平面のベクトル

例題 1　つなぐ，伸ばす／正多角形

正 ***n*** 角形問題を解くとき注目すべき主な点・角・図形

点について

頂点，辺の中点，外接円の中心

角について

円周角，中心角

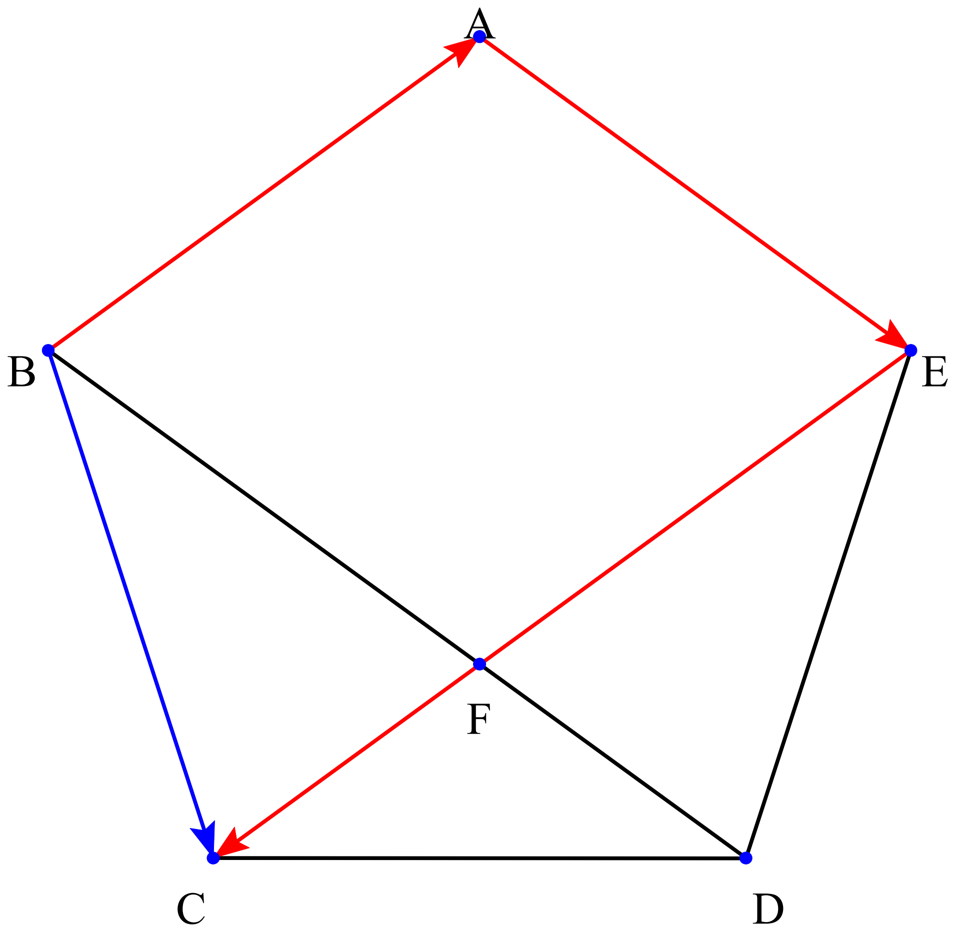
図形について

頂点を結んでできる平行四辺形（ひし形）または三角形

頂点，外接円の中心，辺の中点を頂点とする直角三角形

別解

頂点を結んでできる平行四辺形（ひし形）と三角形に注目して解く。



図より，

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}$$
$$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+k\overrightarrow{AB}\quad(\because AB//EC)$$
$$=(k-1)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$$
$$=(k-1)\vec{b}+\vec{e}$$

したがって，k の値を求めれば，$\overrightarrow{BC}$ を $\vec{b}$ と $\vec{e}$ を用いて表すことができる。

AB//EC，AE//BD，AB＝AE より，四角形 AEFB はひし形である。　・・・①

また，△DEC と△FCD について，

正多角形の性質より，∠DEC＝∠FCD，∠DCE＝∠FDC

よって，△DEC∽△FCD　・・・②

ここで，正五角形の一辺の長さを 1，FC の長さを x とおくと，

②より，DE：FC＝EC：CD

①より，EF＝AB＝1　$\therefore$ EC＝EF＋FC＝$1+x$

よって，1：x＝$(1+x)$：1

$\therefore x^2+x=1\quad \therefore x^2+x-1=0$

これと $x>0$ より，$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad \therefore EC=1+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，$\overrightarrow{EC}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB}\quad \therefore k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\therefore \overrightarrow{BC}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\vec{b}+\vec{e}$$

