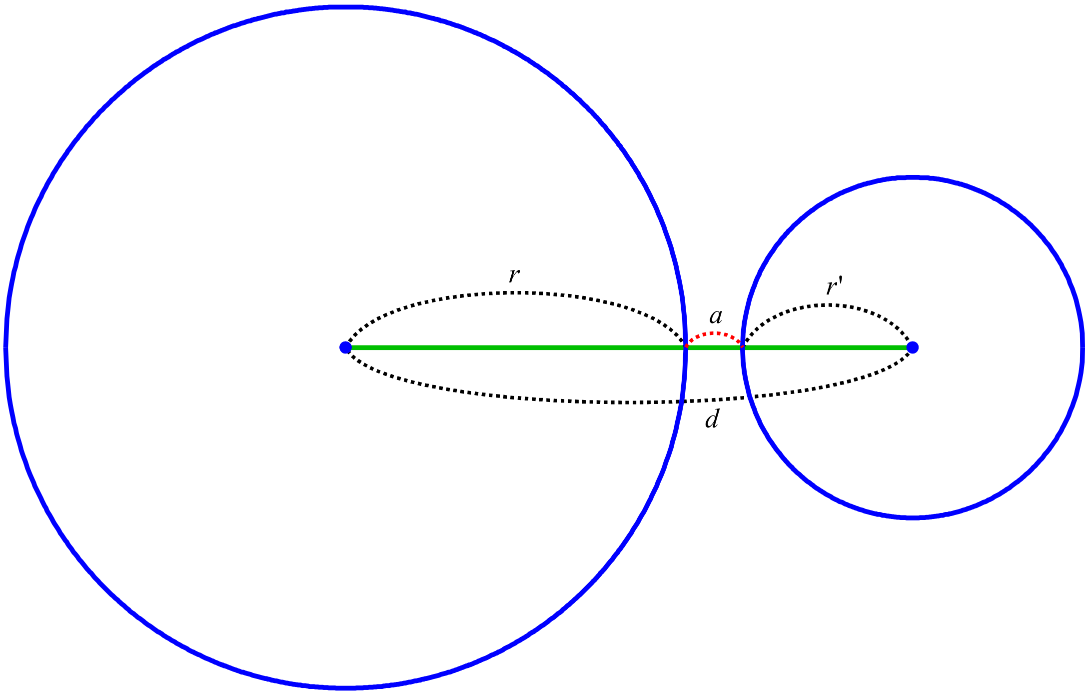
図形の性質 7　2 つの円の位置関係

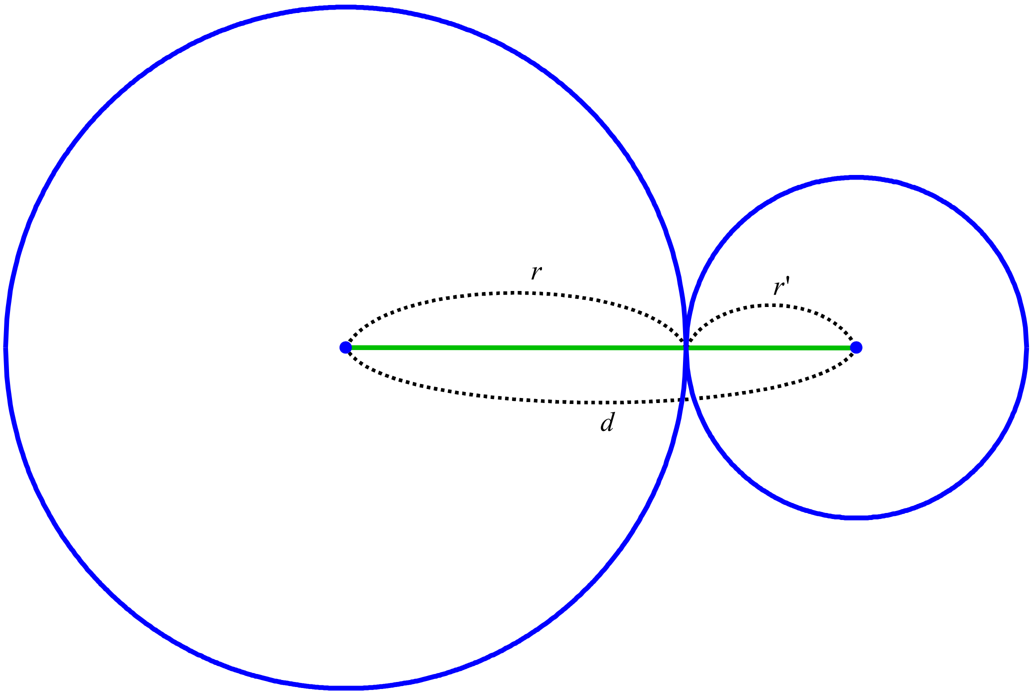
2 つの円の位置関係

2 つの円の半径を r, r' $(r > r')$，2 つの円の中心間の距離を d とする。

1. 一方が他方の外部にある　$d > r + r'$ $(\because d = r + a + r' > r + r')$



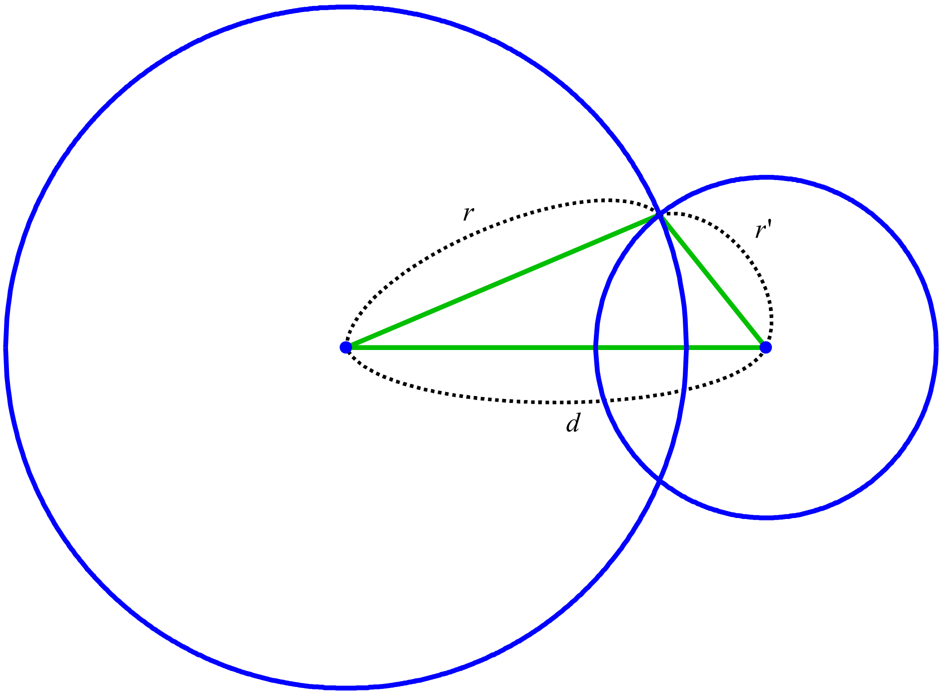
2. 外接する　$d = r + r'$



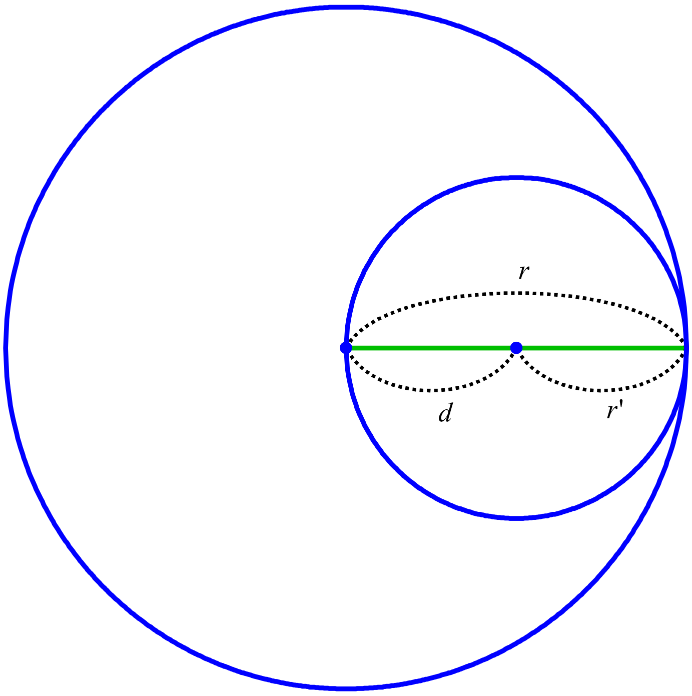
3．2 点で交わる　$r - r' < d < r + r'$

導き方

