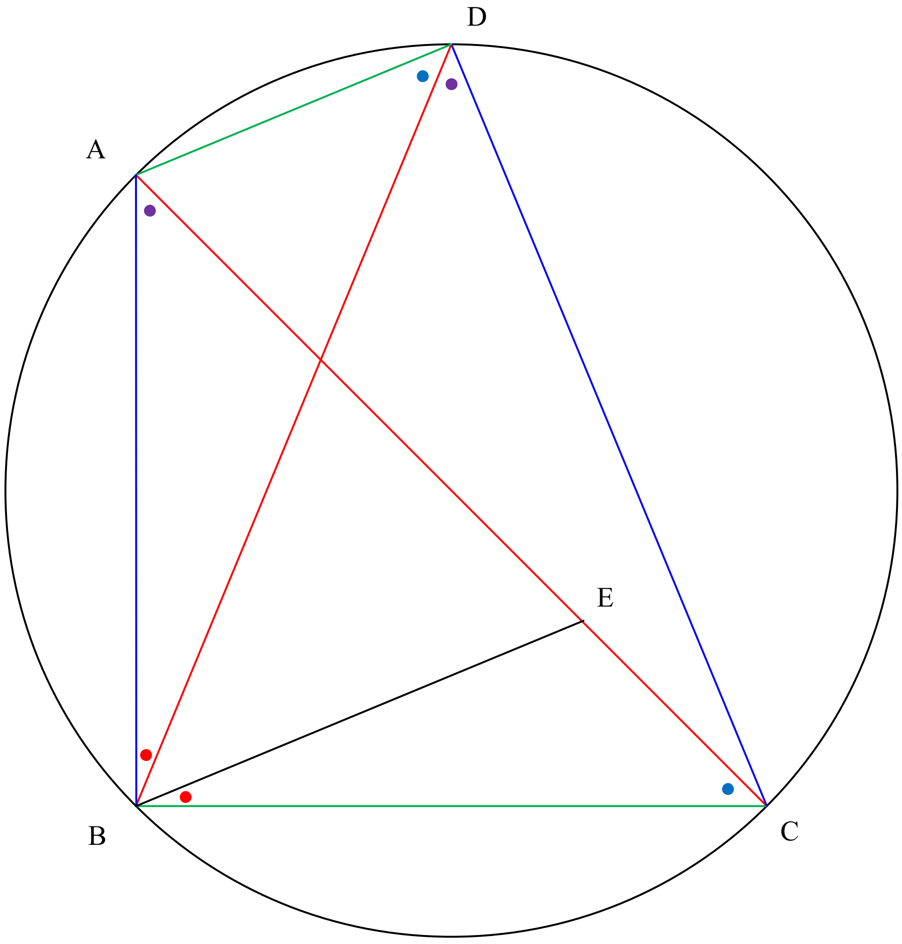
図形の性質 4　円に内接する四角形

トレミーの定理も是非知っておきましょう。

トレミーの定理

円に内接する四角形 ABCD について，対角線の長さの積＝対辺の長さの積の和，

すなわち $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ が成り立つ。



証明

対角線 AC 上に∠ABD＝∠CBE となる点 E をとる。

△ABD ∽ △EBC より，AD：EC＝BD：BC

$\therefore BD \cdot EC = BC \cdot DA$　・・・①

△DBC ∽ △ABE より，DC：AE＝BD：BA

$\therefore BD \cdot AE = AB \cdot CD$　・・・②

①＋②より，

$BD \cdot (AE + EC) = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

よって，$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

167

円周角の定理より，$\angle AA'B = \frac{1}{2}\angle AOB$ ・・・①

$AA'//BB'$ より，錯覚が等しいから，$\angle AA'B = \angle A'BB'$ ・・・②

円周角の定理より，$\angle A'AB' = \angle A'BB'$ ・・・③

①，②，③より，$\angle AA'B = \angle A'AB' = \frac{1}{2}\angle AOB$

すなわち $\angle AA'P = \angle A'AP = \frac{1}{2}\angle AOB$

これと，$\Delta APA'$ において，$\angle APB = \angle AA'P + \angle A'AP$ より，

$$\begin{aligned}\angle APB &= \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle AOB \\ &= \angle AOB\end{aligned}$$