例題 2　分点の公式／内心など

別解

ひし形の対角線はひし形の頂点の 2 等分線であることから，

2 等分線のベクトルは 1 次独立の関係にある 2 つの単位ベクトルの和の実数倍で表せる。

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\left(\frac{\vec{p}}{c}+\frac{\vec{q}}{b}\right)$$

$$=\frac{k}{c}\vec{p}+\frac{k}{b}\vec{q} \quad ・・・①$$

あるいは，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BI}}$$

$$=\vec{p}+l\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\right)$$

$$=\vec{p}+l\left(\frac{-\vec{p}}{c}+\frac{\vec{q}-\vec{p}}{a}\right)$$

$$=\left(1-\frac{l}{c}-\frac{l}{a}\right)\vec{p}+\frac{l}{a}\vec{q}$$

より，

$$\frac{k}{c}=1-\frac{l}{c}-\frac{l}{a} \quad \therefore k=c-l-\frac{c}{a}l \quad ・・・②$$

$$\frac{k}{b}=\frac{l}{a} \quad \therefore l=\frac{a}{b}k \quad ・・・③$$

②，③より，

$$k=c-\frac{a}{b}k-\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}k$$

$$=c-\frac{a}{b}k-\frac{c}{b}k$$

$$\therefore bk=bc-ak-ck$$

$$\therefore k=\frac{bc}{a+b+c}$$

これと①より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{1}{c}\vec{p}+\frac{1}{b}\vec{q}\right)$$

例題 3　位置ベクトル

別解 1

位置ベクトル問題では，扱うベクトルの数を少なくするのがコツ。

そこで，点 A を始点とする位置ベクトルで考える。

PS の中点を点 M とすると，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AS}\right)$　・・・①

$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおくと，

条件より，

$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}\right)$　$\therefore \overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AR}$　・・・②

$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}\right)$　$\therefore \overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ}$　・・・③

③を②に代入すると，

$\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{AC}-\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ}\right)=2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ}$

また，条件より，$\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AP}$

$\therefore \overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}$　・・・④

①，④より，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

よって，PS の中点は△ABC により決まる。すなわち点 P の位置によらない。

別解 2

中点連結定理を使って解いてみる。

PS の中点を点 M とすると，

中点連結定理より，AB//PR//MC，AM//QS//BC　$\therefore$ AB//MC，AM//BC

よって，四角形 ABCM は平行四辺形である。

$\therefore \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

よって，PS の中点は△ABC により決まる。すなわち点 P の位置によらない。

補足

外心 O を始点とする位置ベクトルについて，

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OH}=\vec{h}$ と定めると，$\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

