例題 1　図形の最大・最小／相加・相乗平均

なす角の大きさは tan または cos で試みる。

cos を使って解いてみると

xy 直交座標系の原点を A にとり，$\mathrm{B}(0,2)$，$\mathrm{Q}(x,1)$，$\mathrm{P}(x,0)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \cos\angle\mathrm{PBQ}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right|}$$

余弦定理を用いてもよい。

$$=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^4+4x^2+4}{x^4+5x^2+4}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{x^2}{x^4+5x^2+4}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{x^2+5+\frac{4}{x^2}}}$$

ここで，$x^2+5+\frac{4}{x^2}=\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+5\geq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}+5=9$

等号成立は $x^2=\frac{4}{x^2}$，すなわち $x=\sqrt{2}\ (\because x>0)$ のとき

$$\therefore \frac{1}{x^2+5+\frac{4}{x^2}}\leq\frac{1}{9}$$

$$\therefore -\frac{1}{x^2+5+\frac{4}{x^2}}\geq-\frac{1}{9}$$

$$\therefore 1-\frac{1}{x^2+5+\frac{4}{x^2}}\geq 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\therefore \sqrt{1-\frac{1}{x^2+5+\frac{4}{x^2}}}\geq\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\therefore \cos\angle\mathrm{PBQ}\geq\frac{2\sqrt{2}}{3}$（等号成立は $x=\sqrt{2}$ のとき）

$0 < \angle \mathrm{PBQ} < \dfrac{\pi}{2}$ であることと，$\cos\theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ で単調減少することから，

$\angle \mathrm{PBQ}$ が最大のとき，$\cos\angle \mathrm{PBQ}$ は最小値をとる。

よって，$\cos\angle \mathrm{PBQ} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\angle \mathrm{PBQ}$ は最大となり，このとき $x = \sqrt{2}$

例題 2　図形量の最大・最小／微分法の応用

別解 1（（ロ）のみで考える）

$\mathrm{OB}=x\ (0\leq x\leq a)$ とおくと，$\mathrm{CB}=\sqrt{a^2-x^2}\ (0\leq x\leq a)$

$$V(x)=\frac{\pi}{3}(a^2-x^2)(a+x)$$
$$=\frac{\pi}{3}(a^3+a^2x-ax^2-x^3)$$

以下略

別解 2（（ロ）のみで考える）

$\angle\mathrm{OCB}=\theta\ \left(0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$V(\theta)=\frac{\pi a^3}{3}\cos^2\theta(1+\sin\theta)$$
$$=\frac{\pi a^3}{3}(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$$
$$=\frac{\pi a^3}{3}(1+\sin\theta-\sin^2\theta-\sin^3\theta)$$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$0\leq t<1$ であり，

このときの関数を $v(t)$ とすると，

$$v(t)=\frac{\pi a^3}{3}(1+t-t^2-t^3)$$

以下略

例題 4　座標平面上の正三角形・正方形

(1)

別解

$R(s,t)$，正三角形の PQR の重心を G とすると，$G\left(\dfrac{a+s}{3},\dfrac{b+t}{3}\right)$

正三角形の重心と外心は一致することから

$$\overrightarrow{RG}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\dfrac{a-2s}{3}\\ \dfrac{b-2t}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore \frac{-a^2+2as+b^2-2bt}{3}=0$$

$$\therefore 2as-2bt=a^2-b^2 \quad ・・・①$$

正三角形 PQR の面積

辺の長さ $\sqrt{a^2+b^2}$ の正三角形より，$\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2\right)$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}s-a\\ t\end{pmatrix}$ より，$\dfrac{1}{2}\left|-at+b(s-a)\right|$

よって，

$$2\left|-at-b(s-a)\right|=\sqrt{3}\left(a^2+b^2\right)$$

$$\therefore 2\left|bs+at-ab\right|=\sqrt{3}\left(a^2+b^2\right)$$

$$\therefore 2bs+2at=2ab\pm\sqrt{3}\left(a^2+b^2\right) \quad ・・・②$$

①，②より，

$$R\left(\frac{a\pm\sqrt{3}b}{2},\frac{b\pm\sqrt{3}a}{2}\right)$$

例題 7　不等式の証明／数学的帰納法

(2)

（ⅱ）

別解

$n=k$ のとき，$1-(p_1+p_2+\cdots+p_k)<(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)$ が成り立つと仮定すると，

$$1-(p_1+p_2+\cdots+p_k)+(-p_{k+1})<(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)+(-p_{k+1})$$

$$1-(p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1})<(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)+(-p_{k+1})\quad\cdot\cdot\cdot①$$

$$\begin{aligned}&(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)(1-p_{k+1})-\{(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)+(-p_{k+1})\}\\&=(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)\cdot(-p_{k+1})+p_{k+1}\\&=p_{k+1}\{1-(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)\}\end{aligned}$$

ここで，$0<p_i<1$ より，$0<1-p_i<1$

$\therefore 0<(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)<1$

$\therefore 1-(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)>0$

よって，

$$(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_k)+(-p_{k+1})<(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_{k+1})\quad\cdot\cdot\cdot②$$

