数列

自然数あるいは整数を定義域とする関数

要点の整理 5・3　例 6°　補充

$$
\begin{aligned}
k^4+k^2+1&=(k^2+1)^2-k^2\\
&=\{(k^2+1)+k\}\{(k^2+1)-k\}\\
&=(k^2+k+1)(k^2-k+1)\\
&=(k^2+k+1)\{(k-1)^2+(k-1)+1\}
\end{aligned}
$$

例題 1　等差数列

公式どおりにやると

(イ)

$a_1+(a_1+2d)+(a_1+4d)=96$ より，$3a_1+6d=96$　・・・①

$(a_1+4d)+(a_1+5d)+(a_1+6d)=69$ より，$3a_1+15d=69$　・・・②

①，②より，

$a_1=38$，$d=-3$　・・・(答)

あるいは，

$$等差数列の和＝項の値の平均値×項数＝\frac{初項の値＋末項の値}{2}×項数$$

より，

$\dfrac{a_1+a_5}{2}\times 3=96$　$\therefore a_1+a_5=64$　$\therefore 2a_1+4d=64$ ・・・③

$\dfrac{a_5+a_7}{2}\times 3=69$　$\therefore a_5+a_7=46$　$\therefore 2a_1+10d=46$ ・・・④

③，④より，

$a_1=38$，$d=-3$　・・・(答)

(ロ)

$$等差数列の和＝項の値の平均値×項数＝\frac{初項の値＋末項の値}{2}×項数$$

より，

$\dfrac{a_1+a_5}{2}\times 5=20$　$\therefore a_1+a_5=8$　$\therefore 2a_1+4d=8$　$\therefore a_1+2d=4$　・・・⑤

$\dfrac{a_3+a_7}{2}\times 5=-10$　$\therefore a_3+a_7=-4$　$\therefore 2a_1+8d=-4$　$\therefore a_1+4d=-2$　・・・⑥

⑤，⑥より，

$a_1=10$，$d=-3$　・・・(答)

例題 3　等比数列とその和

等比数列の第 x 項から第 y 項までの和＝$\dfrac{a_x - a_{y+1}}{1-r} = \dfrac{a_{y+1} - a_x}{r-1}$ を使うと楽

（ロ）

等比数列の初項を a，公比を r $(r \neq 1)$ とすると，

$\dfrac{a_{n+1} - a_1}{r-1} = 36$，$\dfrac{a_{2n+1} - a_1}{r-1} = 81$ より，$\dfrac{\dfrac{a_{2n+1} - a_1}{r-1}}{\dfrac{a_{n+1} - a_1}{r-1}} = \dfrac{81}{36} = \dfrac{9}{4}$

これと

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{a_{2n+1} - a_1}{r-1}}{\dfrac{a_{n+1} - a_1}{r-1}} &= \frac{a_{2n+1} - a_1}{a_{n+1} - a_1} \\ &= \frac{ar^{2n} - a}{ar^n - a} \\ &= \frac{r^{2n} - 1}{r^n - 1} \\ &= \frac{(r^n + 1)(r^n - 1)}{r^n - 1} \\ &= r^n + 1\end{aligned}$$

より，$r^n = \dfrac{9}{4} - 1 = \dfrac{5}{4}$　・・・①

第 $(2n+1)$ 項から第 $3n$ 項までの和を x とすると，$x = \dfrac{a_{3n+1} - a_{2n+1}}{r-1}$

$$\begin{aligned}\frac{a_{3n+1} - a_{2n+1}}{r-1} &= \frac{ar^{3n} - ar^{2n}}{r-1} \\ &= \frac{ar^n - a}{r-1} \cdot r^{2n} \\ &= \frac{a_{n+1} - a_1}{r-1} \cdot (r^n)^2 \\ &= 36 \cdot (r^n)^2\end{aligned}$$

よって，$x = 36 \cdot (r^n)^2$　・・・②

①，②より，$x = 36 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{225}{4}$　・・・(答)

テキスト別解の解説

一般に，

$$S_n=\frac{a_{n+1}-a_1}{r-1}=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$ とおくと，

$$\begin{aligned}S_{(p+1)n}-S_{pn}&=\frac{a_{(p+1)n+1}-a_1}{r-1}-\frac{a_{pn+1}-a_1}{r-1}\\&=\frac{a_{(p+1)n+1}-a_{pn+1}}{r-1}\\&=\frac{ar^{(p+1)n}-ar^{pn}}{r-1}\\&=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}\cdot r^{pn}\\&=S_n\left(r^n\right)^p\end{aligned}$$

よって，

$$S_{(p+1)n}-S_{pn}=S_n\left(r^n\right)^p$$

したがって，

$$S_{2n}-S_n=S_n\cdot r^n$$

$$S_{3n}-S_{2n}=S_n\cdot\left(r^n\right)^2$$

$$S_{4n}-S_{3n}=S_n\cdot\left(r^n\right)^3$$

問題の場合

$S_{2n}-S_n=S_n\cdot r^n$，　$S_n=36$，　$S_{2n}=81$ より，　$81-36=36\cdot r^n$　　$\therefore r^n=\frac{45}{36}=\frac{5}{4}$

よって，　$S_{3n}-S_{2n}=S_n\cdot\left(r^n\right)^2=36\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{225}{4}$　　・・・(答)

(ハ)