証明

△ABC の外心を O，垂心を H，線分 CE を外接円の直径，

O から線分 BC に下ろした垂線の足を D，直線 AH と線分 BC の交点を F とする。

線分 OD は線分 BC の垂直二等分線だから CD＝DB，

∠EBC は直径 CE の円周角だから∠EBC＝90°

よって，中点連結定理より，EB＝2OD　・・・①

また，

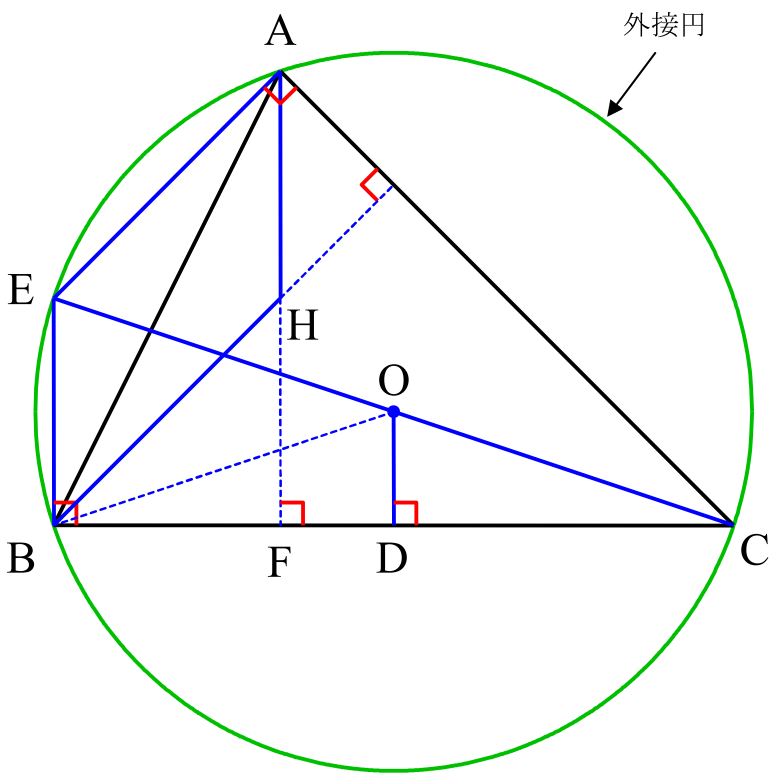
∠AFC＝90°より，EB//AH　・・・②

同様に，EA//BH　・・・③

②，③より，四角形 AEBH は平行四辺形である。

よって，AH＝EB

これと①より，AH＝2OD　・・・④

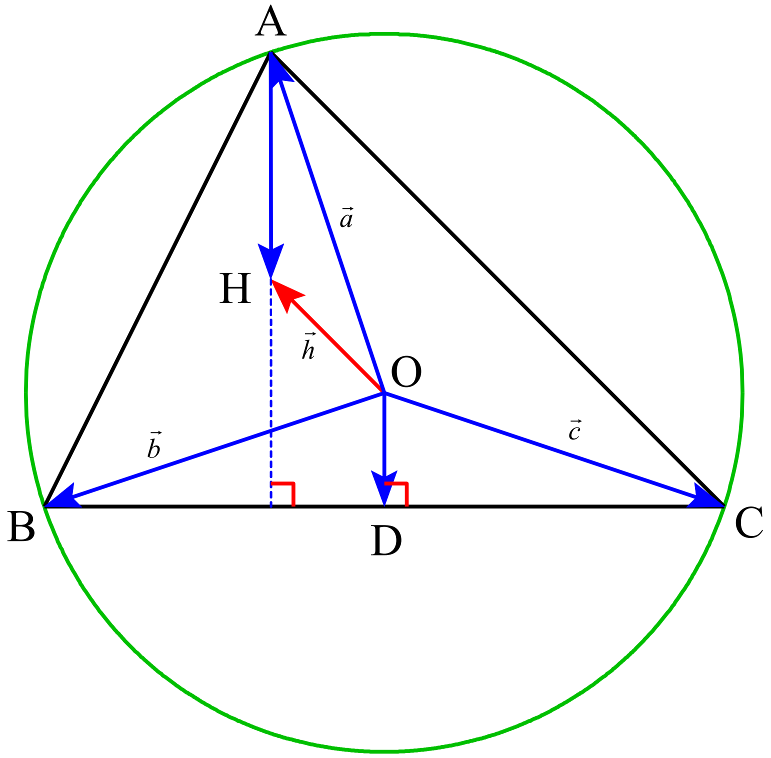


外心 O を始点とする位置ベクトルについて，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$， $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$， $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$， $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{h}$ と定めると，

AH//OD と④より， $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{b}+\vec{c}$

これと $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より， $\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