168

円周角の定理より，$\angle EBC = \angle EAC$ $\therefore \angle EBD = \angle CAD$ ・・・①

直線 BH と辺 AC の交点を F とする。

△CBF と△CAD について

$\angle C$ が共通であることと①より，$\triangle CBF \backsim \triangle CAD$ $\therefore \angle CBF = \angle CAD$

したがって，$\angle HBD = \angle CAD$ ・・・②

△EBD と△HBD について

$\angle EDB = \angle HBD = 90°$，BD が共通，また，①と②より，$\angle EBD = \angle HBD$

よって，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，△EBD≡△HBD

したがって，ED＝HD

ゆえに，D は線分 HE の中点である。

169

(1)

四角形 ABCF は円に内接しているから，$\angle FAB + \angle BCF = 180°$

これと $\angle FAB = 120°$，$\angle BCF = \angle BCD - \angle FCD = 110° - \angle FCD$ より，

$120° + (110° - \angle FCD) = 180°$ $\therefore \angle FCD = 50°$ ・・・①

四角形 CDEF は円に内接しているから，$\angle DEF + \angle FCD = 180°$ ・・・②

①，②より，$\angle DEF + 50° = 180°$

よって，$\angle DEF = 130°$ すなわち $\theta = 130°$

(2)

$\theta=\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{DAE}$　・・・①

$\angle$BAD について

四角形 ABCD は円に内接しているから，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{C}$ の外角

ここで，$\angle$C の外角は△BCD の $\angle$C の外角でもあるから，

$\angle$C の外角 $=30^\circ+40^\circ=70^\circ$

よって，$\angle\mathrm{BAD}=70^\circ$　・・・②

$\angle$DAE について

弧 BC の長さと弧 DE の長さが等しいから，$\angle\mathrm{DAE}=\angle\mathrm{BDC}=40^\circ$　・・・③

②，③を①に代入することにより，$\theta=110^\circ$

170

△ABD と△ACE について

条件より，AB＝AC　・・・①　BD＝CE　・・・②

四角形 ABDE は円に内接しているから，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ACE}$　・・・③

①〜③より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△ABD≡△ACE

よって，AD＝AE

ゆえに，△ADE は二等辺三角形である。

171

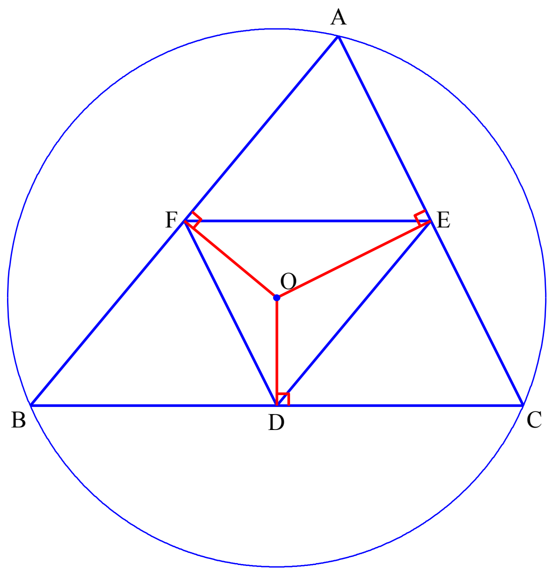
△ABC の外心 O は各辺の垂直二等分線の交点だから，OD⊥BC，OE⊥CA，OF⊥AB

よって，四角形 AFOE において，$\angle\mathrm{AFO}+\angle\mathrm{OEA}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