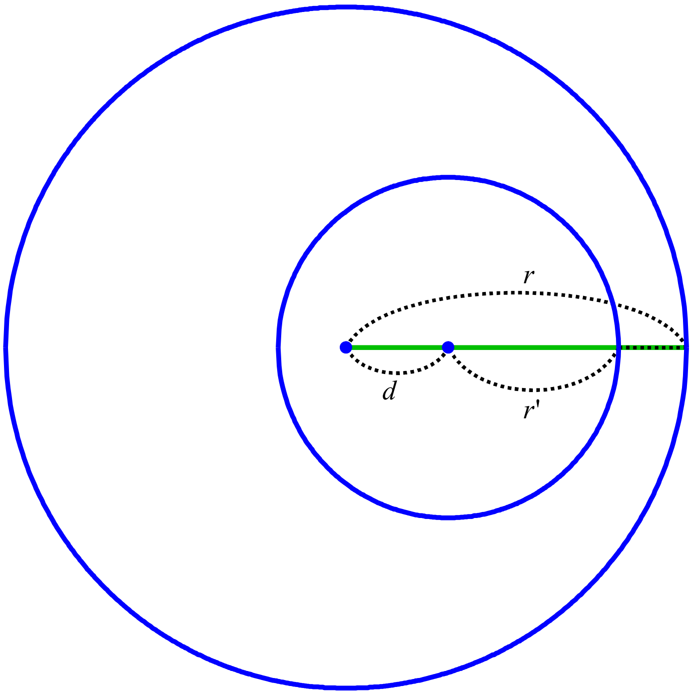
3 辺の長さが r, r', d の三角形ができる。三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きく，長さの差は他の 1 辺より小さいことと $r > r'$ より，$r - r' < d < r + r'$



4．内接する　$d = r - r'$ $(\because r = d + r')$



5. 一方が他方の内部にある。 $d < r - r' \ (\because r > d + r')$

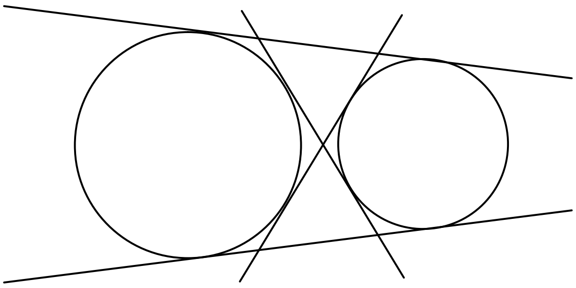


189

中心間の距離は$|t-0|=|t|$

(1)

一方が他方の外部にある場合だから，$|t|>3+2$ より，$|t|>5$ $\therefore t<-5,\ 5<t$



