+\angle\mathrm{MOC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ より，

$\angle\mathrm{ACO}+\angle\mathrm{OMA}=180^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{OMA}=180^\circ-\angle\mathrm{ACO}$

ここで OA について，

三角形 ACO と余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2&=\mathrm{CA}^2+\mathrm{CO}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CO}\cos\angle\mathrm{ACO}\\&=2R^2-2R^2\cos\angle\mathrm{ACO}\quad\cdots④\end{aligned}$$

三角形 AMO と余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2&=\mathrm{MA}^2+\mathrm{MO}^2-2\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MO}\cos\angle\mathrm{AMO}\\&=2Rr-2Rr\cos(180^\circ-\angle\mathrm{ACO})\\&=2Rr+2Rr\cos\angle\mathrm{ACO}\quad\cdots⑤\end{aligned}$$

④，⑤より，

$2R^2-2R^2\cos\angle\mathrm{ACO}=2Rr+2Rr\cos\angle\mathrm{ACO}$

$\therefore 2R(R+r)\cos\angle\mathrm{ACO}=2R(R-r)$

$\therefore \cos\angle\mathrm{ACO}=\dfrac{R-r}{R+r}$

これを④に代入することにより，

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2&=2R^2-2R^2\cdot\frac{R-r}{R+r}\\&=2R^2\cdot\frac{2r}{R+r}\\&=4R^2\cdot\frac{r}{R+r}\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{OA}=2R\sqrt{\dfrac{r}{R+r}}$

四角形 ACOM について

$$\angle\mathrm{OMB}=180^\circ-\angle\mathrm{AMO}=\angle\mathrm{ACO}=\frac{R-r}{R+r}$$

三角形 OMB と余弦定理より，

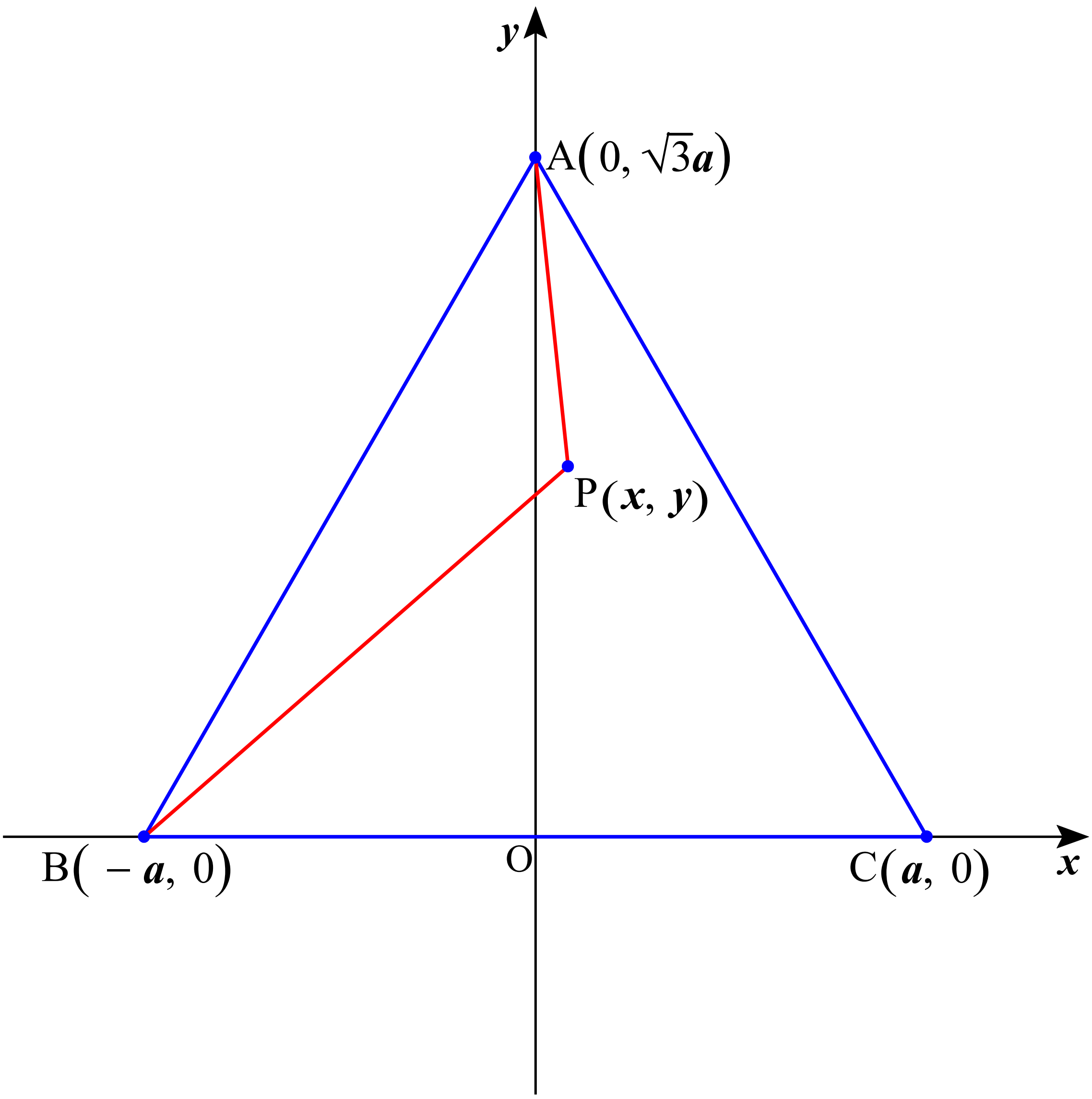
$$\begin{aligned}\mathrm{OB}^2&=\mathrm{MB}^2+\mathrm{MO}^2-2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{MO}\cos\angle\mathrm{OMB}\\&=2Rr-2Rr\cdot\frac{R-r}{R+r}\\&=2Rr\cdot\frac{2r}{R+r}\\&=4r^2\cdot\frac{R}{R+r}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{OB}=2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$$