等比数列の第 x 項から第 y 項までの和＝$\dfrac{a_x - a_{y+1}}{1-r} = \dfrac{a_{y+1} - a_x}{r-1}$ を使うと楽

$$
\begin{aligned}
(1-x)S &= x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^n - (2n-1)x^{n+1} \\
&= x + \left(2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^n\right) - (2n-1)x^{+-1} \\
&= x + \frac{2x^{n+1} - 2x^2}{x-1} - (2n-1)x^{n+1} \\
&= \frac{x(x-1) + 2x^{n+1} - 2x^2 - (2n-1)(x-1)x^{n+1} \backslash}{x-1} \\
&= \frac{-x - x^2 + (2n+1)x^{n+1} - (2n-1)x^{n+2}}{x-1}
\end{aligned}
$$

$$\therefore S = \frac{x + x^2 - (2n+1)x^{n+1} + (2n-1)x^{n+2}}{(x-1)^2}$$

等比数列の和の公式とその導き方

等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

導き方 **1**：階差数列を利用

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{ar^{k-1}(r-1)}{r-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{ar^k - ar^{k-1}}{r-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1} - a_k}{r-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k+1}}{1-r} \\
&= \frac{1}{1-r}\left\{(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1})\right\} \\
&= \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}
\end{aligned}
$$

導き方 2：級数（数列の和）を利用

$$S_n - rS_n = \left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}\right) - \left(ar + ar^2 + ar^3 \cdots + ar^{n-1} + ar^n\right)$$
$$= a - ar^n$$
$$= a_1 - a_{n+1}$$
$$\therefore (1-r)S_n = a_1 - a_{n+1}$$
$$\therefore S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$ は，$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ より使い勝手が良い

$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$ が意味するのは，

「等比数列の第 1 項から第 n 項までの和は，$\frac{第1項の値 - 第(n+1)項の値}{1-r}$ で与えられる」

ということだから，

等比数列の第 x 項から第 y 項までの和を求める際に，即座に $\frac{a_x - a_{y+1}}{1-r}$ と反応できる。

実際，第 x 項から第 y 項までの和は，
「初項から第 y 項までの和 S_y －初項から第 $(x-1)$ 項までの和 S_{x-1}」だから，
それで確かめてみると，

$$S_y - S_{x-1} = \frac{a_1 - a_{y+1}}{1-r} - \frac{a_1 - a_{(x-1)+1}}{1-r}$$
$$= \frac{a_1 - a_{y+1}}{1-r} - \frac{a_1 - a_x}{1-r}$$
$$= \frac{a_x - a_{y+1}}{1-r}$$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ の公式の場合，

$1 - r^n$ の 1 は，第 1 項の $r^0 = 1$ の意味であるが，その意味が見えにくくなっているため，
上のように，即座に反応しにくい。

$S_n = \frac{a(r^0 - r^n)}{1-r}$ としても，つらいかな・・・。

例題 4　差の形に直して和を求める

(ロ)

$$
\begin{aligned}
k(k+1)(k+3) &= k(k+1)\{(k+2)+1\} \\
&= k(k+1)(k+2)+k(k+1) \\
&= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)\{(k+3)-(k-1)\}+\frac{1}{3}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\} \\
&= \frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}+\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}
\end{aligned}
$$

例題 5　群数列

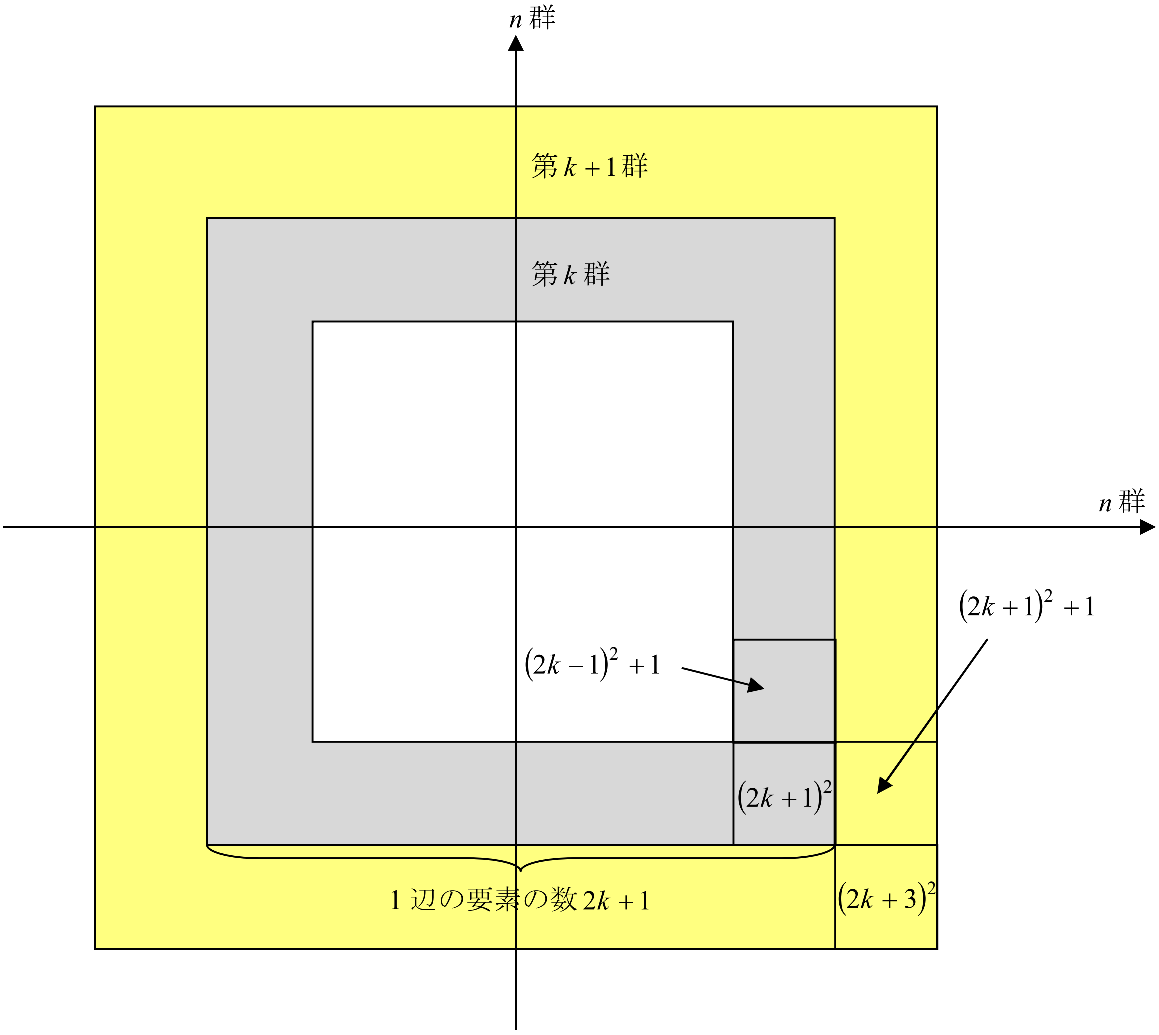
(1)