これより, 対角の和が 180° だから, 四角形 AFOE は△ABC の外心 O を通る円に内接する。

ゆえに，△AFE の外接円は外心 O を通る。

同様に，△BDF，△CED の外接円も△ABC の外心 O を通る。

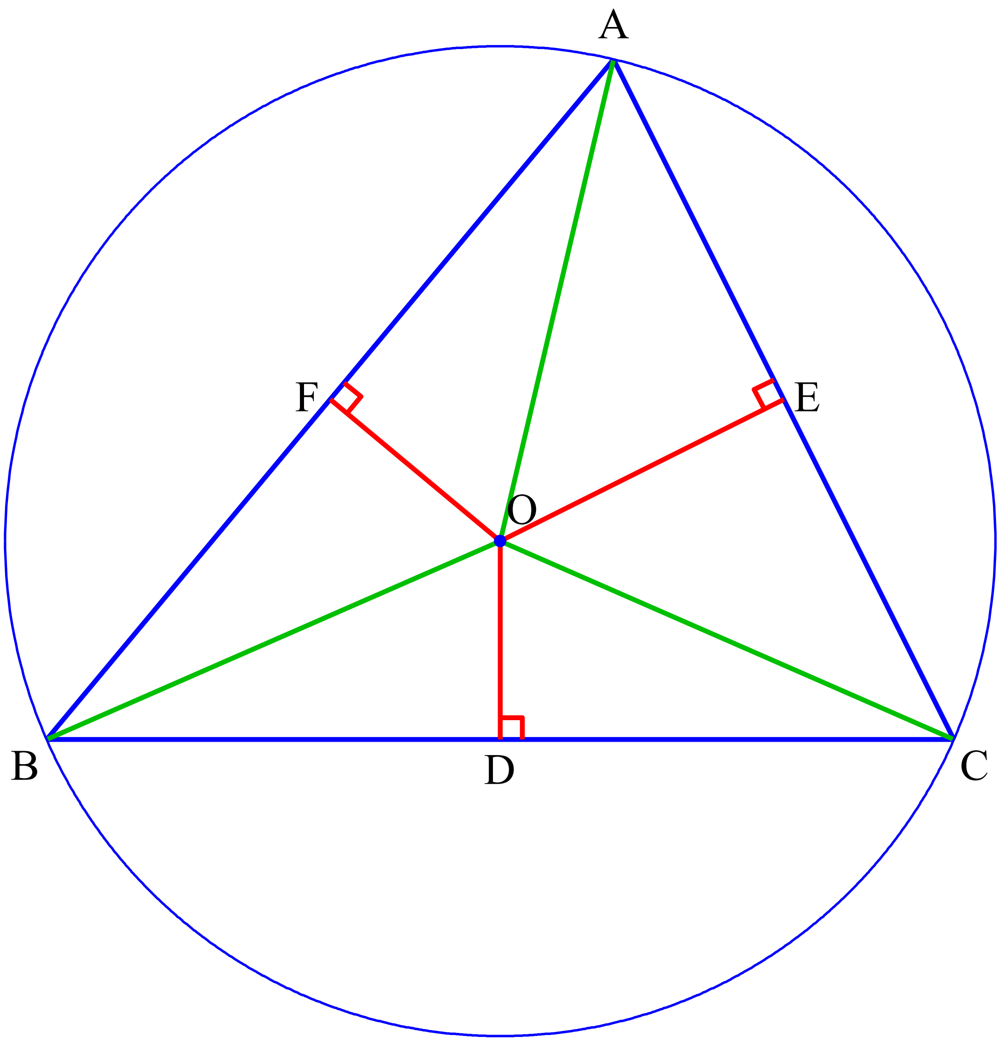


参考図

OA = OB より，OF は辺 AB の垂直二等分線，

OB = OC より，OD は辺 BC の垂直二等分線

OC = OA より，OE は辺 CA の垂直二等分線



172

$\angle\mathrm{AED}+\angle\mathrm{AFD}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ だから，四角形 AEDF は円に内接する。

よって，四角形 AEDF の外接円において，円周角の定理より，$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{AFE}$ ・・・①

$\triangle\mathrm{ADE}$ と $\triangle\mathrm{ABD}$ は $\angle\mathrm{A}(\neq 90^\circ)$ を共有する直角三角形だから，$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ABD}$ ・・・②

①，②より，$\angle\mathrm{AFE}=\angle\mathrm{ABD}$

よって，四角形 EBCF の $\angle\mathrm{EBC}$ の対角の外角と $\angle\mathrm{AFE}$ が等しいから，

四角形 EBCF は円に内接する。

補足

四角形が円に内接することを証明する方法

1. 内接四角形の性質を利用する方法
2. 円周角の定理の逆を利用する方法
3. 方べきの定理の逆を利用する方法