整数の性質 2　最大公約数と最小公倍数

互いに素

定義 : 2 つの整数 $a,\ b$ が -1 と 1 以外に公約数をもたないとき，a と b は互いに素であるという。

または,

2 つの整数 $a,\ b$ の最大公約数が 1 であるとき，a と b は互いに素であるという。

または,

2 つの整数 $a,\ b$ に共通な素因数がないとき，a と b は互いに素であるという。

補足 :「-1 と 1 以外に公約数をもたない」 $\Leftrightarrow$ 「最大公約数が 1 である」

性質 : a,b が互いに素な整数かつ $am=bn$ ならば，$m=bk,\ n=ak$ （k は整数）

最大公約数

定義 : 公約数のうち最大のもの

最小公倍数

定義 : 公倍数のうち正で最小のもの

最大公約数・最小公倍数の性質

2 つの自然数 $a,\ b$ の最大公約数を g，最小公倍数を l とするとすると，

$a=a'g,\ b=b'g$ （a' と b' は互いに素な自然数）

$l=a'b'g$ （a' と b' は互いに素な自然数）

$ab=gl$

解説

a の倍数は $ma'g$ （m は自然数），b の倍数は $nb'g$ （n は自然数）と表されるから，

$a,\ b$ の公倍数については，$ma'g=nb'g$ が成り立つ。

よって，$m=\dfrac{nb'}{a'}$

ここで，a' と b' は互いに素，m は自然数だから，n は a' の倍数でなければならない。

そこで，$n=ka'$ （k は自然数）とおくと，$m=\dfrac{ka'b'}{a'}=kb'$ となる。

よって，$a=ka'b'g,\ b=ka'b'g$　すなわち $a,\ b$ の公倍数は $ka'b'g$

最小公倍数を l とすると，l は公倍数のうち正で最小のものだから，$k=1$

ゆえに，$l=a'b'g$

また，$ab=a'g\cdot b'g=g\cdot a'b'g=gl$　特に，$g=1$ のとき $ab=l$

232

$a = a'g,\ b = b'g$ （g は最大公約数，a' と b' は互いに素）とする。

また，最小公倍数を l とすると，上より，$l = a'b'g$

(1)

$75 = 5a'b'$ より，$a'b' = 15$

a' と b' は互いに素であり，$a = 5a', b = 5b', a < b$ より，$a' < b'$ だから，

$(a',\ b') = (1,\ 15),\ (3,\ 5)$

$\therefore (a,\ b) = (5a',\ 5b')$

$\qquad = (5,\ 75),\ (15,\ 25)$

(2)

$144 = 12a'b'$ より，$a'b' = 12$

a' と b' は互いに素であり，$a = 12a', b = 12b', a < b$ より，$a' < b'$ だから，

$(a',\ b') = (1,\ 12),\ (3,\ 4)$

$\therefore (a,\ b) = (12a',\ 12b')$

$\qquad = (12,\ 144),\ (36,\ 48)$

(3)

$275 = 11a'b'$ より，$a'b' = 25$

a' と b' は互いに素であり，$a = 11a',\ b = 11b',\ a < b$ より，$a' < b'$ だから，

$(a',\ b') = (1,\ 25)$

$\therefore (a,\ b) = (11a',\ 11b')$

$\qquad = (11,\ 275)$

(4)

$160 = 20a'b'$ より，$a'b' = 8$

a' と b' は互いに素であり，$a = 20a',\ b = 20b',\ a < b$ より，$a' < b'$ だから，

$(a',\ b') = (1,\ 8)$

$\therefore (a,\ b) = (20a',\ 20b')$

$\qquad = (20,\ 160)$

233

$a=a'g,\ b=b'g$ （g は最大公約数，a' と b' は互いに素）とする。

また，最小公倍数を l とすると，上より，$l=a'b'g$

(1)

$a+b=280$，$g=14$，$a+b=(a'+b')g$ より，$280=14(a'+b')$　$\therefore a'+b'=20$

a' と b' は互いに素で，$a<b$ より，$a'<b'$ だから，$(a',\ b')=(1,19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$

