空間のベクトル

例題 6　法線ベクトル

(3)

別解

D(x, y, z)とすると，$\overrightarrow{\mathrm{GD}} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3} \\ y - \frac{1}{3} \\ z - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$　・・・①

GD⊥△ABC より，$\overrightarrow{\mathrm{GD}} = k\vec{n} = u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \end{pmatrix}$　・・・②

①，②より，

$(x, y, z) = \left(u + \frac{1}{3}, u + \frac{1}{3}, u + \frac{1}{3}\right)$

D は正四面体の頂点だから，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = 8$

また，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 &= \left\{\left(u + \frac{1}{3}\right) - (-1)\right\}^2 + \left\{\left(u + \frac{1}{3}\right) - 1\right\}^2 + \left\{\left(u + \frac{1}{3}\right) - 1\right\}^2 \\ &= \left(u + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 3u^2 + \frac{24}{9}\end{aligned}$$

$\therefore 3u^2 + \frac{24}{9} = 8$　　$\therefore u^2 = \frac{16}{9}$　　$\therefore u = \pm\frac{4}{3}$

D$(x, y, z) = \left(u + \frac{1}{3}, u + \frac{1}{3}, u + \frac{1}{3}\right)$より，

D$(-1, -1, -1)$または D$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

例題 9　折れ線の長さの最小値

別解

(1)

線分 PP’の中点を $\mathrm{M}(m_x, m_y, m_z)$ とすると，

M は平面 α 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$

$$\therefore \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z + 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2m_x + 3m_y - m_z - 11 = 0 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = k\vec{n}$ （k は 0 でない実数）より，

$$\begin{pmatrix} m_x - 1 \\ m_y - 1 \\ m_z - 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (m_x, m_y, m_z) = (2k + 1, 3k + 1, -k + 1) \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$2(2k + 1) + 3(3k + 1) - (-k + 1) - 11 = 0$$

$$\therefore 14k - 7 = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{M}(m_x, m_y, m_z) = \left(3, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{P'}(3, 4, 0)$$

(2)

$\mathrm{PX} + \mathrm{QX} = \mathrm{P'X} + \mathrm{QX} \geq \mathrm{P'Q}$ より，

X が平面 α と線分 P’Q の交点のとき等号が成立する。

すなわち $\mathrm{PX} + \mathrm{QX}$ が最小となる。

そこでこの交点を $\mathrm{X}_0(x, y, z)$ とすると，

$\mathrm{X}_0(x, y, z)$ は線分 P’Q 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{QP'}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ より，

点 Q を通る方向ベクトル$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$の直線上の点である。

よって，実数tを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OX}_0}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2t\\2t\\-6+3t\end{pmatrix}$と表せる。

$\therefore \mathrm{X}_0(2t-1,2t,3t-6)$　・・・③

また，$\mathrm{X}_0(x,y,z)$は平面α上の点だから，

$\overrightarrow{\mathrm{AX}_0}\cdot\vec{n}=0$

よって，

$\left\{\begin{pmatrix}2t-1\\2t\\3t-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\-11\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-1\\2t\\3t+5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=7t-7=0\quad\therefore t=1$

これを③に代入すると，$\mathrm{X}_0=(1,2,-3)$

例題 10　四面体の体積

(1)

別解

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \cos\angle\mathrm{AOB}$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \cos\angle\mathrm{AOB} \times \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \cos\angle\mathrm{AOB}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

$$= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

$$= \frac{a-2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2 - \frac{(a-2)^2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}(a+1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}(a+1)$$

(3)

別解

平面 OAB 上の点を $\mathrm{Q}(x, y, z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} \cdot \vec{n} = 0$ より，$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x + z = 0$

よって，平面 OAB の方程式は $x + z = 0$ （y は任意の実数）

したがって，平面 OAB と点 C の距離は，$\dfrac{|2+0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$

また，(1)より，△OAB の面積＝$\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+1)$

よって，四面体 OABC の体積は，$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+1) \times \sqrt{2} = \dfrac{a+1}{3}$

例題 11　座標空間における球

(1)

