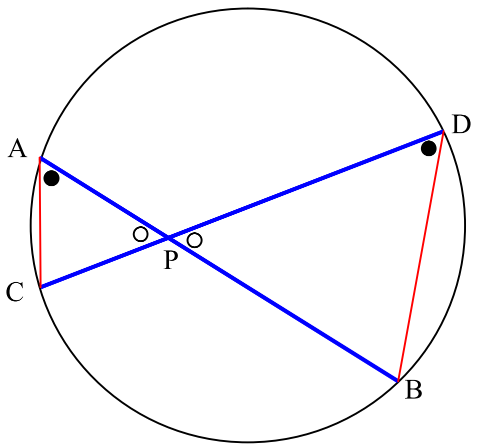
図形の性質 6　方べきの定理

方べきの定理



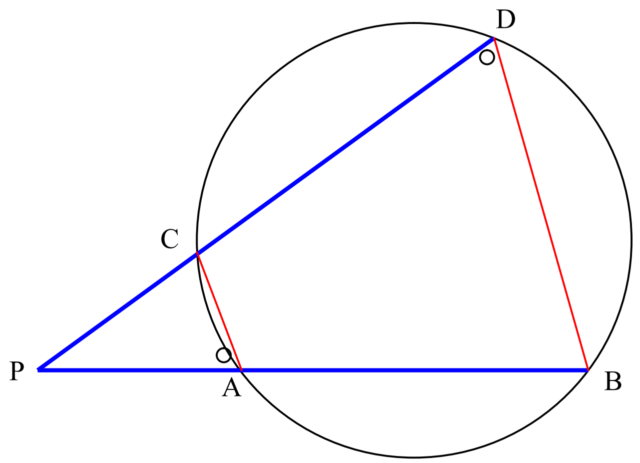
△PAC と△PDB について

∠APC＝∠DPB（対頂角）　・・・①

円周角の定理より，∠PAC＝∠PDB　・・・②

①，②より，対応する 2 つの角の大きさがそれぞれ等しいから，△PAC ∽ △PDB

よって，$\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$　すなわち　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$



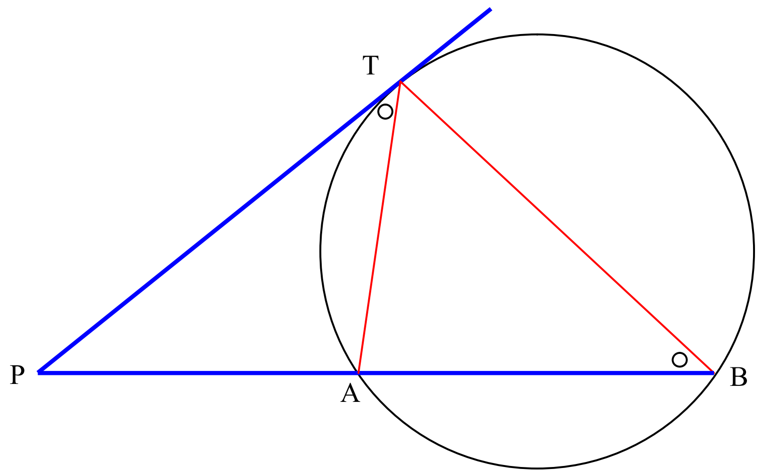
△PAC と△PDB について，

∠P は共通　・・・①

四角形 ABDC は円に内接しているから，内接四角形の性質より，∠PAC＝∠PDB　・・・②

①，②より，対応する 2 つの角の大きさがそれぞれ等しいから，△PAC ∽ △PDB

よって，$\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$　すなわち　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$



△PAT と△PTB について

∠P は共通　・・・①

直線 PT は円の接線，T は接点だから，接弦定理より，∠PTA＝∠PBT　・・・②

①，②より，対応する 2 つの角の大きさがそれぞれ等しいから，△PAT ∽ △PTB

よって，$\dfrac{PA}{PT}=\dfrac{PT}{PB}$　すなわち　$PA \cdot PB = PT^2$

183

CT は円 O の接線だから，方べきの定理より， $CT^2 = AC \cdot BC$

これと

$$\begin{aligned} BC &= 2AB \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= AB + BC \\ &= AB + 2AB \\ &= 2 + 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

より， $CT^2 = 24$ $\therefore CT = 2\sqrt{6}$ ・・・(答)

△CAT と△CTB について

接弦定理より， $\angle TAC = \angle BTC$ ・・・①

$\angle C$ は共通 ・・・②

対応する 2 つの角の大きさがそれぞれ等しいから，△CAT ∽ △CTB

よって， $\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{AC}{TC}$

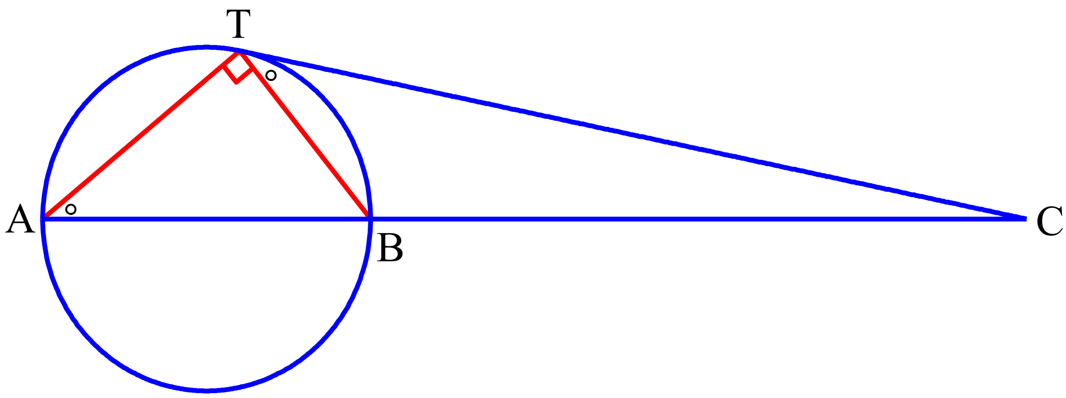
これと $AC = 6,\ TC = 2\sqrt{6}$ より， $\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{6}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$ $\therefore BT = \dfrac{\sqrt{6}}{3}AT$ ・・・③

△ATB について

$\angle ATB$ は直径の円周角だから， $\angle ATB = 90°$

よって，三平方の定理より， $AT^2 + BT^2 = AB^2$

これと③および $AB = 2$ より， $AT^2 + \dfrac{6}{9}AT^2 = 4$ $\therefore AT = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ ・・・(答)



184

△BCE と△BFD について

方べきの定理より， $BD \cdot BC = BA^2$, $BF \cdot BE = BA^2$ $\therefore BD \cdot BC = BF \cdot BE$

ゆえに，方べきの定理の逆により，4 点 C, D, E, F は 1 つの円周上にある。

補足

四角形が円に内接することを証明する方法

1．内接四角形の性質を利用する方法

2．円周角の定理の逆を利用する方法

3．方べきの定理の逆を利用する方法

185

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形だから，

二等辺三角形の性質より，∠ABC＝∠ACB ・・・①

円周角の定理より，∠ACB＝∠ADB ・・・②

①，②より，∠ABC＝∠ADB すなわち ∠ABE＝∠BDE

よって，接弦定理の逆により，直線 AB は点 B,D,E を通る円に接する。

ゆえに，方べきの定理より， $AD \cdot AE = AB^2$