補足

24 から 18 までの間の数＝$24-18=6$

よって，18 は 24 から数えて $6+1=7$

例題 6　数を並べる



第 1 群 $\{2,3,\cdots,9\}$

第 2 群 $\{10,11,\cdots,25\}$

第 3 群 $\{26,27,\cdots,49\}$

$\vdots$

第 k 群 $\{(2k-1)^2+1,(2k-1)^2+2,\cdots,(2k+1)^2\}$

第 $k+1$ 群 $\{(2k+1)^2+1,(2k+1)^2+2,\cdots,(2k+3)^2\}$

の群数列で考えると，

第 k 群の項数＝$(2k+1)^2-\{(2k-1)^2+1\}+1=8k$

第 k 群の 1 辺の項数＝ $2k+1$

座標 $(k,-k)$ の数＝$(2k+1)^2$

(1)

第 500 番目の数は 500 である。

500 が第 k 群の数とすると，

$(2k-1)^2 < 500 \leq (2k+1)^2$ より，$2k-1 < 10\sqrt{5} \leq 2k+1$　$\therefore k=11$

第 k 群の末項は $(2\cdot 11+1)^2 = 529$ で，その座標は $(11,-11)$

1 辺あたりの項数は $2\cdot 11+1=23$ だから，

座標 $(-11,-11)$ の数は 529 から左方向に 23 番目の数より，$529-23+1=507$

500 は 507 より上方向に 7 番目の数だから，その座標は $(-11,-4)$　・・・(答)

(2)

x_k の座標を X_k とすると，

$X_1(1,0)$，$X_2(2,1)$，$X_3(3,2)$，$\cdots$，$X_k(k,k-1)$

第 k 群の初項は $(2k-1)^2+1$ で，その座標は $(k,-k+1)$ だから，

x_k は，$(2k-1)^2+1$ より，$(k-1)-(-k+1)=2k-2$ 大きい。

よって，$x_k = \{(2k-1)^2+1\}+2k-2 = 4k^2-4k$

k を n に書きかえることにより，$x_n = 4n^2-4n$　・・・(答)

例題 9　2 項間漸化式／$a_{n+1} = pa_n + f(n)$型

(1)

テキスト別解について

数列 $f(n+1) = 4f(n) + 5^n$ の特殊解を $b_n = \alpha \cdot 5^n$ とすると，

$\alpha \cdot 5^{n+1} = 4\alpha \cdot 5^n + 5^n$

これと与式の差をとると，

$a_{n+1} - \alpha \cdot 5^{n+1} = 4a_n - 4\alpha \cdot 5^n$

$\therefore a_{n+1} = 4a_n + \alpha \cdot 5^n$

$\therefore \alpha = 1$

よって，

$a_{n+1} - 5^{n+1} = 4(a_n - 5^n)$

$\therefore \dfrac{a_{n+1} - 5^{n+1}}{a_n - 5^n} = 4$，　$a_1 - 5 = -4$ より，

数列 $\{a_n - 5^n\}$は，初項-4，公比 4 の等比数列である。

よって，　$a_n - 5^n = -4 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore a_n = 5^n - 4^n$

(2)

数列 $f(n+1) = 3f(n) + 2n - 1$ の特殊解を $b_n = \alpha n + \beta$ とすると，

$\alpha(n+1) + \beta = 3(\alpha n + \beta) + 2n - 1$

これと与式の差をとると，

$a_{n+1} - \alpha(n+1) - \beta = 3a_n - 3(\alpha n + \beta)$

$\therefore a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha n + \alpha - 2\beta$　　$\therefore \alpha = -1, \beta = 0$

よって，　$a_{n+1} + (n+1) = 3(a_n + n)$

$\therefore \dfrac{a_{n+1} + (n+1)}{a_n + n} = 3$，　$a_1 + 1 = 2$

これは，数列 $\{a_n + n\}$が，初項 2，公比 3 の等比数列であることを示している。

よって，　$a_n + n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - n$

$a_{n+1} = pa_n + q(n)$ （p は 0 でない定数）の一般項を求める方法

1．特殊解とは

$f(n+1) = pf(n) + q(n)$ を満たす $f(n)$ はいくらでもある。

初項が定義されていないため，

$a_{n+1} = pa_n + q(n),\quad a_1 = \alpha$

もあれば、

$b_{n+1} = pb_n + q(n),\quad b_1 = \beta$

もあれば，

$c_{n+1} = pc_n + q(n),\quad c_1 = \gamma$

もあれば，

$\vdots$

と $f(n)$ の解はいくらでもある。

これらの解のうちの 1 つの解を $f(n)$ の特殊解という。

したがって，上記の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ はそれぞれ数列 $f(n)$ の特殊解である。

2．$a_{n+1} = pa_n + q(n),\quad a_1 = \alpha$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める方法の原理