力技で解いてみる。

$\mathrm{P}(x,y,z)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)=\begin{pmatrix}1-x\\-y\\-z\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}-x\\2-y\\-z\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-x\\-y\\3-z\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}-x+1\\-y\\-z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3x\\-3y+2\\-3z+6\end{pmatrix}$$
$$=(x-1)\cdot 3x+y(3y-2)+z(3z-6)$$
$$=3x^2-3x+3y^2-2y+3z^2-6z$$
$$=3\left(x^2-x+y^2-\frac{2}{3}y+z^2-2z\right)$$
$$=3\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-1)^2-\frac{49}{36}\right\}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)=0$ より，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-1)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$

よって，点 P は点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)$を中心とする半径$\frac{7}{6}$の球面上を動く。

したがって，定点 Q の座標は$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)$と推測され，これが平面 ABC の点であればよい。

そこで，次に平面 ABC の式を求める。

平面 ABC の式を $ax+by+cz+d=0$ とすると，

点 A，B，C を通ることから，

$$\begin{cases}a+d=0\\2b+d=0\\3c+d=0\end{cases}\quad\therefore a=-d,b=-\frac{d}{2},c=-\frac{d}{3}$$

よって，$d=-6$ とすると，平面 ABC の式は$6x+3y+2z-6=0$

これに$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)$を代入すると，左辺$=6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 1-6=0=$右辺 となるから，

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)$は平面 ABC 上の点である。

よって，点 P と平面 ABC 上の定点 Q$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)$の距離は常に$\frac{7}{6}$である。

(2)

△ABC の面積を外積を使って求める。（検算用）

xyz 直交座標系において，$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}=-i+3k$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\left(-\vec{i}+2\vec{j}\right)\times\left(-\vec{i}+3\vec{k}\right)\\&=-i\times\left(-i\right)+\left(-\vec{i}\right)\times 3\vec{k}+2\vec{j}\times\left(-\vec{i}\right)+2\vec{j}\times 3\vec{k}\\&=\vec{0}-3\vec{i}\times\vec{k}-2\vec{j}\times\vec{i}+6\vec{j}\times\vec{k}\\&=3\vec{j}+2\vec{k}+6i\\&=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore \Delta\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\frac{7}{2}$$

外積（ベクトル積）の活用（面積，法線ベクトル，平面の方程式）

3 次元空間の 2 つのベクトルの積が 1 つのベクトルを与えるようなベクトルの掛け算。
ベクトルの積がベクトルを与えることからベクトル積とも呼ばれる。
これに対し内積は符号と大きさをもつ量（スカラー量）を与えるので，
スカラー積とも呼ばれる。
外積を使うと，平行四辺形や三角形の面積，法線ベクトル，平面の方程式が
楽に求められる場合がある。

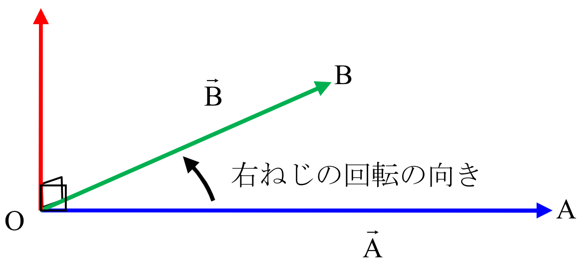
外積の表し方

$\vec{A}$ と $\vec{B}$ の外積は，$\vec{A}\times\vec{B}$ あるいは $\vec{B}\times\vec{A}$ で与えられる。

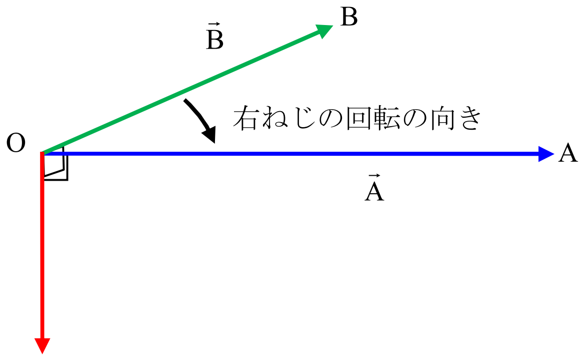
外積の向き

たとえば，$\vec{A}\times\vec{B}$ の向きは，
右ねじの平らな頭に固定された $\vec{A}$ を，その向きが $\vec{B}$ の向きと一致するように，
ねじ先の進む向きに回転したときのねじ先の進む向きである。
したがって，$\vec{A}\times\vec{B}$ は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ がつくる平面に対して垂直である。