$\therefore (a,\ b)=(14a',\ 14b')$

$\qquad =(14,\ 266),\ (42,\ 238),\ (98,\ 182),\ (126,\ 154)$

(2)

$ab=700$，$g=5$，$ab=a'b'g^2$ より，$700=5^2a'b'$　$\therefore a'b'=28$

a' と b' は互いに素で，$a<b$ より，$a'<b'$ だから，$(a',\ b')=(1,28),\ (4,\ 7)$

$\therefore (a,\ b)=(5a',\ 5b')$

$\qquad =(5,\ 140),\ (20,\ 35)$

(3)

$a+b=168$，$a+b=(a'+b')g$ より，$168=(a'+b')g$　$\therefore (a'+b')g=2^3\cdot 3\cdot 7$　・・・①

$l=1001$，$l=a'b'g$ より，$1001=a'b'g$　$\therefore a'b'g=7\cdot 11\cdot 13$　・・・②

①，②より，$g=1,\ 7$

$g=1$ であると仮定したとき

a と b は互いに素で，$ab=7\cdot 11\cdot 13$ だから，$a,\ b$ のどちらか一方は 7 を素因数にもつ。

a が 7 を素因数にもつとすると，a は 7 の倍数だから，

$a+b=7\cdot 11\cdot 13$ すなわち $b=7\cdot 11\cdot 13-a$ より，b も 7 を素因数にもつことになる。

b が 7 を素因数にもつとしても，同様にして，a は 7 を素因数にもつことになる。

これは a と b は互いに素であることに反する。よって，$g\neq 1$

$g=7$ であると仮定したとき

$a'b'=11\cdot 13$ （a' と b' は互いに素），$a'<b'$ より，$a'=11,\ b'=13$

これは $a'+b'=24$ を満たす。

$\therefore (a,\ b)=(a'g,\ b'g)$

$\qquad =(77,\ 91)$

(4)

$ab=300$，$ab=a'b'g^2$ より，$a'b'g^2=300$　・・・①

$l=60$，$l=a'b'g$ より，$60=a'b'g$　・・・②

①，②より，$\dfrac{a'b'g^2}{a'b'g}=\dfrac{300}{60}$　$\therefore g=5$

また，これより，$a'b'=12$

これと a' と b' は互いに素で，$a'<b'$ より，$(a',\ b')=(1,12),\ (3,\ 4)$

$\therefore (a,\ b)=(a'g, bg')=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

補足問題

m と n が互いに素ならば mn と $m+n$ も互いに素であることを証明せよ。

証明 1

mn と $m+n$ が互いに素でないと仮定すると，mn と $m+n$ は素因数 p をもつ。

したがって，自然数 A と B を用いて $mn=Ap$，$m+n=Bp$ と表せる。

ここで，m と n は互いに素だから，mn が素因数 p をもつということは，

p は m と n のどちらか一方の素因数である。

そこで，p を m の素因数とすると，$m+n=Bp$ すなわち $n=Bp-m$ より，

n も p を素因数にもつことになる。

これは m と n は互いに素であることと矛盾する。

よって，背理法により，m と n が互いに素ならば mn と $m+n$ も互いに素である。

証明 2

mn と $m+n$ が正の公約数 d をもつとすると，

自然数 A と B を用いて $m+n=Ad$，$mn=Bd$ と表せる。

$m(m+n)-mn=m^2$ ・・・①

$m(m+n)-mn=mAg-Bg=(mA-B)g$ ・・・②

①，②より，$m^2=(mA-B)d$

よって，d は m^2 の約数である。

$n(m+n)-mn=n^2$ ・・・③

$n(m+n)-mn=nAd-Bd=(nA-B)d$ ・・・④

③，④より，$n^2=(mA-B)d$

よって，d は n^2 の約数である。

したがって，m^2 と n^2 は正の公約数 d をもつ。

一方，m と n は互いに素だから，m^2 と n^2 の正の公約数は 1 のみである。

よって，$d=1$

ゆえに，m と n が互いに素ならば mn と $m+n$ は互いに素である。

234

$a = a'g,\ b = b'g$ （g は最大公約数，a' と b' は互いに素）とすると，最小公倍数 $l = a'b'g$

よって，$lg = a'b'g^2 = (a'g)\cdot(b'g) = ab$

あるいは,

$l = a'b'g = a'\cdot(b'g) = a'b$ より，$a' = \dfrac{l}{b}$

よって，$a = a'g = \dfrac{lg}{b}$

(1)