$a_{n+1} = pa_n + q(n)$　・・・①

漸化式 $f(n+1) = pf(n) + q(n)$ の特殊解の数列を $\{b_n\}$ とすると，

$b_{n+1} = pb_n + q(n)$　・・・②

① − ② より，

$a_{n+1} - b_{n+1} = p(a_n - b_n)$

$\therefore \dfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = p$

これは，数列 $\{a_n - b_n\}$ が公比 p，初項 $a_1 - b_1$ の等比数列であることを示している。

よって，

$a_n - b_n = p^{n-1}(a_1 - b_1)$

ゆえに，

$a_n = p^{n-1}(a_1 - b_1) + b_n$

尚，特殊解の数列 $\{b_n\}$ の一般項の表し方は，次に述べるように，

$f(n+1) = pf(n) + q(n)$ の $q(n)$ による。

3.　$f(n+1)=pf(n)+q(n)$ の $q(n)$ と特殊解の数列 $\{b_n\}$ の一般項の表し方

特殊解の数列 $\{b_n\}$ の一般項の式の形は，$q(n)$ と同じにすればよい。

ⅰ）**$q(n)$ が定数：$f(n+1)=pf(n)+c$ 型**

$\{b_n\}$の一般項：$b_n=\alpha$　（α は定数）

特殊解 $\{b_n\}$ は，$b_{n+1}=pb_n+c$ を満たすから，

$$\alpha=p\alpha+c \quad \therefore \alpha=\frac{c}{1-p} \quad (p\neq 1)$$

あるいは，

$a_{n+1}=pa_n+c$ と $\alpha=p\alpha+c$ の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$　$\therefore a_{n+1}=pa_n+\alpha(1-p)$

これと $a_{n+1}=pa_n+c$ との係数比較より，$\alpha(1-p)=c$

$$\therefore \alpha=\frac{c}{1-p} \quad (p\neq 1)$$

特に，$p=1$ のとき，

$f(n+1)=f(n)+c \Leftrightarrow f(n+1)-f(n)=c$ より，$f(n)$ は公差 c の等差数列

ⅱ）**$q(n)$ が n についての 1 次式：$f(n+1)=pf(n)+cn+d$ 型**

$\{b_n\}$の一般項：$b_n=\alpha n+\beta$　（α,β は定数）

特殊解 $\{b_n\}$ は，$b_{n+1}=pb_n+cn+d$ を満たすから，

$\alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+cn+d$　$\therefore (\alpha-p\alpha-c)n+\beta-p\beta+\alpha-d=0$

これは任意の n について成り立つ。すなわち n についての恒等式である。

よって，連立方程式 $\begin{cases}\alpha-p\alpha-c=0\\ \beta-p\beta+\alpha-d=0\end{cases}$ から α,β を求めればよい。

あるいは，

$a_{n+1}=pa_n+cn+d$ と $\alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+cn+d$ の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=pa_n-p(\alpha n+\beta)$　$\therefore a_{n+1}=pa_n+(\alpha-p\alpha)n+\alpha+\beta-p\beta$

これと $a_{n+1}=pa_n+cn+d$ との係数比較より，$\begin{cases}\alpha-p\alpha=c\\ \alpha+\beta-p\beta=d\end{cases}$

ⅲ）**$q(n)$ が n の 2 次式：$f(n+1)=pf(n)+cn^2+dn+e$**

$\{b_n\}$の一般項：$b_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$

特殊解 $\{b_n\}$ は，$b_{n+1}=pb_n+cn^2+dn+e$ を満たすから，

$\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(\alpha n^2+\beta n+\gamma)+cn^2+dn+e$

$\therefore (\alpha-p\alpha-c)n^2+(2\alpha+\beta-p\beta-d)n+\alpha+\beta+\gamma-p\gamma-e=0$

これは任意の n について成り立つから，

連立方程式 $\begin{cases}\alpha-p\alpha-c=0\\ 2\alpha+\beta-p\beta-d=0\\ \alpha+\beta+\gamma-p\gamma-e=0\end{cases}$ から α,β,γ を求めればよい。

あるいは，

$a_{n+1}=pa_n+cn^2+dn+e$ と

$\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(\alpha n^2+\beta n+\gamma)+cn^2+dn+e$ の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-\alpha(n+1)^2-\beta(n+1)-\gamma=pa_n-p(\alpha n^2+\beta n+\gamma)$

$\therefore a_{n+1}=pa_n+(\alpha-p\alpha)n^2+(2\alpha+\beta-p\beta)n+\alpha+\beta+\gamma-p\gamma$

これと $a_{n+1}=pa_n+cn^2+dn+e$ との係数比較より，$\begin{cases}\alpha-p\alpha=c\\2\alpha+\beta-p\beta=d\\\alpha+\beta+\gamma-p\gamma=e\end{cases}$

ⅳ）**$q(n)$ が cq^n （c は定数，$q\neq p$）：$f(n+1)=pf(n)+cq^n$**

$\{b_n\}$の一般項：$b_n=kq^n$ （k は定数）

特殊解 b_n は，$b_{n+1}=pb_n+cq^n$ を満たすから，

$kq^{n+1}=pkq^n+cq^n$　　$\therefore q^n\{k(q-p)-c\}=0$

これは任意の n について成り立つから，$k(q-p)-c=0$

よって，$k=\dfrac{c}{q-p}$

あるいは，

$a_{n+1}=pa_n+cq^n$ と $kq^{n+1}=pkq^n+cq^n$ の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-kq^{n+1}=pa_n-pkq^n$

$\therefore a_{n+1}=pa_n+k(q-p)q^n$

これと $a_{n+1}=pa_n+cq^n$ との係数比較より，

$k=\dfrac{c}{q-p}$

補足

特殊解を使わないで解く方法

$f(n+1)=pf(n)+cq^n$ の両辺を p^{n+1} で割ると，

$$\frac{f(n+1)}{p^{n+1}}=\frac{f(n)}{p^n}+\frac{c}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\therefore \frac{f(n+1)}{p^{n+1}}-\frac{f(n)}{p^n}=\frac{c}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

これは，数列 $\dfrac{c}{p}\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$ が数列 $\dfrac{f(n)}{p^n}$ の階差数列であることを示している。

よって，

$$\frac{f(n)}{p^n}=\frac{f(1)}{p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^k$$ （計算が大変である）