右ねじの進む向きが $\vec{A}\times\vec{B}$ の向き



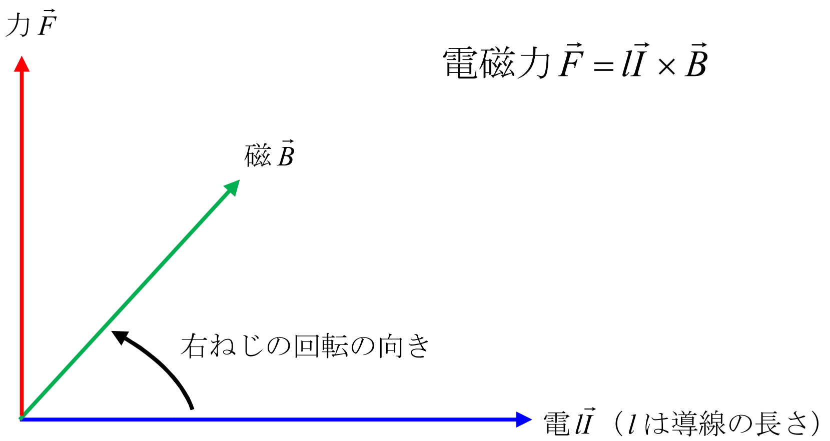
同様に，$\vec{B}\times\vec{A}$ の向きは，
$\vec{B}$ の向きが $\vec{A}$ の向きと一致するように右ねじを回転したときのねじの進む向きである。
また，$\vec{B}\times\vec{A}$ は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ がつくる平面に対して垂直である。
したがって，$\vec{A}\times\vec{B}$ の向きと $\vec{B}\times\vec{A}$ の向きは真逆の関係である。



右ねじの進む向きが $\vec{B}\times\vec{A}$ の向き

補足 1

中学で学習したフレミング左手の法則（電・磁・力）と関連付けると覚えやすい。
電磁力は電流と磁界の外積で表される。



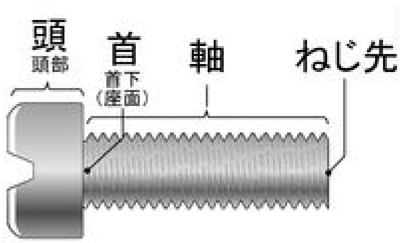
補足 2

有向線分とベクトル

有向線分：矢印の位置，向き，大きさ（長さ）で定義される。
したがって，同一有向線分であるためには，
有向線分どうしがぴったりと重なり合わなければならない。

ベクトル：矢印の向き，大きさ（長さ）で定義される。
したがって，同一ベクトルであるためには，
向きと大きささえ同じであればよい。

補足 3

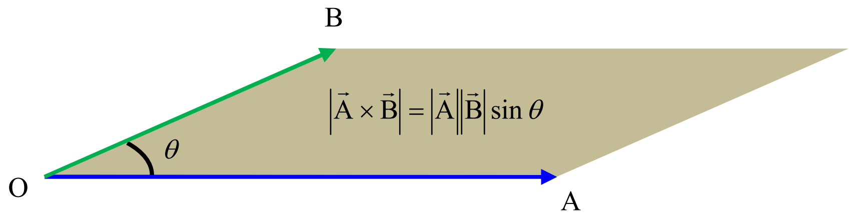


http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%81%AD%E3%81%98

外積の大きさ

$\vec{\mathrm{A}}$ と $\vec{\mathrm{B}}$ の外積の大きさ，すなわち $\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ の大きさは，$\left|\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}\right|$ と表し，