①，②より，

$$1+(p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1})<(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_{k+1})$$

例題 9　格子点の数え上げ

(1)

別解

$x+y\leq n$ を満たす第 1 象限の格子点の数について

$x=k\ (1\leq k\leq n-1)$ とすると，第 1 象限の格子点の数は,

$$1+2+\cdots+k+\cdots+(n-1)=\frac{\{1+(n-1)\}}{2}\cdot(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

第 1 象限の格子点は x 軸， y 軸，原点について対称な関係にあるそれぞれの格子点と

1 対 1 に対応するから，全象限の格子点の数は， $\dfrac{n(n-1)}{2}\times 4=2n(n-1)$

これに原点と原点を除く x 軸上の格子点の数 $2n$ ，原点を除く y 軸上の格子点の数 $2n$,

を加えると， $2n(n-1)+2n+2n+1=2n^2+2n+1$

(2)

別解

任意の平面 $z=k\ (1\leq k\leq n)$ 上の格子点は,

$|x|+|y|\leq n-|z|$ より， $|x|+|y|\leq n-k$ を満たすから,

その格子点の数は， $2(n-k)^2+2(n-k)+1$

$n-k=n-1,n-2,\cdots,n-n=0$ より， $n-k=l$ とおくと， $l=0,,1,2,\cdots,n-1$

よって，平面 $z=k\ (1\leq k\leq n)$ の全格子点の数は,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\{2(n-k)^2+2(n-k)+1\}&=\sum_{l=0}^{n-1}(2l^2+2l+1)\\&=1+\sum_{l=1}^{n-1}(2l^2+2l+1)=1+\frac{(n-1)n(2n-1)}{3}+n(n-1)+(n-1)\\&=\frac{2}{3}n^3+\frac{1}{3}n\end{aligned}$$

平面 $z=k\ (1\leq k\leq n)$ の格子点と平面 $z=-k\ (1\leq k\leq n)$ の格子点は $z=0$ に関して

1 対 1 に対応するから，平面 $z=-k\ (1\leq k\leq n)$ の全格子点の数も $\dfrac{2}{3}n^3+\dfrac{1}{3}n$

これと平面 $z=0$ 上の格子点の数 $2n^2+2n+1$ より,

$|x|+|y|+|z|\leq n$ となる格子点，すなわち整数の組 (x,y,z) の個数は,

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}n^3+\frac{1}{3}n\right)+2n^2+2n+1=\frac{4}{3}n^2+2n^2+\frac{8}{3}n+1$$

例題 11　二項係数がらみの和

(2)

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ より，両辺を x で微分すると，$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k x^{k-1}$

これに $x=1$，$n=16$ を代入すると，$16\cdot(1+1)^{16-1} = \sum_{k=0}^{16} k \cdot {}_{16}\mathrm{C}_k 1^{k-1}$

$\therefore \sum_{k=0}^{16} k \cdot {}_{16}\mathrm{C}_k = 16\cdot 2^{15} = 2^{19}$

(2)

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ より，$\int_b^a (1+x)^n dx = \int_b^a \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k dx$

よって，$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k dx$

$$\therefore \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

$$\therefore \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$$

これに $n=8$ を代入すると，$\sum_{k=0}^{8} \frac{{}_8\mathrm{C}_k}{k+1} = \frac{2^{8+1}-1}{9}$　　$\therefore \sum_{k=0}^{8} \frac{{}_8\mathrm{C}_k}{k+1} = \frac{511}{9}$

注意

$f(x)=g(x)$ のとき，

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$，$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると，

$F(x)=G(x)+C$ より，よって，$f(x)=g(x) \Rightarrow F(x)=G(x)$ は成り立たない。

例題 15　多項式の漸化式

(3)

略解

$f_n(x)=0\ (-2<x<2)$ を $f_n(2\cos\theta)=0\ (0<\theta<\pi)$ とおくと，

$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ より，

$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}=0\ (0<\theta<\pi)$　$\therefore \theta=\dfrac{k}{n}\pi\ (k=1,2,\cdots,n-1)$

よって，$f_n(2\cos\theta)=0$ を満たす θ は $n-1$ 個ある。

$x=2\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$ において，x と θ は 1 対 1 に対応するから，

$f_n(x)=0\ (-2<x<2)$ を満たす解 x も $n-1$ 個存在する。

例題 16　方程式の証明問題／グラフの活用

（ロ）

別解（略解）

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと，

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$ となる異なる 2 実数解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$a>0,b>0$ および解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a<0$，$\alpha\beta=\dfrac{b}{3}>0$

よって，$\alpha<\beta<0$

よって，条件より，$f(\alpha)>0$，$f(\beta)<0$

よって，実数解を $p<q<r$ とすると，少なくとも p,q について，

$p<\alpha<q<\beta<0$ が成り立つ。

例題 17　方程式の解の個数／置き換え

(2)

　異なる 4 つの実数解をもつときの状況