ｖ） $\boldsymbol{q(n)}$ が $\boldsymbol{cp^n}$ ： $\boldsymbol{f(n+1)=pf(n)+cp^n}$

$\{b_n\}$の一般項： $b_n=nkp^n$ （k は定数）

特殊解 b_n は，$b_{n+1}=pb_n+cp^n$ を満たすから，

$(n+1)kp^{n+1}=pnkp^n+cp^n \quad \therefore p^n(kp-c)=0$

これは任意の n について成り立つから，$kp-c=0$

よって，$k=\dfrac{c}{p}$

あるいは，

$a_{n+1}=pa_n+cp^n$ と $(n+1)kp^{n+1}=pnkp^n+cp^n$ の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-(n+1)kp^{n+1}=pa_n-pnkp^n$

$\therefore a_{n+1}=pa_n+kp^{n+1}$

これと $a_{n+1}=pa_n+cp^n$ との係数比較より，$k=\dfrac{c}{p}$

補足

特殊解を使わないで解く方法

$f(n+1)=pf(n)+cp^n$ の両辺を p^{n+1} で割ると，

$$\frac{f(n+1)}{p^{n+1}}=\frac{f(n)}{p^n}+\frac{c}{p}$$

$$\therefore \frac{f(n+1)}{p^{n+1}}-\frac{f(n)}{p^n}=\frac{c}{p}$$

これは，数列 $\dfrac{f(n)}{p^n}$ が公差 $\dfrac{c}{p}$，初項 $\dfrac{f(1)}{p}$ の等差数列であることを示している。

よって，$\dfrac{f(n)}{p^n}=\dfrac{f(1)}{p}+(n-1)\dfrac{c}{p}$

$\therefore f(n)=p^{n-1}\{f(1)+(n-1)c\}$

これは特に大変でもないので，特殊解を使うまでもない。

例題

$a_1=5,\quad a_{n+1}=3a_n-2^n\ (n=1,2,3,\cdots)$で定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

解法 1．特殊解を使って解く方法

漸化式 $f(n+1)=3f(n)-2^n$ の特殊解を $b_n=k\cdot 2^n$ とおくと，

$k\cdot 2^{n+1}=3k\cdot 2^n-2^n$

$\therefore 2^n(k-1)=0$

これは任意の n について成り立つから， $k=1$

よって，

$2^{n+1}=3\cdot 2^n-2^n$

これと $a_{n+1}=3a_n-2^n$ の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-2^{n+1}=3a_n-3\cdot 2^n$

$\therefore a_{n+1}-2^{n+1}=3(a_n-2^n)$

$\therefore a_n-2^n=3^{n-1}(a_1-2)$

$\therefore a_n=3^{n-1}(5-2)+2^n$

$\therefore a_n=3^n+2^n$

解法 2．特殊解を使わないで解く方法

漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ここで，式を見やすくする目的で，

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと， $b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$$\therefore b_{n+1}-b_n=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore b_n=b_1-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$\therefore b_n=\frac{a_1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore b_n=1+\left(\frac{2}{3}\right)^n \leftrightarrow \frac{a_n}{3^n}=1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\therefore a_n=3^n+2^n$

例題 10　一般項と総和

(1)

別解

$S_{n+1}+a_{n+1}=2(n+1)$，　$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より，

$S_{n+1}+S_{n+1}-S_n=2(n+1)$

$\therefore S_{n+1}=\dfrac{1}{2}S_n+n+1$　・・・①

ここで一般項が $b_n=\alpha n+\beta$ で表される数列 $\{b_n\}$ が

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+n+1$　・・・②　を満たすとすると，

$\alpha(n+1)+\beta=\dfrac{1}{2}(\alpha n+\beta)+n+1$ より，$\left(\dfrac{1}{2}\alpha-1\right)n+\alpha+\dfrac{1}{2}\beta-1=0$

これが任意の n について成り立つから，

$\dfrac{1}{2}\alpha-1=0$，　$\alpha+\dfrac{1}{2}\beta-1=0$　$\therefore \alpha=2,\beta=-2$　$\therefore b_n=2n-2$　・・・③

①－②より，

$S_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(S_n-b_n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(S_1-b_1)$

$\therefore S_{n+1}-b_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(S_1-b_1)$

$\therefore S_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(S_1-b_1)+b_{n+1}$

ここで，

$S_n+a_n=2n$ において，　$n=1$ のとき，　$S_1=a_1$ より，　$2a_1=2$　$\therefore a_1=1$

また，③より，　$b_1=0$，　$b_{n+1}=2(n+1)-2=2n$

よって，

$S_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2n$

$$
\begin{aligned}
\therefore a_{n+1}&=S_{n+1}-S_n\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2(n-1)\right\}\\
&=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

よって，　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

例題 12　分数形の漸化式

（ロ）

別解

$a_n=b_n+t$ とおき，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形になるような t を求める。

$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-9}{a_n+1}$ に $a_n=b_n+t$ を代入することにより，

$$b_{n+1}+t=\frac{7b_n+7t-9}{b_n+t+1}$$

$$=\frac{7t-9}{t+1}+\frac{\left(7-\dfrac{7t-9}{t+1}\right)b_n}{b_n+t+1}$$

これが，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形になるためには，$t=\dfrac{7t-9}{t+1}$ であればよい。

よって，$t^2-6t+9=(t-3)^2=0\quad\therefore t=3$

よって，$b_{n+1}=\dfrac{4b_n}{b_n+4}$

両辺の逆数をとると，$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{4}$

$a_n=b_n+3$ より，$b_n=a_n-3$

よって，$\dfrac{1}{a_{n+1}-3}=\dfrac{1}{a_n-3}+\dfrac{1}{4}$

分数形の漸化式の一般解の求め方

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の一般項の求め方（入試問題では，誘導がついているのがふつうである）

方法 1

置き換えにより，分数漸化式の基本形 $\boldsymbol{b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}}$ を得てから解く。

求め方のしくみ

$a_n=b_n+x$ とおいて，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形になるような x の値を求める。