それは，$\vec{\mathrm{A}}$ と $\vec{\mathrm{B}}$ がつくる平行四辺形の面積と等しい。



以上より，

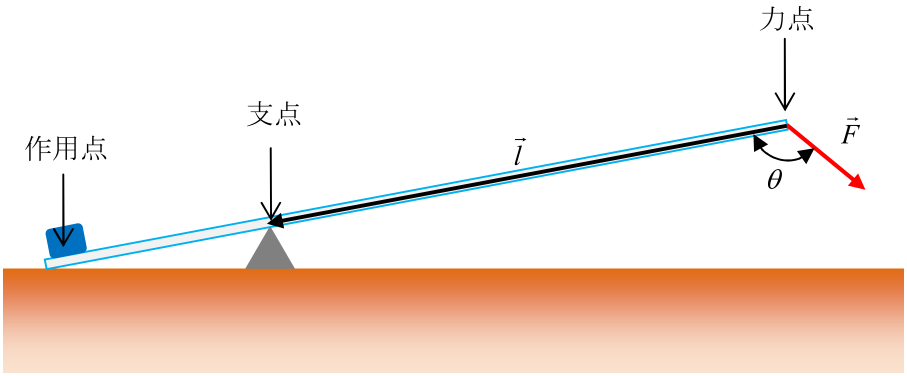
$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}=-\vec{\mathrm{B}}\times\vec{\mathrm{A}}$，$\left|\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}\right|=\left|\vec{\mathrm{B}}\times\vec{\mathrm{A}}\right|=\left|\vec{\mathrm{A}}\right|\left|\vec{\mathrm{B}}\right|\sin\theta$

補足

電磁力は外積そのものであるが，
外積の大きさをイメージするだけなら「てこの原理」の方がわかりやすいと思う。
力点から支点までのベクトルを $\vec{l}$，力を $\vec{F}$ とすると，

作用点の物体の動かしやすさの指標は，$\left|\vec{F}\right|\left|\vec{l}\right|\sin\theta$ で表せる。

これは，$\vec{F}$ と $\vec{l}$ がつくる平行四辺形の面積の大きさに等しい。



外積の演算規則（外積の成分表示の準備として）

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

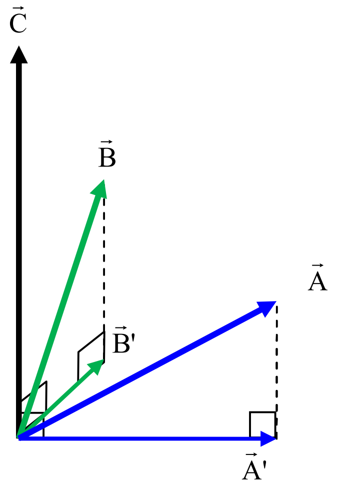
$k\times\vec{A}=\vec{A}\times k$ （k は実数）

$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$

補足

$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$ が成り立つことを示す。

$\vec{C}$ と垂直な平面への $\vec{A}$ の射影を $\vec{A}'$，$\vec{B}$ の射影を $\vec{B}'$ とする。



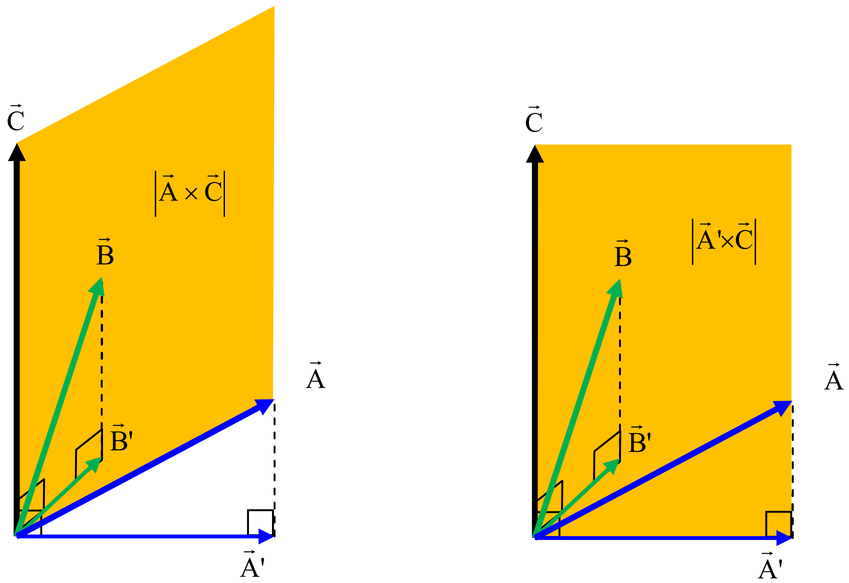
下図より，$\left|\vec{A}\times\vec{C}\right|=\left|\vec{A}'\times\vec{C}\right|$