外心と垂心と重心の関係

線分 OH と線分 AD の交点を G’とすると，

AH//OD より△AG’H∽△DG’O

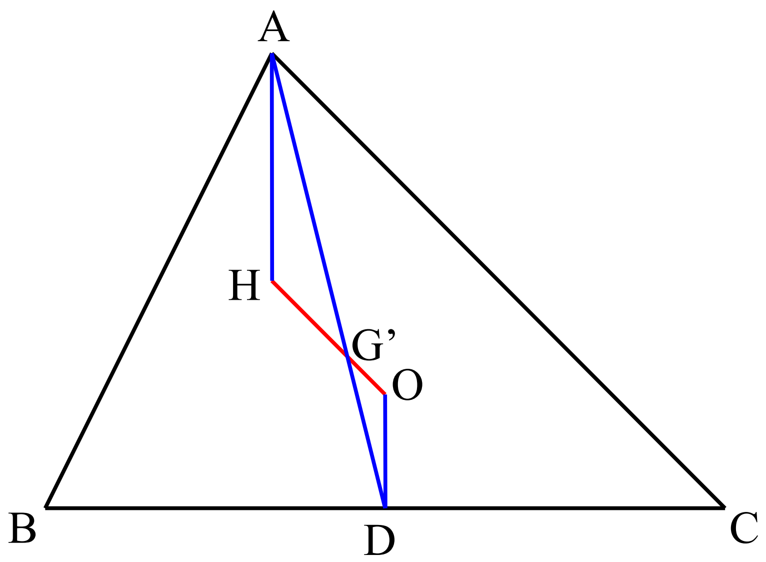
これと④より，AG’：DG’＝AH：OD＝2：1　・・・⑤

一方，△ABC の重心を G とすると，AD は辺 BC の中線だから，

AG：DG＝2：1　・・・⑥

⑤，⑥より，G’と G は同一の点であることがわかる。

よって，同一法により，△ABC の外心，垂心，重心は一直線上にある。



例題 4　$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ である点 P

別解

(1)

$$
\begin{aligned}
x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}+z\overrightarrow{\mathrm{PC}} &= -x\overrightarrow{\mathrm{AP}}+y\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+z\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) \\
&= -(x+y+z)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}+z\overrightarrow{\mathrm{AC}}
\end{aligned}
$$

これと $x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}+z\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ より，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{1}{x+y+z}\left(y\overrightarrow{\mathrm{AB}}+z\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\
&= \frac{y+z}{x+y+z}\,\frac{y\overrightarrow{\mathrm{AB}}+z\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{y+z}
\end{aligned}
$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{y\overrightarrow{\mathrm{AB}}+z\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{y+z}$ とすると，点 F は BC を z ： y に内分する点であり，

条件より，点 P は AF の中点であるから，$\dfrac{y+z}{x+y+z}=\dfrac{1}{2}$

よって，$x=y+z$

(2)

(1)より，$y=1$，$z=2$，$x=y+z=3$

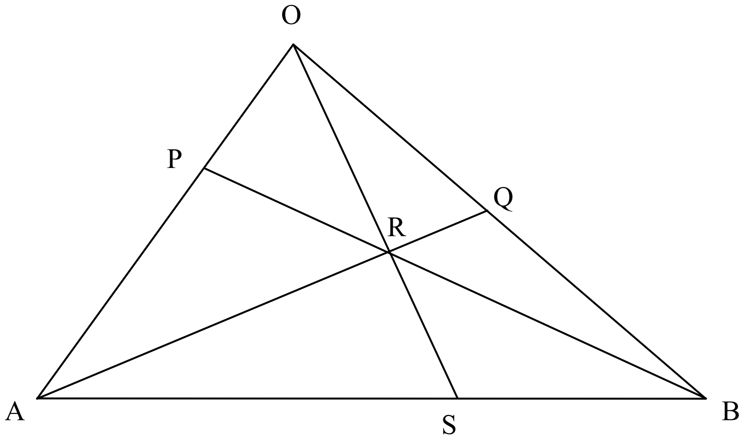
よって，x ： y ： z ＝3：1：2

例題 5　2 直線の交点／メネラウスの定理

別解

(1)

メネラウスの定理とチェバの定理を使って解く。



直線 OR と辺 AB の交点を S とすると，

三角形 OAB と点 P,S,Q について，チェバの定理より，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\times\dfrac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SB}}\times\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1$

$\therefore\dfrac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SB}}=\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{OP}}\times\dfrac{\mathrm{QO}}{\mathrm{BQ}}==\dfrac{a}{1}\times\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{b}$　$\therefore$ AS：SB＝a ： b　・・・①

三角形 OAS と点 P,B,R についてメネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\times\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BS}}\times\dfrac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RO}}=1$

$\therefore\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RS}}=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\times\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BS}}==\dfrac{1}{a}\times\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a+b}{ab}$　$\therefore \mathrm{OR}=\dfrac{a+b}{ab+a+b}\mathrm{OS}$　・・・②

①より，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{a+b}\left(b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\dfrac{1}{a+b}\left(b\vec{a}+a\vec{b}\right)$

これと②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{a+b}{ab+a+b}\cdot\frac{1}{a+b}\left(b\vec{a}+a\vec{b}\right)=\frac{b}{ab+a+b}\vec{a}+\frac{a}{ab+a+b}\vec{b}$$

(2)