例題 12　アポロニウスの円

別解

xy 直交座標系に $A(0, \sqrt{3}a)$，$B(-a, 0)$，$C(a, 0)$ を頂点とする正三角形とその内部に点 $P(x, y)$ をとっても一般性は失われない。



$AP^2 = x^2 + (y - \sqrt{3}a)^2$　・・・①

$BP^2 = (x + a)^2 + y^2$　・・・②

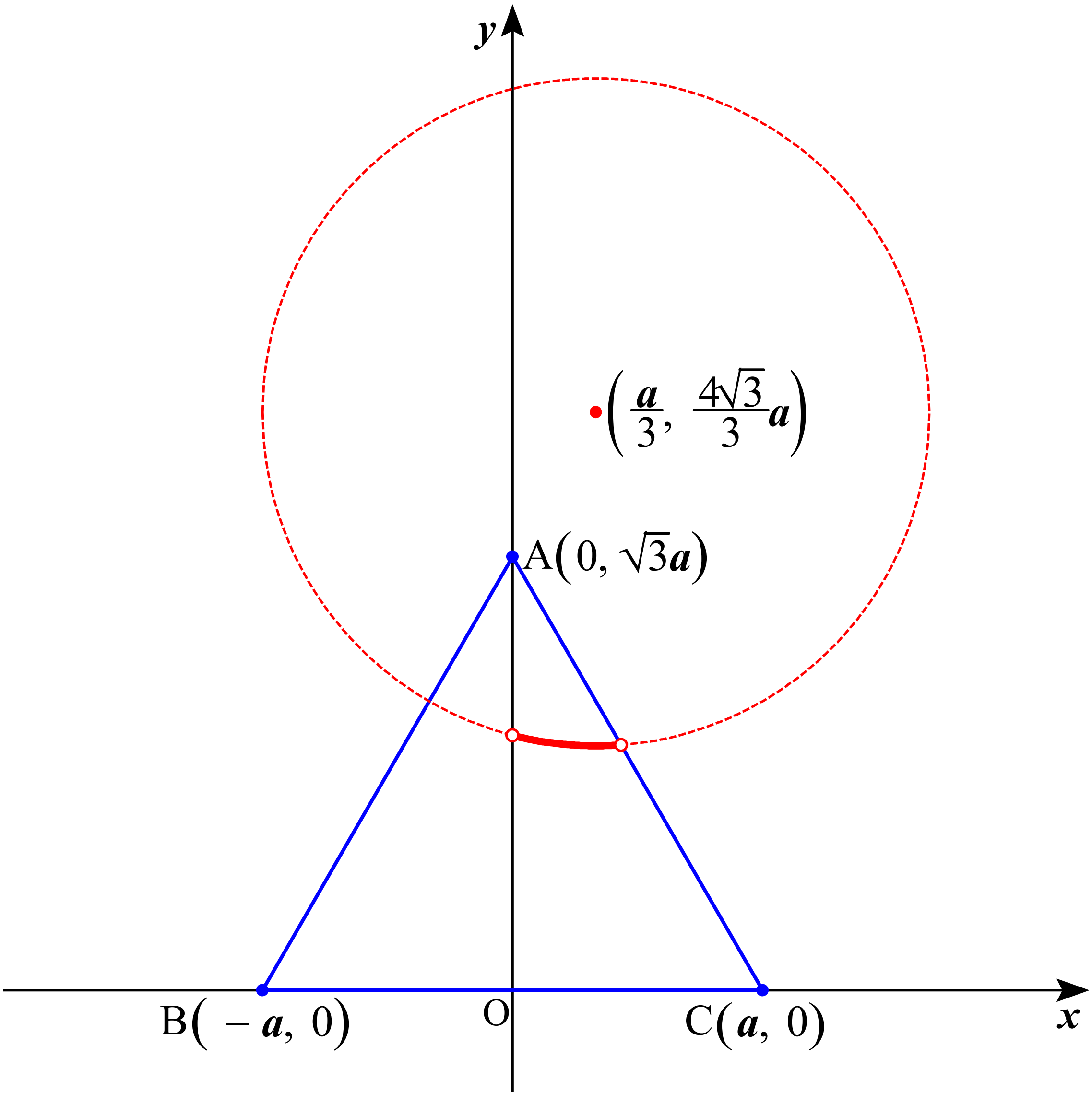