また，$\vec{A}$，$\vec{A}'$，$\vec{C}$ は同一平面上のベクトルかつ $\vec{A}$ と $\vec{A}'$ は $\vec{C}$ について同じ側にあるから，

$\vec{A}\times\vec{C}$ の向きと $\vec{A}'\times\vec{C}$ の向きは同じである。よって，$\vec{A}\times\vec{C}=\vec{A}'\times\vec{C}$

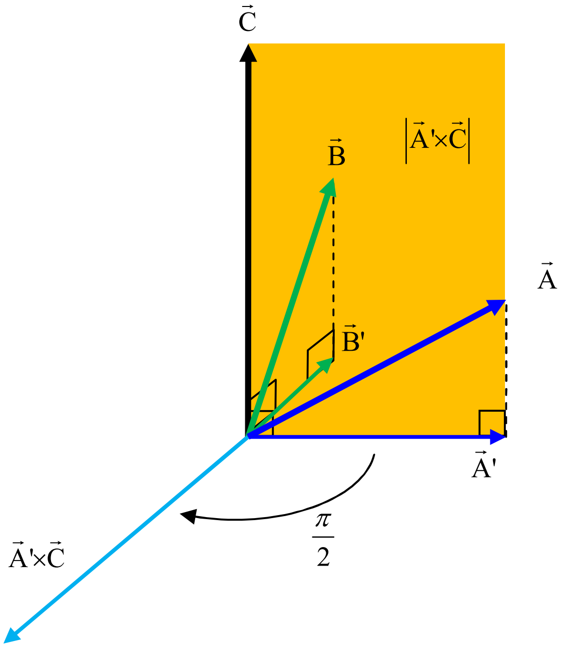
同様に，$\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}'\times\vec{C}$

よって，$\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}=\vec{A}'\times\vec{C}+\vec{B}'\times\vec{C}$　・・・①



また，$\left|\vec{A}'\times\vec{C}\right| = \left|\vec{A}'\right|\left|\vec{C}\right|\sin\frac{\pi}{2} = \left|\vec{A}'\right|\left|\vec{C}\right|$ より，$\left|\vec{B}'\times\vec{C}\right| = \left|\vec{B}'\right|\left|\vec{C}\right|\sin\frac{\pi}{2} = \left|\vec{B}'\right|\left|\vec{C}\right|$ より，

$\vec{A}'\times\vec{C}$ は，$\vec{A}'$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転し，$\left|\vec{C}\right|$ 倍したものである。　・・・②



同様に，

$\vec{B}'\times\vec{C}$ は，$\vec{B}'$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転し，$\left|\vec{C}\right|$ 倍したものである。　・・・③

よって，

$\vec{A}'\times\vec{C}$ と $\vec{B}'\times\vec{C}$ がつくる平行四辺形の対角線，$\vec{A}'\times\vec{C}+\vec{B}'\times\vec{C}$ は，図 1 のようになる。

また，②，③より，

$\vec{A}'\times\vec{C}$ と $\vec{B}'\times\vec{C}$ がつくる平行四辺形と $\vec{A}'$ と $\vec{B}'$ がつくる平行四辺形は，

相似比＝$\left|\vec{C}\right|$ ：1 の関係にあることがわかる。

したがって，$\vec{A}'\times\vec{C}$ と $\vec{B}'\times\vec{C}$ がつくる平行四辺形の対角線の長さも

$\vec{A}'$ と $\vec{B}'$ がつくる平行四辺形の対角線の長さの $\left|\vec{C}\right|$ 倍である。

すなわち $\left|\vec{A}'\times\vec{C}+\vec{B}'\times\vec{C}\right| = \left|\vec{C}\right|\cdot\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$　・・・④

また，図 1 より，$\vec{A}'\times\vec{C}+\vec{B}'\times\vec{C}$ も $\vec{A}'+\vec{B}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転したものである　・・・⑤