三角形の内角の二等分線の公式より，OA：OB＝AS：SB

これと AS：SB＝a ： b，OA＝$|\vec{a}|$，OB＝$|\vec{b}|$ より，

a ： b ＝$|\vec{a}|$ ： $|\vec{b}|$

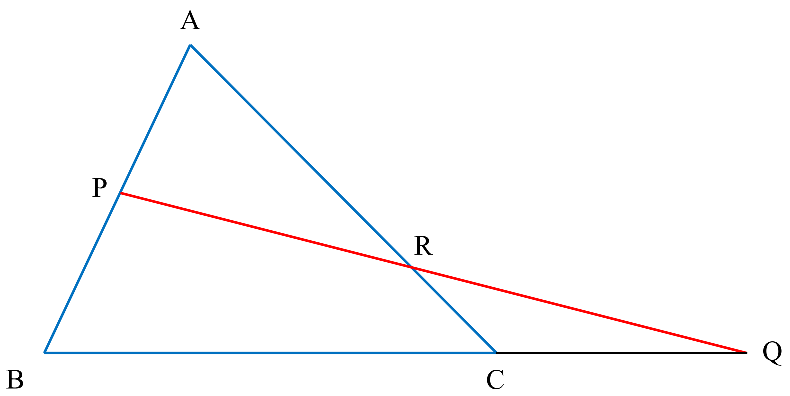
メネラウスの定理とチェバの定理をまとめて覚える方法

三角形 ABC の辺を AB，BC，CA と表し，
それぞれの辺の内分点・外分点を P，Q，R とすると，
比の取り方は下表となる。

辺	内分点・外分点	比の取り方
AB	**P**	**AP/PB**
BC	**Q**	**BQ/QC**
CA	**R**	**CR/RA**

すると，メネラウスの定理の式とチェバの定理の式は，$\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PB}}\times\frac{\mathbf{BQ}}{\mathbf{QC}}\times\frac{\mathbf{CR}}{\mathbf{RA}}=1$ と統一できる。

後は，
外分点の数が偶数のときは，「チェバの定理より～」
外分点の数が奇数のときは，「メネラウスの定理より～」
とすればよい。



例題 6　領域の表現／三角形と領域

(1)

別解：直線 OA を x 軸，直線 OB を y 軸とする座標系を使って解く。

点 O を原点，OA の向きを x 軸，OB の向きを y 軸とする座標系とり，

点 $\mathrm{A}(a,0)$，点 $\mathrm{B}(0,b)$ とすると，

$a>0, b>0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=s\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}sa\\tb\end{pmatrix}$$

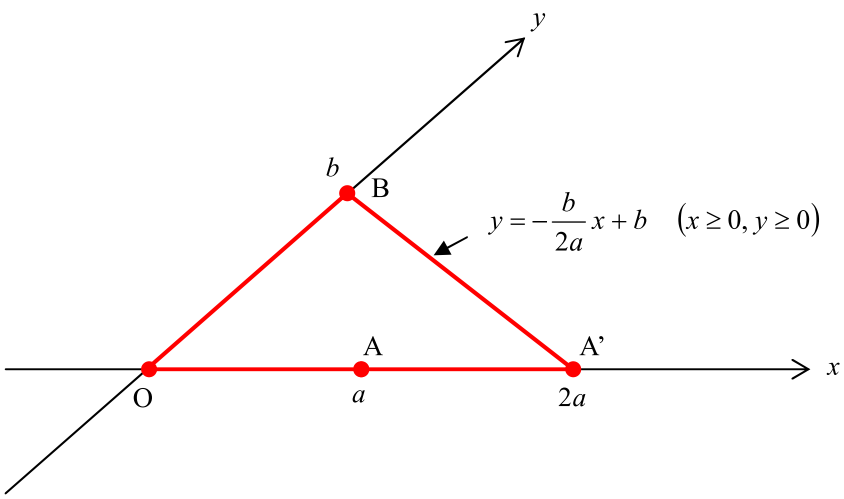
よって，動点 P を (x,y) とすると，$(x,y)=(sa,tb)$（$a>0,b>0$）より，