$2AP = BP$ より $4AP^2 = BP^2$　・・・③

①，②，③より，

$4x^2 + 4(y - \sqrt{3}a)^2 = (x + a)^2 + y^2$

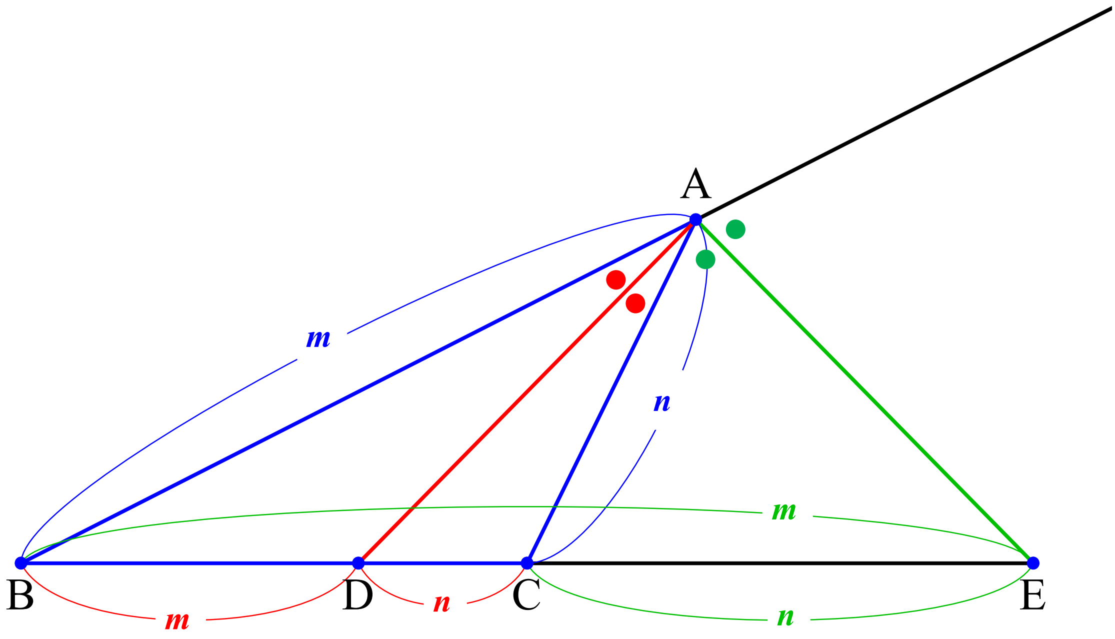
$$\therefore \left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4\sqrt{3}}{3}a\right)^2=\left(\frac{4}{3}a\right)^2$$