↓

$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ を解く。

つまり，

$a_n\xrightarrow{f}a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$

↓置き換え

$b_n+x\xrightarrow{f}b_{n+1}+x=f(b_n+x)=\dfrac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}$

↓適当な x の値を求める。

$b_n\xrightarrow{g}b_{n+1}=g(b_n)=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$

↓

$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ を解く。

↓

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

補足

$x=\alpha$ のとき，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ になるとすると，

$b_n=a_n-\alpha$ より，$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{B(a_n-\alpha)+C}$ だから，

これから直接数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてもよい。

手順

$a_n = b_n + x$ とおくと，

$$b_{n+1} + x = \frac{p(b_n + x) + q}{r(b_n + x) + s}$$

$$= \frac{pb_n + px + q}{rb_n + rx + s}$$

$$= \frac{px+q}{rx+s} + \frac{\frac{ps-qr}{rx+s} b_n}{rb_n + rx + s}$$

$$\therefore b_{n+1} = \left(\frac{px+q}{rx+s} - x\right) + \frac{\frac{ps-qr}{rx+s} b_n}{rb_n + rx + s}$$

補足

$\dfrac{pb_n + px + q}{rb_n + rx + s} = K + \dfrac{Lb_n}{rb_n + rx + s}$ とおくと，

$K + \dfrac{Lb_n}{rb_n + rx + s} = \dfrac{(rK + L)b_n + K(rx + s)}{rb_n + rx + s}$ より，$\begin{cases} rK + L = p \\ K(rx+s) = px + q \end{cases}$

$\therefore K = \dfrac{px+q}{rx+s}$，　$L = \dfrac{ps-qr}{rx+s}$

ここで，　$\dfrac{px+q}{rx+s} - x = 0$ の解を α とすると，$b_{n+1} = \dfrac{\frac{ps-qr}{r\alpha+s} b_n}{rb_n + r\alpha + s}$

すなわち $b_{n+1} = \dfrac{Ab_n}{Bb_n + C}$ の形にできる。

よって，　$\dfrac{1}{b_{n+1}} = \dfrac{B}{A} + \dfrac{C}{A} \cdot \dfrac{1}{b_n}$ から数列 $\{b_n\}$ の一般項が得られ，

さらに，　$a_n = b_n + \alpha$ から，数列 $\{a_n\}$ の一般項が求められる。

重要補足

方程式 $\dfrac{px+q}{rx+s} - x = 0$ は，

$a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の a_{n+1}, a_n を x に置き換えた方程式 $x = \dfrac{px+q}{rx+s}$ と同じである。

よって，

$a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の a_{n+1}, a_n を x に置き換え，その解を求めればよい。

まとめ

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ を解く。

↓

特性方程式の実数解を α とすると，$a_n=b_n+\alpha$ とおき，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ に代入する。

↓

漸化式を $b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形に変形する。

以後の処理も含めた分数漸化式の一般解の求め方は，以下の例を参照のこと

例 1：特性方程式の解が重解の場合

$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{5x-16}{x-3}$ を解くと，$x^2-8x+16=0\quad \therefore x=4$

$a_n=b_n+4$ とおくと，

$$\begin{aligned}b_{n+1}+4&=\frac{5(b_n+4)-16}{(b_n+4)-3}\\&=\frac{5b_n+4}{b_n+1}\\&=\frac{4(b_n+1)+b_n}{b_n+1}\\&=4+\frac{b_n}{b_n+1}\end{aligned}$$

$\therefore b_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_n+1}$

$\therefore \dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+1$

よって，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{a_1-4}=1$，公差 1 の等差数列である。

$\therefore \dfrac{1}{b_n}=1+(n-1)\cdot 1=n$

$\therefore b_n=\dfrac{1}{n}$

$\therefore a_n=b_n+4=\dfrac{1}{n}+4$

例 2：特性方程式の解が異なる 2 実数解の場合

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ を解くと，$x^2-6x+8=0\quad \therefore x=2,4$

解法 1

$a_n=b_n+2$ とおくと，

$$b_{n+1}+2=\frac{-(b_n+2)+8}{-(b_n+2)+5}$$
$$=\frac{-b_n+6}{-b_n+3}$$
$$=\frac{2(-b_n+3)+b_n}{-b_n+3}$$
$$=2+\frac{b_n}{-b_n+3}$$

$$\therefore b_{n+1}=\frac{b_n}{-b_n+3}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}}=-1+\frac{3}{b_n}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{2}=3\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{b_n}-\frac{1}{2}=3^{n-1}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{2}\right)=3^{n-1}\left(\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{2}\right)=3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{b_n}=\frac{3^{n-1}+1}{2}$$

$$\therefore a_n=b_n+2=\frac{2}{3^{n-1}+1}+2=\frac{2+2\cdot 3^{n-1}+2}{3^{n-1}+1}=\frac{2(3^{n-1}+2)}{3^{n-1}+1}$$

解法 2（特性方程式の解が重解の場合は無理）

等比数列の形にしてから解く。

$a_n = b_n + 2$ とおくと，$b_{n+1} = \dfrac{b_n}{-b_n + 3}$　$\therefore a_{n+1} - 2 = \dfrac{a_n - 2}{-a_n + 5}$　・・・①

$a_n = c_n + 4$ とおくと，$c_{n+1} = \dfrac{3c_n}{-c_n + 1}$　$\therefore a_{n+1} - 4 = \dfrac{3a_n - 12}{-a_n + 5}$　・・・②

$\dfrac{①}{②}$ より，$\dfrac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} - 4} = \dfrac{a_n - 2}{3a_n - 12} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n - 2}{a_n - 4}\right)$

よって，数列$\left\{\dfrac{a_n - 2}{a_n - 4}\right\}$は，初項$\dfrac{a_1 - 2}{a_1 - 4} = -1$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。