⦿は，$\vec{C}$ の向きが紙面に垂直手前であることを意味する記号。
つまり，図は $\vec{A}'$ と $\vec{B}'$ がつくる平面を，その真上から見たものである。

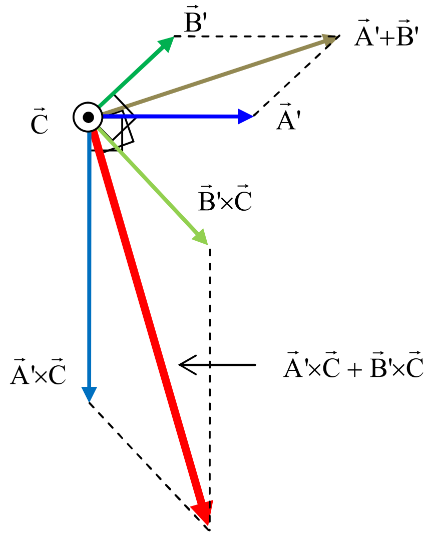


図 1

一方，$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}$ についても，$\vec{A}\times\vec{C}=\vec{A}'\times\vec{C}$ を示した場合と同様にすると，
$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}'+\vec{B}')\times\vec{C}$　・・・⑥　が成り立つことがわかる。

また，$(\vec{A}'+\vec{B}')\times\vec{C}$ は，$\vec{A}'$ と $\vec{B}'$ がつくる平行四辺形の対角線 $\vec{A}'+\vec{B}'$ を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転し，

$|\vec{C}|$ 倍したものである。（図 2）　・・・⑦

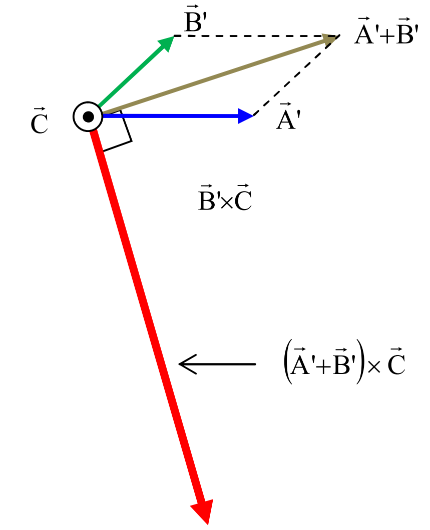


図 2

④，⑤，⑦より，$(\vec{A}'+\vec{B}')\times\vec{C}=\vec{A}'\times\vec{C}+\vec{B}'\times\vec{C}$　・・・⑧
①，⑥，⑧より，$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$

外積の成分表示

xyz 直交座標系において，$\vec{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$，$\vec{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$，$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{A}}&=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\\&=a_x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\end{aligned}$$

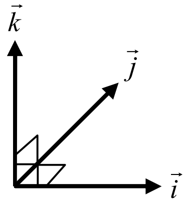
同様に，

$$\vec{\mathrm{B}}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

$$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

演算規則 $k\times\vec{\mathrm{A}}=\vec{\mathrm{A}}\times k$ （k は実数）および $\left(\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{B}}\right)\times\vec{\mathrm{C}}=\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{C}}+\vec{\mathrm{B}}\times\vec{\mathrm{C}}$ より，

$$\begin{aligned}\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=&\,a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}\\&+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}\\&+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}\end{aligned}$$



左図より，

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，　$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$，　$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$，　$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$，　$\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$，　$\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

$$\begin{aligned}&=\vec{0}+a_xb_y\vec{k}+a_xb_z\left(-\vec{j}\right)\\&\quad+a_yb_x\left(-\vec{k}\right)+\vec{0}+a_yb_z\vec{i}\\&\quad+a_zb_x\vec{j}+a_zb_y\left(-\vec{i}\right)+\vec{0}\\&=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}\end{aligned}$$

よって，$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$

外積の成分表示の簡単な求め方

その **1**

$$\vec{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix},\quad \vec{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$$ を $\begin{array}{cc}a_x & b_x\\a_y & b_y\\a_z & b_z\\a_x & b_x\end{array}$ と並べる。

