整数の性質 1　約数と倍数

数（複素数）の分類（非常に重要です。）

$$\text{数（複素数）}\ a+bi \begin{cases} \text{実数}(b=0) \begin{cases} \text{有理数} \begin{cases} \text{整数} \begin{cases} \text{正の整数（自然数）} \begin{cases} 1 \\ \text{素数} \\ \text{合成数} \end{cases} \\ 0 \\ \text{負の整数} \end{cases} \\ \text{分数} \end{cases} \\ \text{無理数} \end{cases} \\ \text{虚数}(b \neq 0)\ \text{（}a=0\text{の虚数を純虚数という）} \end{cases}$$

自然数の世界では加法（足し算）と乗法（掛け算）が常に可能である。
つまり，自然数の足し算，掛け算で得られる値は常に自然数である。
整数の世界では加法・減法（引き算）・乗法が常に可能である。
つまり，整数の足し算，引き算，掛け算で得られる値は常に整数である。
有理数の世界では加法・減法・乗法・除法（割り算，0 で割ることを除く）が常に可能である。
つまり，有理数の足し算，引き算，掛け算，割り算で得られる値は常に有理数である。

補足 1：0 で割った数はやたら大きいか小さいことはわかるが，その値すなわち計算結果を知ることはできない。したがって，除法では 0 で割ることを除く。

補足 2：有理数は，任意の 2 つの有理数の差を限りなく小さくとっても，その間に無数の有理数が存在するという点で整数や自然数と異なる。しかし，そんな有理数の間にも無理数という隙間が存在する。これを有理数の稠密性という。

無理数の世界：有理数ならば分数で表せる。
したがって，分数で表せないなら有理数ではない。
分数で表せない数を無理数という。

実数の世界：有理数と無理数をあわせて実数という。
有理数と無理数により，実数直線上の数の隙間がなくなる。
これを実数の連続性という。

虚数の世界：実数ならば，負の実数の平方根は存在しないが，
虚数の世界では，負の実数の平方根が存在する。

数（複素数）の世界：実数と虚数をまとめて数（複素数）という。

0 の約数はすべての整数である。

0 を任意の整数で割った余りは 0 である。すなわち 0 はどの整数でも割り切れる。

よって，0 の約数はすべての整数である。

補足：a を整数とすると，$0 = a \cdot 0$ より，0 を a で割った商は 0 である。

正の約数の個数

自然数 N を素因数分解した結果が $N = p^a q^b r^c \cdots\cdot$ であるとき，

p^a の正の約数の数は $1,\ p,\ p^2,\ \cdots,\ p^a$ より，$a+1$ 個

同様に，q^b の正の約数の数は $b+1$ 個，r^c の正の約数の数は $c+1$ 個，・・・

$p,\ q,\ r,\ \cdots$ は素数だから，これらの約数の値はすべて異なる。

したがって，N の正の約数の数とこられの約数の組合せの数は等しい。

ゆえに，正の約数の数 $= (a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdot$

また，これより，

正の約数の総和 $= \left(1 + p + p^2 + \cdots + p^a\right)\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^b\right)\left(1 + r + r^2 + \cdots + r^c\right)\cdots\cdot$

倍数の判別法

たとえば，5 桁の数を $abcde$ とすると，$abcde = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$ より，

2 の倍数の条件

$$\begin{aligned} abcde &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\ &= 2(5000a + 500b + 50c + 5d) + e \end{aligned}$$

より，e が偶数であればよい。

すなわち一の位が偶数であればよい。

3 の倍数の条件

$$\begin{aligned} abcde &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\ &= (3 \cdot 3333a + a) + (3 \cdot 333b + b) + (3 \cdot 33c + c) + (3 \cdot 3d + d) + e \\ &= 3(3333a + 333b + 33c + 3d) + a + b + c + d + e \end{aligned}$$

より，$a + b + c + d + e$ が 3 の倍数であればよい。

すなわち各位の数の和が 3 の倍数であればよい。

4 の倍数の条件

$$\begin{aligned} abcde &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\ &= 4(2500a + 250b + 25c) + 10d + e \end{aligned}$$

より，$10d + e$ が 4 の倍数であればよい。

すなわち下 2 桁が 4 の倍数であればよい。

5 の倍数の条件

$$\begin{aligned} abcde &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\ &= 5(2000a + 200b + 20c + 2d) + e \end{aligned}$$

より，e が 0 か 5 であればよい。

すなわち一の位が 0 か 5 であればよい。

6 の倍数の条件

2 の倍数かつ 3 の倍数であればよいから，

一の位の数が偶数で，各位の数の和が 3 の倍数であればよい。

8 の倍数の条件

$$
\begin{aligned}
abcde &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\
&= 8(1250a + 125b) + 100c + 10d + e
\end{aligned}
$$

より，$100c + 10d + e$ が 8 の倍数であればよい。

すなわち下 3 桁が 8 の倍数であればよい。

9 の倍数の条件

$$
\begin{aligned}
abcde &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\
&= (9 \cdot 1111a + a) + (9 \cdot 111b + b) + (9 \cdot 11c + c) + (9d + d) + e \\
&= 9(1111a + 111b + 11c + d) + a + b + c + d + e
\end{aligned}
$$