$s=\dfrac{x}{a}$，　$t=\dfrac{y}{b}$　（$a>0,b>0$）

$s\geq 0$，　$t\geq 0$，　$s+2t\leq 2$ より，

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{2y}{b}\leq 2$　（$x\geq 0$，　$y\geq 0$）

$$\therefore y\leq -\frac{b}{2a}x+b$$



よって，上図より，△AOB：△A'OB＝OA：OA'＝a ： $2a$ ＝1：2

これと△AOB＝1 より，△A'OB＝2

例題 7　内積の計算

別解：ふつうに解いてみる。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}\left(-2\vec{b}+\vec{c}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)$ より，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}&=\frac{1}{9}\left\{\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(-2\vec{b}+\vec{c}\right)+\left(-2\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)+\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{9}\left(-3\left|\vec{b}\right|^2+3\vec{b}\cdot\vec{c}-3\left|\vec{c}\right|^2\right)\\
&=-\frac{1}{3}\left(\left|\vec{b}\right|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2\right)\\
&=-\frac{1}{3}\left(\left|\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2+\frac{3}{4}\left|\vec{c}\right|^2\right)\\
&=-\frac{1}{3}\left(\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2+\frac{3}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right)\\
&=-\frac{1}{3}\left(9+\frac{3}{4}\cdot 4\right)\\
&=-4
\end{aligned}
$$

例題 9　内積による角度の計算

別解

直線 AP と辺 BC の交点を F とすると，

三角形 ABC と点 D,F,E について，チェバの定理より，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\times\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\times\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$

$\therefore \dfrac{2}{1}\times\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\times\dfrac{1}{3}=1$　$\therefore$ BF：FC＝3：2　・・・①

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　・・・②

三角形 ABF と点 D,C,E について，メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\times\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}}\times\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}}=1$

$\therefore \dfrac{2}{1}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}}=1$　$\therefore$ AP：PF＝5：1

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　・・・③

②，③より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

例題 10　内積と直交性／垂線の足

別解 1

余弦定理より BC＝$\sqrt{7}$

ここで，BH＝t とおくと，HC＝$\sqrt{7}-t$

△ABH について，三平方の定理より，

$$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2$$
$$=4-t^2$$

△ACH について，三平方の定理より，

$$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{CH}^2$$
$$=9-\left(\sqrt{7}-t\right)^2$$
$$=-t^2+2\sqrt{7}t+2$$

よって，$4-t^2=-t^2+2\sqrt{7}t+2$　$\therefore t=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

$\therefore$ BH：HC＝$\dfrac{1}{\sqrt{7}}$：$\sqrt{7}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$＝1：6

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

別解 2

xy 直交座標の原点を点 A，点 B を $(2,0)$，点 C を $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ としても一般性は失われない。

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

また，定数 k を用いると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2-\dfrac{1}{2}k\\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}k\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より，$-\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{2}k\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}k=0$

$\therefore k=\dfrac{1}{7}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

その 2 の解説

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の単位ベクトルは，$\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表せる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|\times\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{BH}}=\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　・・・①

一方，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角（$\angle\mathrm{ABC}$）を θ とすると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\cos\theta$　・・・②

①，②より，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BH}}&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\
&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\cos\theta}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\
&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\cos\theta}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\times\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\\
&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\theta}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\
&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}
\end{aligned}
$$

ここで，

余弦定理より $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{7}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \\ &= -3 + 4 = 1\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{BH}} = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{1}{7}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

よって，

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}} \\ &= \frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

参考：シュミットの正規直交化法

正規直交基底

ある空間を作り出す元となるベクトルをその空間の基底という。

とくに基底が互いに直交し合う単位ベクトルの場合，それを正規直交基底という。

つまり，

基底 $\{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n\}$ が正規直交基底ならば，$\begin{cases} \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 1 & (i = j) \\ \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 & (i \neq j) \end{cases}$ が成り立つ。

正規直交基底のとり方はいくらでもあり，

たとえば，

xyz 直交座標系の各軸上の単位ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は正規直交基底の 1 つである。

シュミットの正規直交化法

正規直交基底でない基底（たとえば斜交座標系）を正規直交基底に変換する方法に

シュミットの正規直交化法というものがある。

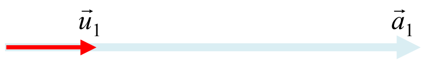
では，この方法を用いて，正規直交基底でない基底，

すなわち「大きさが 1 でない」または「互いに直交しない」基底 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n\}$ を

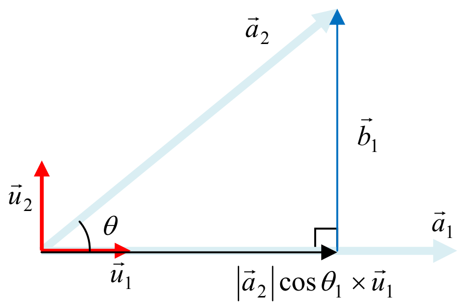
正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n\}$ に変換してみよう。