(2)

外接するときまたは内接するときである。

外接するとき

$|t|=3+2$ より，$|t|=5$ $\therefore t=-5,\ 5$

内接するとき

$|t|+2=3$ より，$|t|=1$ $\therefore t=-1,\ 1$

以上より，$t=-5,\ -1,\ 1,\ 5$

(3)

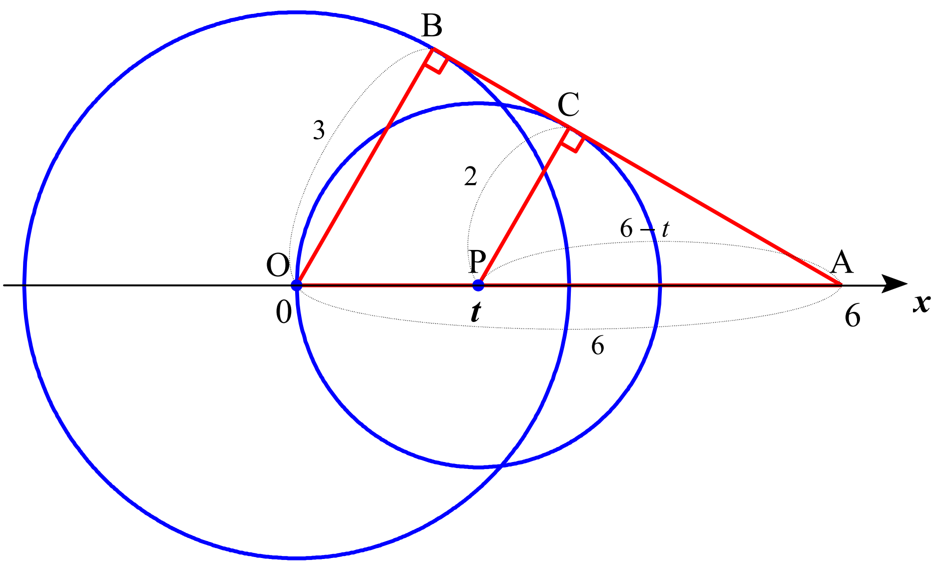
共通接線と円 O，円 P との接点をそれぞれ B，C とする。

共通外接線が点 A を通るとき

$\triangle \mathrm{APC} \backsim \triangle \mathrm{AOB}$ より，$\mathrm{AP}:\mathrm{AO}=\mathrm{PC}:\mathrm{OB}$