より，$a + b + c + d + e$ が 9 の倍数であればよい。

すなわち各位の数の和が 9 の倍数であればよい。

尚，以上のことはすべての整数について成り立ちます。

223

(1)

□の数を x とすると，

x が 0 以上 9 以下の整数かつ各位の数の和 $5 + 8 + x + 7 = 20 + x$ が 3 の倍数

よって，$x = 1,\ 4,\ 7$

(2)

□の数を x とすると，

x が 0 以上 9 以下の整数かつ下 2 桁の数すなわち $70 + x$ が 4 の倍数

よって，$x = 2,\ 6$

(3)

□の数を位の大きいほうから $x,\ y$ とする。

与えられた自然数が 3 の倍数であるための条件は $x,\ y$ が 0 以上 9 以下の整数且つ各位の数の和 $7 + x + 4 + y + 5$ すなわち $x + y + 16$ が 3 の倍数

よって，この自然数は，$x = 9,\ y = 8$ で，最大数 79485 をとる。

(4)

□の数を位の大きいほうから $x,\ y$ とする。

与えられた自然数が 3 の倍数であるための条件は $x,\ y$ が 0 以上 9 以下の整数且つ各位の数の和 $4 + 3 + x + 8 + y$ すなわち $x + y + 15$ が 9 の倍数

よって，この自然数は，$x = 9,\ y = 3$ で，最大数 43983 をとる。

224

(1)

$A=\sqrt{\dfrac{280}{n}}$ （A は自然数）とすると，$A^2=\dfrac{280}{n}$ より，$\dfrac{280}{n}$ が自然数の 2 乗であればよい。

これと $\dfrac{280}{n}=\dfrac{2^3\cdot 5\cdot 7}{n}=\dfrac{2^2\cdot 2\cdot 5\cdot 7}{n}$ より，これを満たす最小の自然数 $n=2\cdot 5\cdot 7=70$

(2)

$\dfrac{756}{n}$ が自然数の 2 乗であればよい。

これと $\dfrac{756}{n}=\dfrac{2^2\cdot 3^3\cdot 7}{n}=\dfrac{2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 7}{n}$ より，これを満たす最小の自然数 $n=3\cdot 7=21$

(3)

$\dfrac{1617}{n}$ が自然数の 2 乗であればよい。

これと $\dfrac{1617}{n}=\dfrac{7^2\cdot 3\cdot 11}{n}$ より，これを満たす最小の自然数 $n=3\cdot 11=33$

225

$A=\sqrt{\dfrac{3024}{n}}$ （A は自然数）とすると，

$$
\begin{aligned}
A^2&=\frac{3024}{n}\\
&=\frac{2^4\cdot 3^3\cdot 7}{n}\\
&=\frac{2^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 7}{n}
\end{aligned}
$$

より，$A^2=1,\ 2^2,\ 3^2,\ 2^2\cdot 2^2,\ 2^2\cdot 3^2,\ 2^2\cdot 2^2\cdot 3^2$

これと $n=\dfrac{2^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 7}{A^2}$ より，$n=21,\ 84,\ 189,\ 336,\ 756,\ 3024$

226

(1)

自然数 N を素因数分解した結果が $N = p^a q^b r^c \cdots\cdot$ であるとき，

正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdot$ である。

$a+1,\ b+1,\ c+1,\ \cdots$ は 2 以上の自然数だから，

ある自然数の正の約数の個数が 15 個のとき， $15 = (2+1)(4+1),\ 14+1$ より，

素因数の数は 2 個または 1 個である。

したがって， $45 = 3^2 \cdot 5$ より，45 の倍数は少なくとも 2 個の素因数をもつから，

その正の約数の数が 15 個ならば 3 と 5 以外の素因数をもたない。

ゆえに，求める自然数 $n = 3^4 \cdot 5^2,\ 3^2 \cdot 5^4$ すなわち $n = 2025,\ 5625$

(2)

$10 = 9+1,\ (1+1)(4+1)$ より，正の約数の数が 10 個である自然数 N を素因数分解した結果は，

$N = p^9$ または $N = pq^4$ と表せる。

$N = p^9$ とすると，その最小値は $N = 2^9 = 512 > 200$ より，条件を満たさない。

したがって，200 以下の自然数は $N = pq^4$ と表される。

$p = 2,\ q = 3$ のとき

$N = 2 \cdot 3^4 = 162 < 200$ よって，条件を満たす。

$p = 2,\ q = 5$ のとき

$N = 2 \cdot 5^4 > 200$ よって，不適

$p = 3,\ q = 2$ のとき

$N = 3 \cdot 2^4 = 48 < 200$ よって，条件を満たす。

$p = 5,\ q = 2$ のとき

$N = 5 \cdot 2^4 = 80 < 200$ よって，不適

$p = 5,\ q = 3$ のとき

$N = 5 \cdot 3^4 > 200$ よって，不適

$p = 7,\ q = 2$ のとき

$N = 7 \cdot 2^4 = 112 < 200$ よって，条件を満たす。

$p = 11,\ q = 2$ のとき

$N = 11 \cdot 2^4 = 176 < 200$ よって，条件を満たす。

$p = 13,\ q = 2$ のとき

$N = 13 \cdot 2^4 = 208 > 200$ よって，不適

以上より，条件を満たす自然数は 162,48,80,112,176 の 5 個