手順 1： $\vec{a}_1$ を $\vec{u}_1$ に変換する。

$\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{a}_1|}\vec{a}_1$ とするだけでよい。



手順 2： $\vec{a}_2$ を $\vec{u}_2$ に変換する。

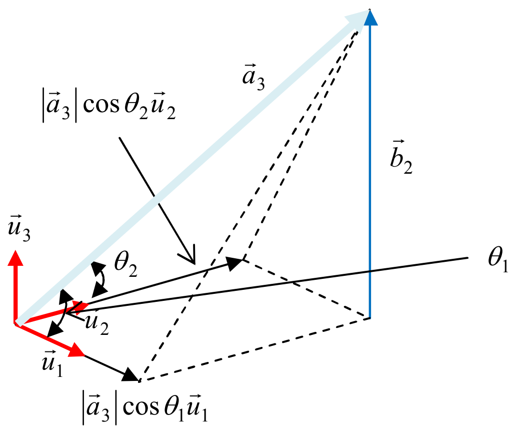


$$
\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= -|\vec{a}_2|\cos\theta \cdot \vec{u}_1 + \vec{a}_2 \\
&= -\frac{|\vec{a}_2|\cos\theta}{|\vec{a}_1|}\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\
&= -\frac{|\vec{a}_2||\vec{a}_1|\cos\theta}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\
&= -\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1 + \vec{a}_2
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \vec{b}_1 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1
$$

よって，これを $\vec{u}_2 = \dfrac{1}{|\vec{b}_1|}\vec{b}_1$ に代入すればよい。

手順 **3：** $\vec{a}_3$ を $\vec{u}_3$ に変換



$$\vec{b}_2 = \vec{a}_3 - |\vec{a}_3|\cos\theta_2 \cdot \vec{u}_2 - |\vec{a}_3|\cos\theta_1 \cdot \vec{u}_1$$

よって，これを $\vec{u}_3 = \dfrac{1}{|\vec{b}_2|}\vec{b}_2$ に代入すればよい。

$$\vdots$$

$$\vec{b}_{n-1} = \vec{a}_n - |\vec{a}_n|\cos\theta_1\vec{u}_1 - |\vec{a}_n|\cos\theta_2\vec{u}_2 - \cdots - |\vec{a}_n|\cos\theta_{n-1}\vec{u}_{n-1}$$

$$\vec{u}_n = \frac{1}{|\vec{b}_{n-1}|}\vec{b}_{n-1}$$

例題 12　三角形の面積

別解

(1)

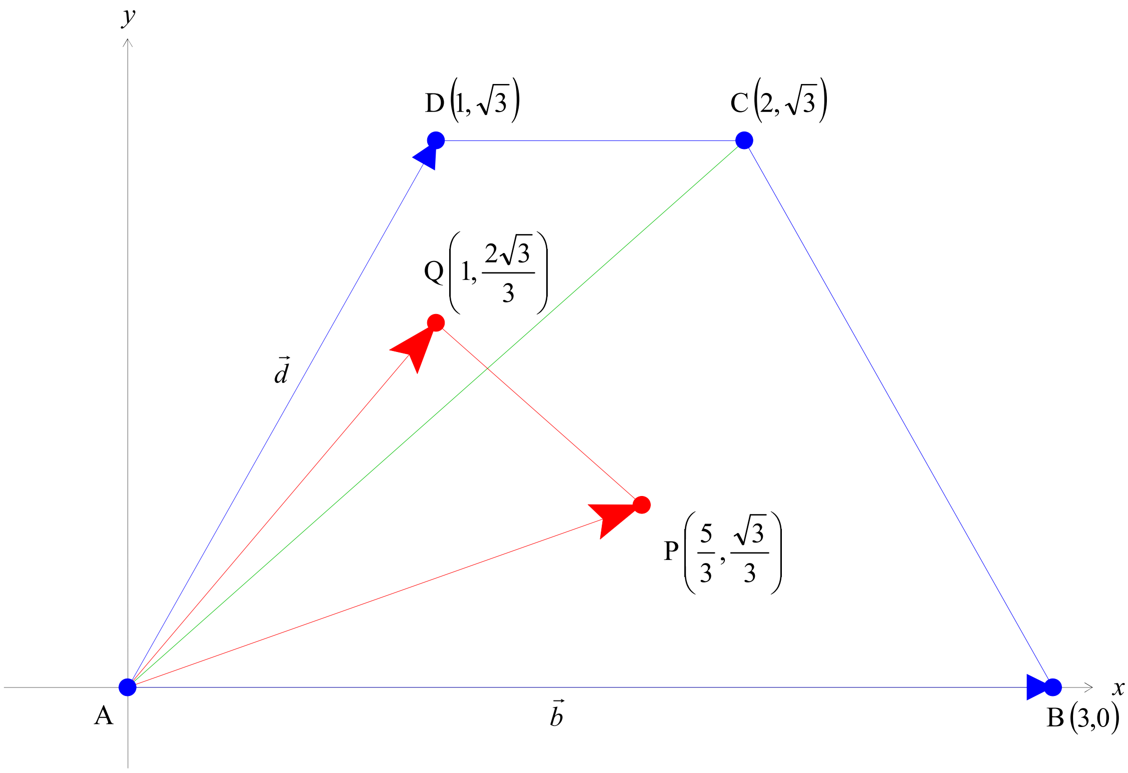
xy 直交座標の原点を A，B を $(3,0)$ とし，条件より $\mathrm{D}\left(1,\sqrt{3}\right)$，$\mathrm{C}\left(2,\sqrt{3}\right)$としても一般性は失われない。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\begin{pmatrix}1\\\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$ より，△APQ の面積$=\frac{1}{2}\left|\frac{5}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right|=\frac{7\sqrt{3}}{18}$



