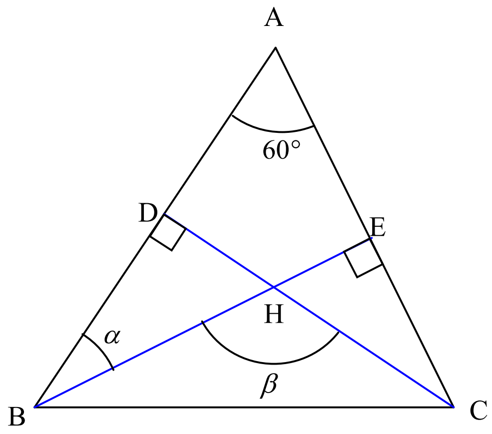
図形の性質 2　三角形の外心，内心，重心

140

(1)



∠E＝90°の直角三角形 ABE において，

$$\begin{aligned}\alpha &= 180° - (\angle \mathrm{BAE} + \angle \mathrm{AEB}) \\ &= 180° - (60° + 90°) \\ &= 30°\end{aligned}$$

角 β は∠D が 90°の直角三角形 BHD の頂点 H における外角だから，

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha + \angle \mathrm{BDH} \\ &= 30° + 90° \\ &= 120°\end{aligned}$$

(2)

∠D が 90°の直角三角形 BCD について，

$$\begin{aligned}\alpha &= 180° - (\angle \mathrm{D} + \angle \mathrm{C}) \\ &= 180° - (90° + 40°) \\ &= 50°\end{aligned}$$

直線 AH と辺 BC の交点を E とすると，△HBE は∠E が 90°の直角三角形だから，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BHE} &= 180° - (\alpha + \angle \mathrm{E}) \\ &= 180° - (50° + 90°) \\ &= 40°\end{aligned}$$

角 β は∠BHE の対頂角だから，$\beta = 40°$

141

IP, IQ, IR と各辺との交点を D, E, F とすると，

D, E, F はそれぞれ IP, IQ, IR の中点かつ $ID = IE = IF$ より， $IP = IQ = IR$

よって，I は△PQR の 3 つの頂点から等距離にある。

ゆえに，I は △PQR の外心である。

142

内心 I は辺 AB と辺 BC から等距離にあるから，BI は∠ABC の二等分線である。

よって，$\angle ABI = \angle CBI = \frac{1}{2}\angle ABC$ ・・・①

I_1 を傍心とする傍接円と直線 AB の交点を D とすると，

I_1 は直線 BD と辺 BC から等距離にあるから，BI_1 は∠CBD の二等分線である。

よって，$\angle CBI_1 = \angle DBI_1 = \frac{1}{2}\angle CBD$ ・・・②

①，②および$\angle ABC + \angle CBD = 180°$ より，

$\angle IBI_1 = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle CBD = 90°$

143

△ABC の外接円と線分 II_1 の交点を D とする。

BI は∠ABC の二等分線だから，$\angle ABI = \angle CBI = \alpha$ とおく。

AI は∠BAC の二等分線だから，$\angle BAI = \angle CAI = \beta$ とおく。

すると，∠DBC と∠DAC は弧 DC の円周角だから，$\angle DBC = \angle DAC = \angle CAI = \beta$

△DBI について，

$\angle DBI = \angle CBI + \angle DBC = \alpha + \beta$ ・・・①

∠DIB は△AIB の頂点 I における外角だから，$\angle DIB = \angle ABI + \angle BAI = \alpha + \beta$ ・・・②

①，②より，$\angle DBI = \angle DIB$

よって，$DB = DI$ ・・・③

$\triangle DI_1B$ について，

$\angle DI_1B = \angle II_1B = 180° - (\angle IBI_1 + \angle I_1IB)$

ここで，BI_1 は△ABC の頂点 B における外角の二等分線だから，

$\angle I_1BC = \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$ より，

$\angle IBI_1 = \angle IBC + \angle I_1BC = \alpha + (90° - \alpha) = 90°$

よって，$\angle DI_1B = 180° - (\angle IBI_1 + \angle I_1IB) = 180° - \{90° + (\alpha + \beta)\} = 90° - (\alpha + \beta)$

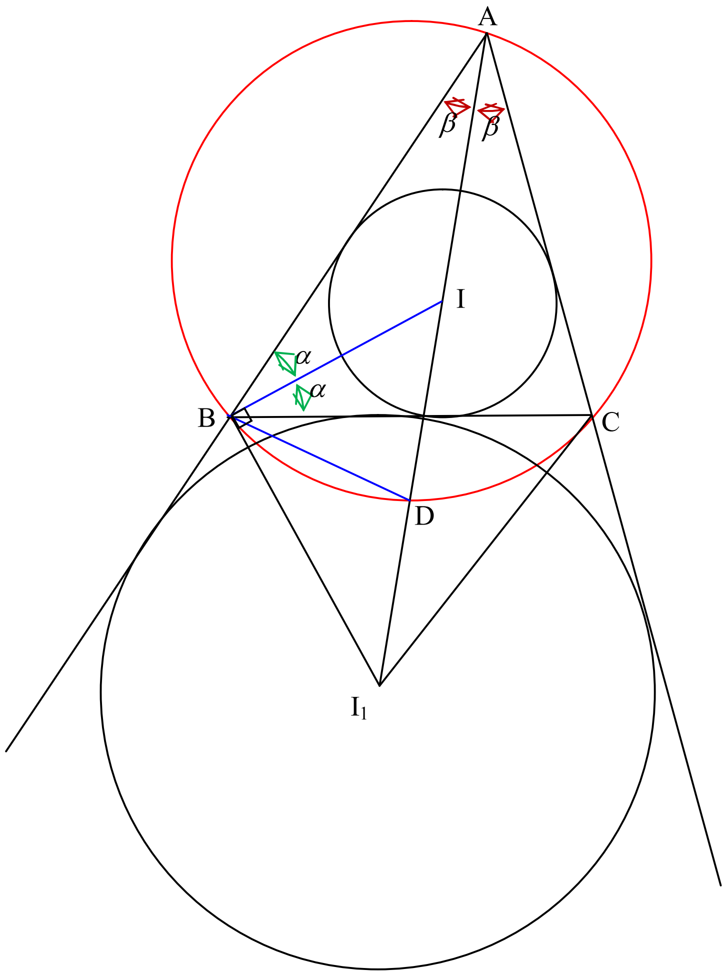
また，$\angle DBI_1 = \angle IBI_1 - \angle DBI = 90° - (\alpha + \beta)$

したがって，$\angle DI_1B = \angle DBI_1$

よって，$DB = DI_1$ ・・・④

③，④より，$DI = DI_1$

ゆえに，△ABC の外接円は線分 II_1 を 2 等分する。



144

傍接円 I_B の中心を I_B，傍接円 I_B と直線 BC の接点を E とすると，$I_BE \perp BC$　・・・①

また，これより，$AD // I_BE$　・・・②

傍接円 I_B と半直線 BA の接点を F とすると，

$$\angle CAI_B = \frac{1}{2}\angle CAF = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

これと $\angle ABC = \angle ACB$ より，$\angle CAI_B = \angle ACB$

錯覚が等しいから，$AI_B // BC$　・・・③

①～③より，四角形 $ADEI_B$ は長方形である。

よって，$I_BE = AD$

ゆえに，∠B 内の傍接円 I_B の半径は AD に等しい。