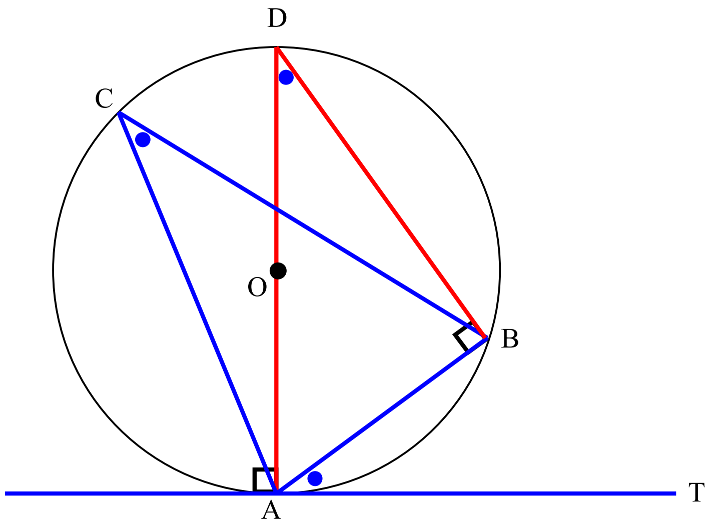
図形の性質 5　円と直線

接弦定理

$\angle BAT = \angle ACB$



円周角の定理より，$\angle ADB = \angle ACB$　・・・①

$\triangle ABD$ について

$\angle ADB + \angle DAB + \angle ABD = 180°$ より，$\angle ADB = 180° - \angle DAB - \angle ABD$　・・・②

$AD \perp AT$ より，$\angle DAB = 90° - \angle BAT$　・・・③

$\angle ABD$ は直径 AD の円周角だから，$\angle ABD = 90°$　・・・④

②に③と④を代入することにより，

$$\begin{aligned}\angle ADB &= 180° - \angle DAB - \angle ABD \\ &= 180° - (90° - \angle BAT) - 90° \\ &= \angle BAT \quad ・・・⑤\end{aligned}$$

①と⑤より，$\angle BAT = \angle ACB$

177

(1)

円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しいから，

$\mathrm{BD}=\mathrm{BF}=x$， $\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=y$， $\mathrm{AE}=\mathrm{AF}=z$ とおくと，

$x+y=a$ ・・・①

$y+z=b$ ・・・②

$z+x=c$ ・・・③

①＋②＋③より，$2(x+y+z)=a+b+c$ $\therefore x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}$ ・・・④

④－②より，$x=\dfrac{a-b+c}{2}$ $\therefore \mathrm{BD}=\dfrac{a-b+c}{2}$

④－③より，$y=\dfrac{a+b-c}{2}$ $\therefore \mathrm{CE}=\dfrac{a+b-c}{2}$

④－①より，$z=\dfrac{-a+b+c}{2}$ $\therefore \mathrm{AF}=\dfrac{-a+b+c}{2}$

(2)

内心を I とすると，$\mathrm{ID}=\mathrm{IE}=\mathrm{IF}=r$，$\mathrm{ID}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{IE}\perp\mathrm{CA}$，$\mathrm{IF}\perp\mathrm{AB}$ より，

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{IBC}&=\frac{1}{2}\mathrm{ID}\cdot\mathrm{BC}\\&=\frac{1}{2}ra\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{ICA}&=\frac{1}{2}\mathrm{IE}\cdot\mathrm{CA}\\&=\frac{1}{2}rb\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{IAB}&=\frac{1}{2}\mathrm{IF}\cdot\mathrm{AB}\\&=\frac{1}{2}rc\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{ABC}&=\Delta\mathrm{IBC}+\Delta\mathrm{ICA}+\Delta\mathrm{IAB}\\&=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc\\&=\frac{r(a+b+c)}{2}\end{aligned}$$

(3)

$a^2 = b^2 + c^2$ より, 三平方の定理が成り立つから, △ABC は $\angle A = 90°$ の直角三角形である。

$\therefore \Delta ABC = \dfrac{1}{2}bc = 6$

また，(2)より， $\Delta ABC = \dfrac{r(a+b+c)}{2} = \dfrac{r(5+3+4)}{2} = 6r$

よって， $6 = 6r \quad \therefore r = 1$

178

解 1

対頂角の大きさは等しいから， $\angle APT = \angle BPO$ ・・・①

△OBP は OB = OP の二等辺三角形だから，

二等辺三角形の性質より， $\angle PBO = \angle BPO$ ・・・②

四角形 PBCQ は円に内接しているから，

内接四角形の性質より， $\angle PBO = \angle AQP$ ・・・③

①～③より， $\angle APT = \angle AQP$

よって，接弦定理の逆により，PT は△APQ の外接円に接する。

解 2

四角形 PBCQ は円に内接しているから，

内接四角形の性質より， $\angle PBO = \angle AQP$ ・・・①

△OBP は OB = OP の二等辺三角形だから，

二等辺三角形の性質より， $\angle PBO = \angle BPO$ ・・・②

よって，①，②より， $\angle AQP = \angle BPO$ ・・・③

$\angle BPQ$ は△APQ の $\angle P$ の外角だから， $\angle BPQ = \angle PAQ + \angle AQP$ ・・・④

③，④より，

$$\begin{aligned}\angle BPQ &= \angle PAQ + \angle AQP \\ &= \angle PAQ + \angle BPO\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\angle PAQ &= \angle BPQ - \angle BPO \\ &= \angle OPQ\end{aligned}$$

ゆえに，接弦定理の逆により，PT は△APQ の外接円に接する。

参考図