これと $\mathrm{AP}=6-t,\ \mathrm{AO}=6,\ \mathrm{PC}=2,\ \mathrm{OB}=3$ より，$6-t:6=2:3$

よって，$3(6-t)=6\cdot 2$ $\therefore t=2$

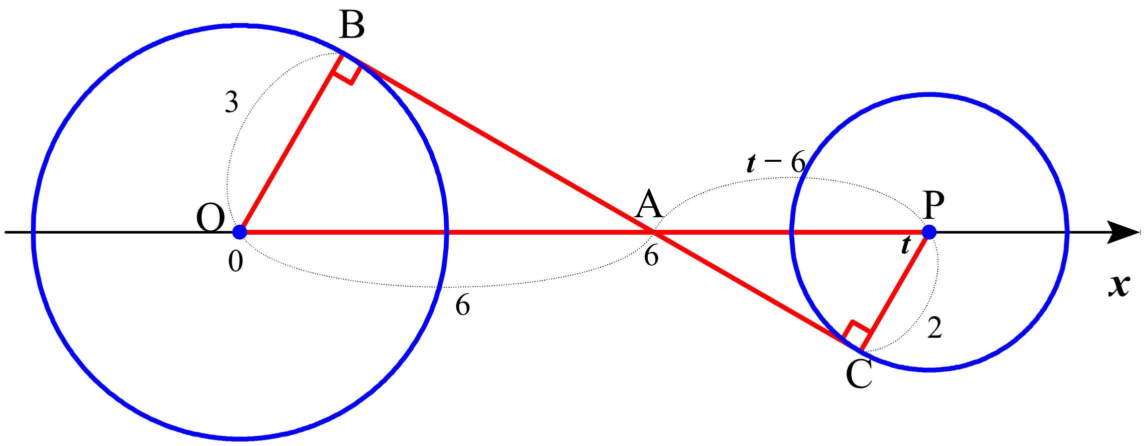


共通内接線が点 A を通るとき

△APC∽△AOB より，AP：AO = PC：OB

これと $AP = t - 6$, $AO = 6$, $PC = 2$, $OB = 3$ より，$t - 6 : 6 = 2 : 3$

よって，$3(t-6) = 6 \cdot 2 \quad \therefore t = 10$



190

円 C の半径を r，円 A,B,C と円 O の内接点をそれぞれ D,E,F,

C から線分 AB に下ろした垂線の足を H とすると，

$OA = OB = 3$，$CA = CB = r + 2$ より，CH は線分 AB の垂直二等分線である。

したがって，△CAH は $\angle H = 90°$ の直角三角形であり，

三平方の定理より，$CH^2 + AH^2 = AC^2$ ・・・① が成り立つ。

また，$AH = \frac{AB}{2} = 2$ ・・・②

$AC = 2 + r$ ・・・③

$CH = CO + OH$ ・・・④

△OAH は $\angle H = 90°$ の直角三角形だから，②および三平方の定理より，

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OA^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{(OD - OA)^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{(5-2)^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{5} \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

$CO = OF - CF = 5 - r$ ・・・⑥

④に⑤，⑥を代入することにより，$CH = \sqrt{5} + 5 - r$ ・・・⑦

②，③，⑦を①に代入することにより，$\left(\sqrt{5} + 5 - r\right)^2 + 2^2 = (2 + r)^2 \quad \therefore r = \frac{5\left(4 + \sqrt{5}\right)}{11}$

補足

$$\left(\sqrt{5}+5\right)^2-2r\left(\sqrt{5}+5\right)+r^2+4=4+4r+r^2 \Leftrightarrow 30+10\sqrt{5}=2r\left(7+\sqrt{5}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore r&=\frac{15+5\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}}\\&=\frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)\left(7-\sqrt{5}\right)}{44}\\&=\frac{5\left(16+4\sqrt{5}\right)}{44}\\&=\frac{5\left(4+\sqrt{5}\right)}{11}\end{aligned}$$