補足

三角形 ABC の面積を S，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}|ps-qr|}$

$S=\frac{1}{2}|ps-qr|$ は，ベクトルや図形と式の問題で威力を発揮する重要公式である。

公式の証明

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin A &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sqrt{1-\cos^2 A} \quad \left(\because 0<A<\pi \text{より} \sin A>0 \therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos A\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(p^2+q^2\right)\left(r^2+s^2\right)-\left(pr+qs\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{p^2s^2-2pqrs+q^2r^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(ps-qr\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}|ps-qr|
\end{aligned}$$

例題 13　内積の最大・最小

(ロ)

別解 1

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}x-4\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y-2\end{pmatrix}$$
$$=x(x-4)+y(y-2)$$
$$=x^2+y^2-4x-2y$$
$$=25-4x-2y$$

よって，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=k$ とおくと，

$25-4x-2y=k$

$\therefore 4x+2y+k-25=0$　・・・①

$P(x,y)$は$x^2+y^2=25$　・・・②

も満たすから，点 P は①と②の交点であり，

②の中心$(0,0)$と①の距離をlとすると，$\dfrac{|k-25|}{\sqrt{4^2+2^2}}=l\ (0<l\leq 5)$より，

$$\frac{|k-25|}{2\sqrt{5}}=l\ (0<l\leq 5)$$

よって，$|k-25|\leq 10\sqrt{5}$　$\therefore -10\sqrt{5}\leq k-25\leq 10\sqrt{5}$

$\therefore 25-10\sqrt{5}\leq k\leq 25+10\sqrt{5}$

別解 2

$P(5\cos\theta,5\sin\theta)$とおくと，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}5\cos\theta-4\\5\sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta-2\end{pmatrix}$$
$$=25-20\cos\theta-10\sin\theta$$
$$=25-10\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$$

$-1\leq\sin(\theta+\alpha)\leq 1$より，

$25-10\sqrt{5}\leq\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}\leq 25+10\sqrt{5}$

例題 14　ベクトルと平面図形／証明問題

（イ）

別解

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ と置くと，条件より，$\vec{b}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{c}\right)=-\vec{c}\cdot\vec{b}$

$\therefore \vec{b}\cdot\vec{c}-\left|\vec{b}\right|^2=-\left|\vec{c}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\therefore \left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2$ より，AB＝AC　・・・①

$\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{b}\cdot\vec{c}$ より，$\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$　$\therefore$ AB＝BC　・・・②

①，②より，AB＝BC＝CA

よって，△ABC は正三角形である。

（ロ）

別解

AB，BC，CA の中点をそれぞれ D，E，F とすると，

$\overrightarrow{OA}=-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ より，O，A，D は一直線上にありかつ AO：OD＝2：1

同様に，BO：OE＝2：1，CO：OF＝2：1

よって，点 O は△ABC の重心でもある。

点 O が△ABC の外心かつ重心であることより，

AD，BE，CF はそれぞれ辺 BC，辺 CA，辺 AB の垂直二等分線である。

よって，AB＝BC＝CA

ゆえに，△ABC は正三角形である。