$\therefore \dfrac{a_n - 2}{a_n - 4} = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore 3^{n-1} a_n - 2 \cdot 3^{n-1} = -a_n + 4$

$\therefore a_n = \dfrac{2\left(3^{n-1} + 2\right)}{3^{n-1} + 1}$

方法 2

分数形漸化式の基本形に変形できる形 $\boldsymbol{a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{ra_n+s}}$ にしてから解く。

手順

$$a_{n+1}-x=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-x$$

$$\downarrow$$

$$a_{n+1}-x=\frac{(p-rx)a_n+q-sx}{ra_n+s}$$

$$\downarrow$$

$$a_{n+1}-x=\frac{(p-rx)\left(a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)}{ra_n+s}$$

ここで，左辺 $a_{n+1}-x$ と右辺の $a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}$ に注目して，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ となる x を求める。

重要補足

$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

よって，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ と $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は同じ方程式である。

したがって，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から解を求めればよい。

$$\downarrow$$

特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ $\left(\text{または},-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)$ の解を α とすると，

$\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}=-\alpha$ より，$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}{ra_n+s}$ が得られる。

以後の処理も含めた分数漸化式の一般解の求め方は，以下の例を参照のこと

例 1：特性方程式の解が重解の場合

$a_1 = 5$，$a_{n+1} = \dfrac{5a_n - 16}{a_n - 3}$ $(n = 1,2,\cdots)$

解

$x = \dfrac{5x - 16}{x - 3}$ を解くと，$x^2 - 8x + 16 = 0$　$\therefore x = 4$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 4 &= \frac{5a_n - 16}{a_n - 3} - 4 \\ &= \frac{a_n - 4}{a_n - 3} \\ &= \frac{a_n - 4}{(a_n - 4) + 1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1} - 4} = \frac{1}{a_n - 4} + 1$$

よって，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n - 4}\right\}$は，初項$\dfrac{1}{a_1 - 4} = 1$，公差 1 の等差数列である。

$$\therefore \frac{1}{a_n - 4} = n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n} + 4$$

例 2：特性方程式の解が異なる **2** 実数解の場合

$a_1 = 3$，$a_{n+1} = \dfrac{-a_n + 8}{-a_n + 5}$ $(n = 1,2,\cdots)$

解

$x = \dfrac{-x + 8}{-x + 5}$ を解くと，$x^2 - 6x + 8 = 0$　$\therefore x = 2,4$

解法 1

$x = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= \frac{-a_n + 8}{-a_n + 5} - 2 \\ &= \frac{a_n - 2}{-a_n + 5} \\ &= \frac{a_n - 2}{-(a_n - 2) + 3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1} - 2} = 3 \cdot \frac{1}{a_n - 2} - 1$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{2}=3\left(\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2}=3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n-2=\frac{2}{3^{n-1}+1}$$

$$\therefore a_n=\frac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$$

解法 2（特性方程式の解が重解の場合は無理）

$x=2$ のとき，$a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{-a_n+5}$　・・・③

$x=4$ のとき，$a_{n+1}-4=\dfrac{3(a_n-4)}{-a_n+5}$　・・・④

$\dfrac{③}{④}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{a_n-2}{3(a_n-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right)$

よって，数列$\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$は，初項$\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。

$$\therefore \frac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore 3^{n-1}a_n-2\cdot 3^{n-1}=-a_n+4$$

$$\therefore a_n=\frac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$$

方法 3（特性方程式の解が重解の場合は使えない）

等比数列の漸化式：$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　に変形してから解く

求め方のしくみ

$a_n \xrightarrow{f} a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ から，

$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} \xrightarrow{h} \dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=h\left(\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ となるような α，β を求める。

↓

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ から，$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\cdot t^{n-1}$ が得られるので，

これから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

手順

$b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，関数 f,g,h の関係は以下のようになる。

$$
\begin{array}{ccc}
a_n & \xrightarrow{f} & a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s} \\
\downarrow g & & \downarrow g \\
b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} & \xrightarrow{h} & \begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}
\end{array}
$$

したがって，

α と β を求めるには，

合成関数の連立方程式 $\begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}$ を解けばよい。

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}&=h(b_n)\\
&=h(g(a_n))\\
&=t\cdot g(a_n)\\
&=t\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}
\end{aligned}
$$

$\therefore b_{n+1}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　・・・⑤

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= g(a_{n+1}) \\
&= g(f(a_n)) \\
&= \frac{f(a_n)-\alpha}{f(a_n)-\beta} \\
&= \frac{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta} \\
&= \frac{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)}{pa_n+q-\beta(ra_n+s)} \\
&= \frac{(p-r\alpha)a_n+q-s\alpha}{(p-r\beta)a_n+q-s\beta} \\
&= \frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore b_{n+1} = \frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}} \quad \cdots⑥
$$

⑤，⑥より，

$t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}$，　$-\alpha=\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}$，　$-\beta=\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}$

よって，α と β は方程式 $x=\dfrac{sx-q}{rx-p}$ を解くことにより求められ，

これを $t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}$ に代入することにより，公比 t が求められる。

重要補足

$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

よって，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ と $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は同じ方程式である。

したがって，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から

解を求めればよい。

まとめ

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ が異なる 2 実数解 α,β をもつとき，

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\quad\left(t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}\right)$ と表せる。

例：特性方程式の解が異なる 2 実数解の場合

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ の解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$x^2-6x+8=0\quad\therefore x=2,4$

$\therefore\alpha=2$，$\beta=4$

ここで，$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，$t=\dfrac{-1-(-1)\cdot2}{-1-(-1)\cdot4}=\dfrac{1}{3}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n-4}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

$\therefore\dfrac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore 3^{n-1}a_n-2\cdot3^{n-1}=-a_n+4$

$\therefore a_n=\dfrac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$

例題 13　連立の漸化式

連立漸化式の解法を 3 つ

はじめに

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ の形にする。

方法 1：連立漸化式をいじり，等比数列の形にする

手順 1

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$　・・・①

$b_{n+1} = ra_n + sb_n$　・・・②

①－$k\times$②より，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)a_n + (q-ks)b_n$

