

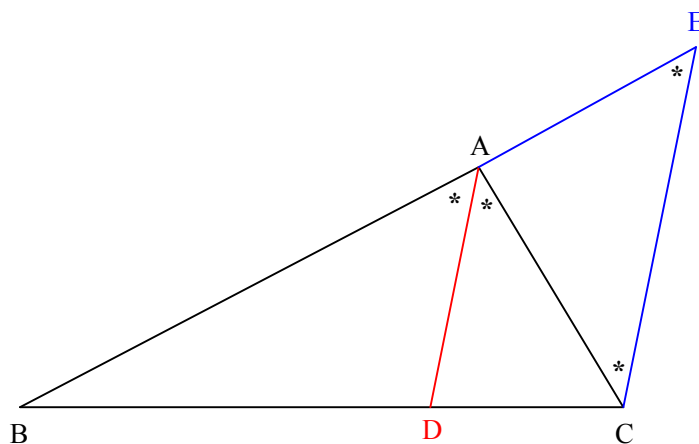
図形の性質 1 三角形の辺の比

角の二等分線と比

定理 1

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と点 BC との交点 D は、辺 BC を $AB : AC$ に内分する。

すなわち $BD : DC = AB : AC$



証明

点 C を通り AD と平行な直線と直線 AB の交点を E とすると、

$AD \parallel EC$ より、 $\angle CAD = \angle ACB$ 、 $\angle BAD = \angle AEC$

これと $\angle BAD = \angle CAD$ より、 $\angle ACE = \angle AEC$

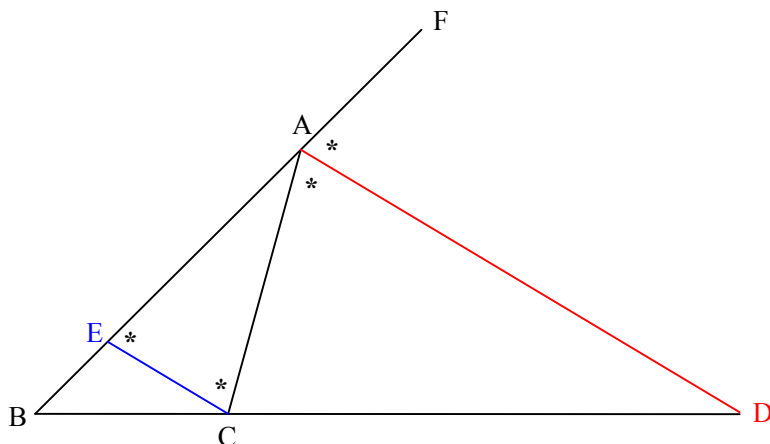
よって、 $AE = AC$ ……①

また、平行線と線分の比より、 $BD : DC = BA : AE$ ……②

ゆえに、①と②より、 $BD : DC = AB : AC$

定理 2

$AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ の頂点 A における外角の二等分線と直線 BC との交点 D は、
辺 BC を $AB : AC$ に外分する。



証明

$AB=AC$ のとき

頂点 A における外角の二等分線と半直線 BA のなす角と $\angle B$ は同位角の関係にあり、
 $AB=AC$ のとき、これら 2 つの角の大きさが等しくなる。

よって、頂点 A における外角の二等分線は直線 BC と平行となり、交わらない。

$AB \neq AC$ のとき

点 C を通り AD と平行な直線と辺 AB の交点を E とすると、

$AD \parallel EC$ より、 $\angle CAD = \angle ACE$ 、 $\angle FAD = \angle AEC$

これと $\angle CAD = \angle FAD$ より、 $\angle ACE = \angle AEC$

よって、 $AE = AC$ ……①

また、平行線と線分の比より、 $BD : DC = BA : AE$ ……②

ゆえに、①と②より、 $BD : DC = AB : AC$

133

(1)

対角線の交点を O とすると,

$\triangle OAB$ において OE は $\angle O$ の二等分線だから, $AE : EB = OA : OB \quad \dots \textcircled{1}$

$\triangle OBC$ において OF は $\angle O$ の二等分線だから, $CF : FB = OC : OB \quad \dots \textcircled{2}$

平行四辺形の性質より, $OA = OC \quad \dots \textcircled{3}$

①～③より, $AE : EB = CF : FB$

(2)

(1)より, $EF \parallel AC$

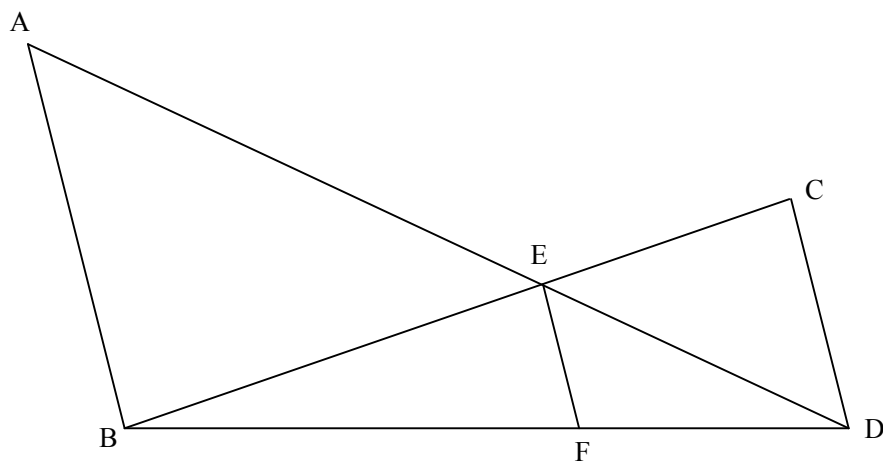
以下(1)と同様にして,

$\triangle OAD$ と $\triangle OCD$ について, $AH : HD = CG : GD$ より, $HG \parallel AC$

$\triangle OAB$ と $\triangle OAD$ について, $AE : EB = AH : HD$ より, $BD \parallel EH$

$\triangle OBC$ と $\triangle ODC$ について, $BF : FC = DG : GC$ より, $BD \parallel FG$

補足：超有名問題



$AB \parallel EF \parallel CD$, $AB = p$, $CD = q$, $EF = x$ とする。

x を p と q を用いて表わせ。

略解

AB//CD より, $\triangle ABE \sim \triangle DCE$

よって, $BE : CE = AB : DC = p : q$

ゆえに, $BE : BC = p : p + q \quad \dots \textcircled{1}$

EF//CD より, $\triangle EBF \sim \triangle CBD$

よって, $EF : CD = BE : BC$ すなわち $x : q = BE : BC$

これと①より, $x : q = p : p + q \quad \therefore x = \frac{pq}{p + q}$