これと BP > CP より，
点 P の軌跡は，
中心を $\left(\frac{a}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}a\right)$，半径を $\frac{4}{3}a$ とする円周の正三角形 ABC 内部の第 1 象限の部分である。



三角形の角の二等分線とアポロニウスの円

三角形の角の二等分線



点 D は三角形 ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点

点 E は直線 BC と∠A の外角の二等分線との交点とする。

このとき，

点 D は線分 BC を AB：AC に内分する点である。

よって，BD：DC＝AB：AC

点 E は線分 BC を AB：AC に外分する点である。

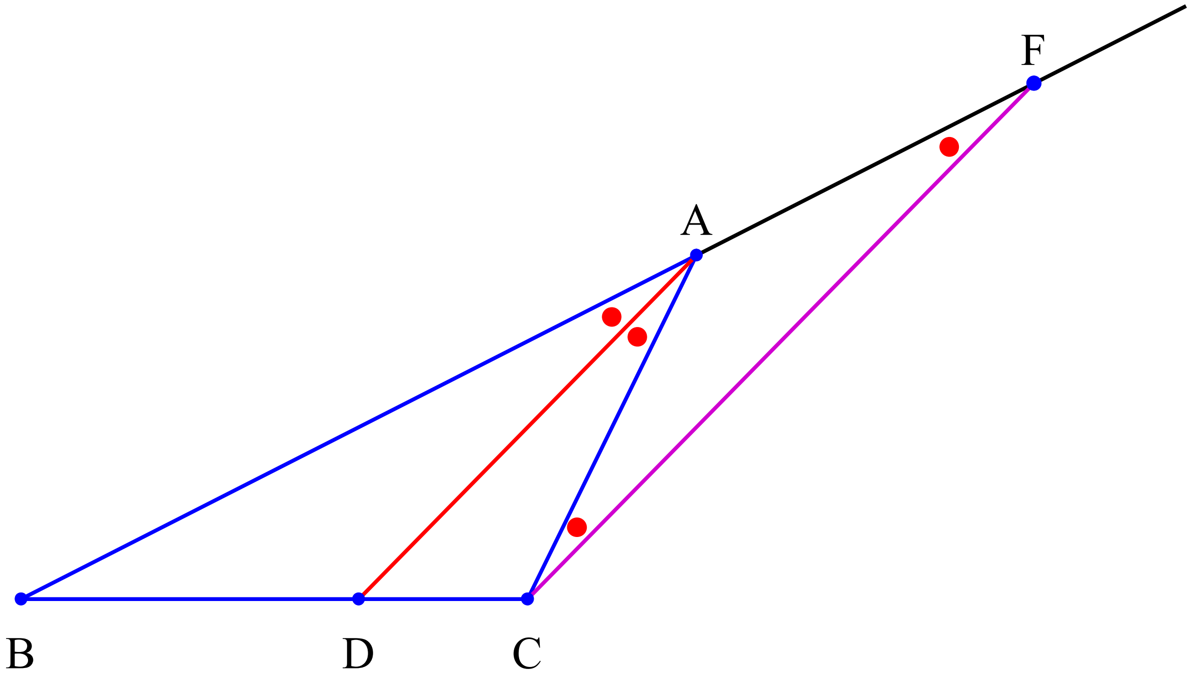
よって，BE：EC＝AB：AC

要するに，

内角の二等分線　⇒　AB：AC に内分する点

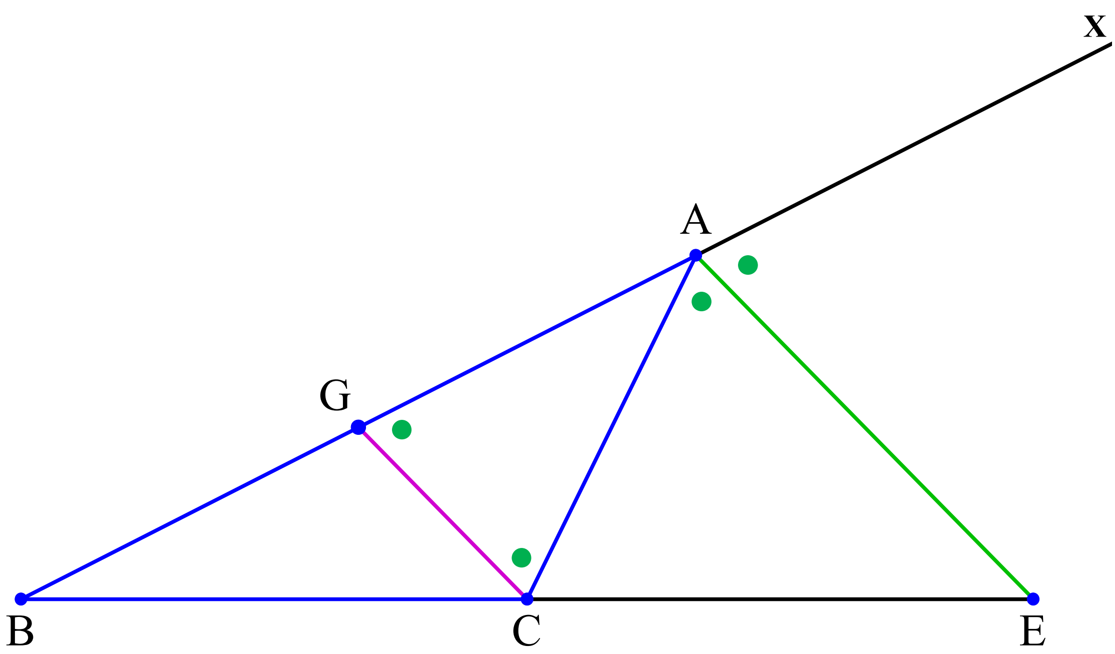
外角の二等分線　⇒　AB：AC に外分する点

証明
内角の二等分線の場合



半直線 BA と点 C を通り，線分 DA と平行な直線との交点を F とすると，
DA//CF より，