$120\cdot 6 = 30\cdot n$ より，$n = 24$

または

$$n = \frac{120\cdot 6}{30} = 24$$

(2)

$1260\cdot 18 = 180\cdot n$ より，$n = 126$

または

$$n = \frac{1260\cdot 18}{180} = 126$$

235

$1400 = 8\cdot 5^2\cdot 7$，$40 = 8\cdot 5$，$56 = 8\cdot 7$

より，$n = 8\cdot 5^2\cdot 1,\ 8\cdot 5^2\cdot 7$　すなわち $n = 200,\ 1400$

補足：表にするとわかりやすい

	最小公倍数	3 つの自然数		
	1400	40	56	n
最大公約数	8	8	8	8
	5^2	5		5^2
	7		7	7 または 1

236

条件を満たすタイルの 1 辺の長さを a cm とすると，a は 270 と 396 の公約数である。

したがって，タイルをできるだけ大きくするには，タイルの 1 辺の長さを 270 と 396 の最大公約数にすればよい。

$270 = 2\cdot 3^3\cdot 5$，$396 = 2^2\cdot 3^2\cdot 11$ より，270 と 396 の最大公約数は $2\cdot 3^2 = 18$

よって，1 辺の長さを 18 cm にすればよい。

また，そのときタイルは $\dfrac{270}{18}\cdot\dfrac{396\cdot}{18} = \dfrac{2\cdot 3^3\cdot 5}{2\cdot 3^2}\cdot\dfrac{2^2\cdot 3^2\cdot 11}{2\cdot 3^2} = 3\cdot 5\cdot 2\cdot 11 = 330$ 枚必要である。

237

子どもに配ったみかんとりんごの数は，それぞれ $435-45=390$ 個，$268-34=234$ 個である。

したがって，子ども人数を x 人とすると，x は 390 と 234 の公約数である。

また，みかんが 45 個余ったこと，つまり 45 個を x 人に配ることができなかったことから，

$x \geq 46$ である。

よって，390 と 234 の公約数のうちできるだけ 46 に近い人数の子どもに配ればよい。

$390=2\cdot 3\cdot 5\cdot 13$，$234=2\cdot 3^2\cdot 13$ より，390 と 234 の最大公約数は $2\cdot 3\cdot 13=78$ だから，

公約数は 78 の約数である。このうち 46 以上の約数は 78 である。

よって，$x=78$

ゆえに，子どもの人数は 78 人

238

(1)

n が 20 と 42 の公倍数のうち正で最小のもの，すなわち最小公倍数であればよい。

$20=2^2\cdot 5$，$42=2\cdot 3\cdot 7$ より，最小公倍数は $2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=420$ $\quad\therefore n=420$

(2)

求める分数を $\dfrac{b}{a}$ とすると，

a はそれぞれの分子 42, 21, 35 の公約数のうち最大のものすなわち最大公約数，

b はそれぞれの分母 5, 10, 16 の公倍数のうち正で最小のものすなわち最小公倍数となる。

$42=2\cdot 3\cdot 7$，$21=3\cdot 7$，$35=5\cdot 7$ より，$a=7$

5，$10=2\cdot 5$，$16=2^4$ より，$b=2^4\cdot 5=80$

よって，求める分数は $\dfrac{80}{7}$

(3)

$\dfrac{35}{m}$ は既約分数だから，m は 5 または 7 の倍数ではない。

また，$\dfrac{35}{m}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{5\cdot 4}{m}$，$\dfrac{35}{m}\div\dfrac{5}{8}=\dfrac{7\cdot 8}{m}$ が整数であることから，m は 4 と 8 の公約数である。

よって，3 以上の自然数 m は 4 である。