$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ の x 成分

赤枠の成分のクロス掛けの差 $a_yb_z-a_zb_y$ が $\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ の x 成分となる。

$$\begin{array}{cc}a_x & b_x\\ \hline \multicolumn{1}{|c}{a_y} & \multicolumn{1}{c|}{b_y}\\ \multicolumn{1}{|c}{a_z} & \multicolumn{1}{c|}{b_z}\\ \hline a_x & b_x\end{array}$$

$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ の y 成分

赤枠の成分のクロス掛けの差 $a_zb_x-a_xb_z$ が $\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ の y 成分となる。

$$\begin{array}{cc}a_x & b_x\\ a_y & b_y\\ \hline \multicolumn{1}{|c}{a_z} & \multicolumn{1}{c|}{b_z}\\ \multicolumn{1}{|c}{a_x} & \multicolumn{1}{c|}{b_x}\\ \hline\end{array}$$

$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ の z 成分

赤枠の成分のクロス掛けの差 $a_xb_y-a_yb_x$ が $\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ の z 成分となる。

$$\begin{array}{cc}\hline \multicolumn{1}{|c}{a_x} & \multicolumn{1}{c|}{b_x}\\ \multicolumn{1}{|c}{a_y} & \multicolumn{1}{c|}{b_y}\\ \hline a_z & b_z\\ a_x & b_x\end{array}$$

以上より，

$$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$$

その 2：行列式の活用

n 次の正方行列の成分をある規則に従い計算処理したのが行列式である。

行列 A の行列式は $|\mathrm{A}|$ あるいは $\det \mathrm{A}$ と表す。

$\mathrm{A}=(a)$ ならば，$|\mathrm{A}|=|a|=a$ である。

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ならば，$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ である。

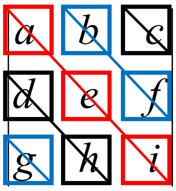
$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ならば，$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+bfg+cdh-afh-bdi-ceg$（サラスの公式）

4 次以上の正方行列は，余因子というものを活用して，帰納的に求めることができる。

補足：3 次正方行列の行列式（サラスの公式）の覚え方

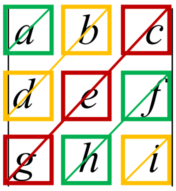
同色で囲まれた文字の積の和をとる。

右下



$aei+bfg+chd$　・・・①

左下



$ahf+bdi+ceg$　・・・②

①－②より，$aei+bfg+chd-(ahf+bdi+ceg)$

$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ のサラスの公式を利用した求め方。

$\vec{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$，$\vec{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$，単位ベクトルの和 $=\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$ を $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ と配置すると，

サラスの公式より，

$(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x - a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}=\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ となり，$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ が求められる。

外積の応用

1．2 つの空間ベクトルがつくる平行四辺形または三角形の面積を求める場合

外積の定義より，$\left|\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}\right|$ は $\vec{\mathrm{A}}$ と $\vec{\mathrm{B}}$ がつくる平行四辺形の面積と等しい。

したがって，$\dfrac{1}{2}\left|\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}\right|$ とすれば，$\vec{\mathrm{A}}$ と $\vec{\mathrm{B}}$ がつくる三角形の面積と等しくなる。

例

$\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(a_x,a_y,a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,b_y,b_z)$ を頂点とする三角形 OAB の面積について

ふつうに求める場合

書く手間を少なくする目的で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta\mathrm{AOB}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2)(b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2)-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}\end{aligned}$$

外積から求める場合

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{AOB}&=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}\end{aligned}$$

2．2 つの空間ベクトルがつくる平面に垂直なベクトル（法線ベクトル）を求める場合

外積の定義より，$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ は $\vec{\mathrm{A}}$ と $\vec{\mathrm{B}}$ がつくる平面に垂直である。

例

$\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(a_x,a_y,a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,b_y,b_z)$ を含む平面に垂直なベクトル（法線ベクトル）は，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$

3．2 つの空間ベクトルがつくる平面の方程式

平面の方程式について

法線ベクトル$=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$とし，点 $\mathrm{P}(\alpha,\beta,\gamma)$を含む平面上の任意の点を$(x,y,z)$とすると，

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-\alpha\\y-\beta\\z-\gamma\end{pmatrix}=0$ より，$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$