　∠BAD＝∠AFC（同位角），∠DAC＝∠ACF（錯角）だから，AC=AF
　よって，AB：AC＝AB：AF　・・・①
　平行線と線分の比より，
　AB：AF＝BD：DC　・・・②
①，②より，
AB：AC＝BD：DC

外角の二等分線の場合



点 C を通り AE と平行な直線と線分 AB との交点を G とすると，

AE//GC より，

　∠XAE＝∠AGC（同位角），∠EAC＝∠ACG（錯角）だから，AC＝AG

　よって，AB：AC＝AB：AG　・・・③

　平行線と線分の比より，

　AB：AG＝EB：EC　・・・④

③，④より，

AB：AC＝BE：EC

アポロニウスの円

平面上で 2 定点への距離の比が一定の点の軌跡がつくる円をアポロニウスの円という。

たとえば，

2 定点 B，C からの距離の比が $m : n \ (m \neq n)$ である点を A

線分 BC を $m : n$ に内分する点を D，

線分 BC を $m : n$ に外分する点を E

とすると，点 A の軌跡は，線分 DE を直径とする円を描く。

解説

AB：AC＝BD：DC＝$m : n$，AB：AC＝BE：EC＝$m : n$

より，AD は∠A の二等分線，AE は∠A の外角の二等分線である。

よって，∠DAE＝∠DAC＋∠CAE＝90°　（直径の円周角）

ゆえに，A は線分 DE を直径とする円周上の点である。