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)\left(a_n + \dfrac{q-ks}{p-kr}b_n\right)$　・・・③

と変形する。

手順 2

③の右辺の $\dfrac{q-ks}{p-kr}$ が $\dfrac{q-ks}{p-kr} = -k$ となれば,

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)(a_n - kb_n)$ より，

$a_n - kb_n$ は，公比 $p-kr$，初項 $a_1 - kb_1$ の等比数列だから,

$a_n - kb_n = (p-kr)^{n-1}(a_1 - kb_1)$　・・・④

となる。

したがって，$\dfrac{q-ks}{p-kr} = -k$，

すなわち k についての 2 次方程式

$rk^2 - (p-s)k - q = 0$　・・・⑤

を解き，

k が異なる 2 実数解をもつならば,

④の式が 2 つできるので，その連立方程式を解けばよい。

k が重解をもつならば,

④，①，②から a_n または b_n の漸化式を得，解けばよい。

補足 1

$p=s, q=r$ の場合は，⑤より，$k=\pm 1$ だから，これを覚えておいて，

いきなり①＋②と①－②から始めれば手際よく解ける。

補足 2

$a_{n+1} = pa_n + qb_n + t$　・・・①'

$b_{n+1} = ra_n + sb_n + u$　・・・②'

（t, u は実数）

の場合においても

①'$-k\times$②'より，$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)\left(a_n + \dfrac{q - ks}{p - qr}b_n\right) + t - ku$ とした後，

$\dfrac{q - ks}{p - kr} = -k$，すなわち k についての 2 次方程式 $rk^2 - (p - s)k - q = 0$ を解き，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)(a_n - kb_n) + t - ku$ の形の 2 項間漸化式

（$c_n = a_n - kb_n$ とおけば，$c_{n+1} = (p - kr)c_n + t - ku$）にしてから，

その漸化式を解けばよい。

よって，

方法 1 は万能型といえる。

方法 2：a_n と b_n について，それぞれの 3 項間漸化式をつくってから解く。

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$　・・・①

$b_{n+1} = ra_n + sb_n$　・・・②

a_n についての漸化式

①より，$qb_n = a_{n+1} - pa_n$　$\therefore qb_{n+1} = a_{n+2} - pa_{n+1}$

②×q より，$qb_{n+1} = qra_n + sqb_n$

よって，$a_{n+2} - pa_{n+1} = qra_n + s(a_{n+1} - pa_n)$

$\therefore a_{n+2} - (p+s)a_{n+1} + (ps - qr)a_n = 0$　・・・⑥

b_n についての漸化式

②より，$ra_n = b_{n+1} - sb_n$　$\therefore ra_{n+1} = b_{n+2} - sb_{n+1}$

①×r より，$ra_{n+1} = pra_n + qrb_n$

よって，$b_{n+2} - sb_{n+1} = p(b_{n+1} - sb_n) + qrb_n$

$\therefore b_{n+2} - (p+s)b_{n+1} + (ps - qr)b_n = 0$　・・・⑦

漸化式⑥，⑦を解くことにより，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求める。

補足 3

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ より，$\begin{cases} a_{n+2} - (p+s)a_{n+1} + (ps-qr)a_n = 0 \\ b_{n+2} - (p+s)b_{n+1} + (ps-qr)b_n = 0 \end{cases}$ は覚えておくとよい。

覚え方

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = O$

これより，

$a_{n+2} - (p+s)a_{n+1} + (ps - qr)a_n = 0$

$b_{n+2} - (p+s)b_{n+1} + (ps - qr)b_n = 0$

方法 3：行列を利用して解く

手順 1

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$　$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

手順 2

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1}$ を求める。

求め方の 1 例

わかりやすさの目的で $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = O$

ここで，またわかりやすさの目的で，

$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = (A - \alpha E)(A - \beta E)$ と表すと，$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$

続いて，行列 X^{n-1} を $(X - \alpha E)(X - \beta E)$ で割った商を $Q(X)$，余りを $mX + nE$ とする。

すると，

$X^{n-1} = (X - \alpha E)(X - \beta E)Q(X) + mX + nE$

$X = \alpha E$ のとき

$\alpha^{n-1}E = m\alpha E + nE$　$\therefore m\alpha + n = \alpha^{n-1}$　・・・⑥

$X = \beta E$ のとき

$\beta^{n-1}E = m\beta E + nE$　$\therefore m\beta + n = \beta^{n-1}$　・・・⑦

⑥，⑦より，

$$m = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad n = -\frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta}$$

よって，$X^{n-1} = (X - \alpha E)(X - \beta E)Q(X) + \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}X - \dfrac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta}E$

これに $X = A$ を代入すると，$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$ より，

$$A^{n-1} = \frac{\alpha^{n\backslash 1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}A - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta}E$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \left\{ \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}A - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta}E \right\} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

補足 4

3 項間漸化式 $a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n$ を行列で解く場合

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 以下同様

参考サイト：数学小ネタ http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukoneta.html

ケイリー・ハミルトンの定理と行列の n 乗

15　強い仮定の数学的帰納法

$n=k$（n は自然数）のとき事象 A_n が成り立つためには,

$n=1,2,\cdots k-1$ のすべての n について事象 A_n が成り立つことが必要である場合,

換言すれば,

$n=1,2,\cdots k-1$ のすべての n について事象 A_n が成り立つことは

$n=k$ のとき事象 A_n が成り立つための必要条件である場合,

$n\leq k$ なるすべての自然数 n で事象 A_n が成り立つと仮定しなければならない。

条件反射的に

「$n=k$ のとき事象 A_n が成り立つと仮定すると」

とするのではなく,

まず条件式を見て,

「$n=k$ のとき事象 A_n が成り立つための必要条件は何か？」

について考えよう。