よって，この平面の方程式は，$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$

外積と平面の方程式

平面上の互いに独立な 2 つのベクトルの外積は，その平面の法線ベクトルだから，外積から平面の方程式が求められる。

例

$\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(a_x,a_y,a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,b_y,b_z)$を含む平面の法線ベクトルは，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$だから，

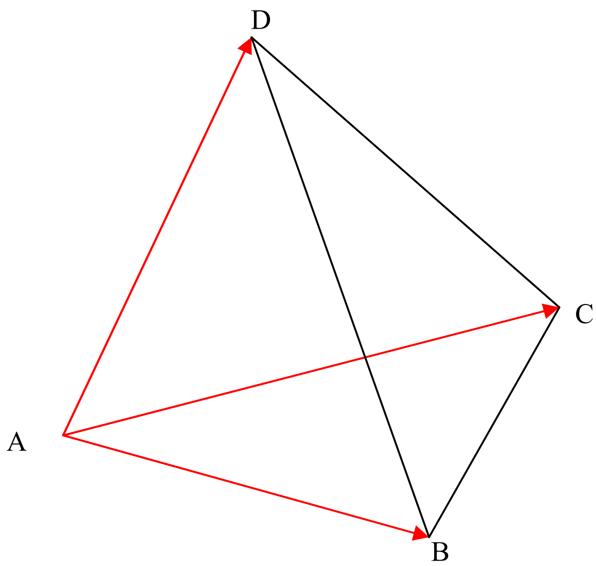
平面の方程式は，

$(a_yb_z-a_zb_y)(x-a_x)+(a_zb_x-a_xb_z)(y-a_y)+(a_xb_y-a_yb_x)(z-a_z)=0$

4．四面体の体積

四面体 ABCD のベクトルを下図のようにとると，

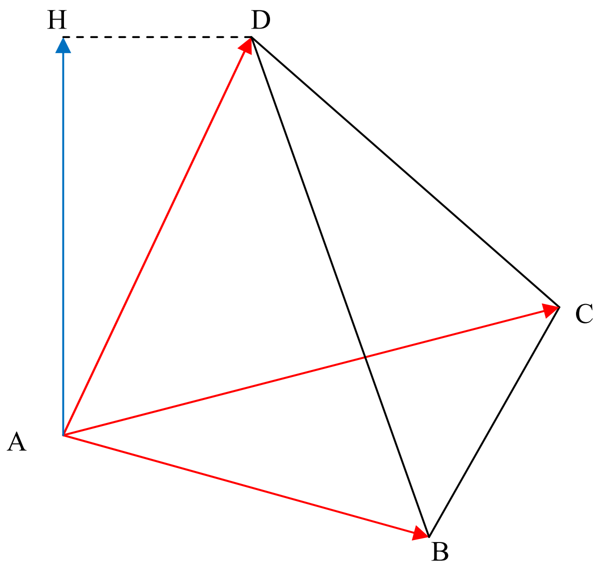
四面体 ABCD の体積$=\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6}$



証明

△ABC を底面とする四面体 ABCD の高さを AH とすると，

四面体 ABCD の体積＝$\dfrac{1}{3}$×△ABC の面積×高さ AH　・・・①



△ABC の面積について

$$\triangle\mathrm{ABC}\ の面積 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \quad ・・・②$$

高さ AH について

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| \cos\angle\mathrm{DAH} \\
&= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|}\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| \cos\angle\mathrm{DAH} \\
&= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| \cos\angle\mathrm{DAH}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|} \\
&= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|} \\
&= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}
\end{aligned}$$

ここで，

$\overrightarrow{AH}$ の単位ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{AH}}{\left|\overrightarrow{AH}\right|}$ と

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ の単位ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}$ は同一ベクトルだから，

$\dfrac{\overrightarrow{AH}}{\left|\overrightarrow{AH}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}$ より， $\left(\dfrac{\overrightarrow{AH}}{\left|\overrightarrow{AH}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$

よって，

$$\left|\overrightarrow{AH}\right|=\left(\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\quad\cdot\cdot\cdot③$$

①，②，③より，

四面体 ABCD の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left\{\left(\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right\}=\frac{\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}}{6}$$ と表せる。

これを成分表示で表してみる。・・・

面倒なので自分でしてください。