整数の性質 3　整数の割り算と商および余り

243

(1)

$n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$

n が偶数のとき $n+4$ は偶数だから $(n+1)(n+4)$ すなわち n^2+5n+4 は偶数である。

n が奇数のとき $n+1$ は偶数だから $(n+1)(n+4)$ すなわち n^2+5n+4 は偶数である。

以上より，すべての整数 n に対し n^2+5n+4 は偶数である。

(2)

整数 n は整数 k を用いて $n=3k-1$， $n=3k$， $n=3k+1$ のいずれかの形で表せる。

$n=3k-1$ のとき

$n^2+1=(3k-1)^2+1=9k^2-6k+2=3(3k^2-2)+2$ より， n^2+1 は 3 の倍数でない。

$n=3k$ のとき

$n^2+1=(3k)^2+1=9k^2+1=3\cdot 3k^2+1$ より， n^2+1 は 3 の倍数でない。

$n=3k+1$ のとき

$n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2)+2$ より， n^2+1 は 3 の倍数でない。

以上より，すべての整数 n に対し n^2+1 は 3 の倍数でない。

244

整数 n は整数 k を用いて $n=7k$, $n=7k\pm 1$, $n=7k\pm 2$, $n=7k\pm 3$ のいずれかの形で表せる。

$n=7k$ のとき

$n^2=(7k)^2=49k^2=7\cdot 7k^2+0$

$n=7k\pm 1$ のとき

$n^2=(7k\pm 1)^2=49k^2\pm 14k+1=7(7k^2\pm 2k)+1$

$n=7k\pm 2$ のとき

$n^2=(7k\pm 2)^2=49k^2\pm 28k+4=7(7k^2\pm 4k)+4$

$n=7k\pm 3$ のとき

$n^2=(7k\pm 3)^2=49k^2\pm 42k+9=7(7k^2\pm 6k+1)+2$

以上より， n^2 を 7 で割ったときの余りは，0 か 1 か 2 か 4 である。

245

(1)

$$n(n-1)(2n-1)=n(n-1)\{(n-2)+(n+1)\}$$
$$=(n-2)(n-1)n+(n-1)n(n+1)$$

$(n-2)(n-1)n$, $(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから, どちらも 6 の倍数である。

よって, $n(n-1)(2n-1)$ は 6 の倍数である。

(2)

$$n^3+5n=n(n^2+5)$$
$$=n\{(n-1)(n+1)+6\}$$
$$=(n-1)n(n+1)+6n$$

$6n$ は 6 の倍数, $(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから 6 の倍数である。

よって, n^3+5n は 6 の倍数である。

(3)

$$2n^3+4n=2n(n^2+2)$$
$$=2n\{(n-1)(n+1)+3\}$$
$$=2(n-1)n(n+1)+6n$$

$6n$ は 6 の倍数, $(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから 6 の倍数である。

よって, $2n^3+4n$ は 6 の倍数である。

246

連続する 3 つの奇数は整数 n を用いて $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$ と表せる。

したがって,

$$N=(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1$$
$$=(4n^2-4n+1)+(4n^2+4n+1)+(4n^2+12n+9)+1$$
$$=12(n^2+n+1)$$
$$=12\{n(n+1)+1\}$$

$n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから偶数である。

よって, $n(n+1)+1$ は奇数である。

ゆえに, N は 12 の倍数であるが, 24 の倍数ではない。

247

(1)

$108=2^2\cdot 3^3$ だから，108 と互いに素である自然数は 2 でも 3 でも割り切れない。
したがって，108 以下の自然数で 108 と互いに素である自然数の個数を求めるには
108 以下の自然数のうち 2 または 3 で割り切れる自然数を除いた個数を求めればよい。
つまり，108 以下の自然数で，2 で割り切れる自然数の個数を $n(A)$，3 で割り切れる自然数の個数を $n(B)$ とすると，求める自然数の個数＝$108-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$
ここで，$n(A)=54$，$n(B)=36$，$n(A\cap B)$ は 2 でも 3 でも割り切れる自然数
すなわち 6 で割り切れる自然数の個数だから，$n(A\cap B)=18$
よって，求める自然数の個数＝$108-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}=108-(54+36-18)=36$

(2)

$400=2^4\cdot 5^2$ だから，400 と互いに素である自然数は 2 でも 5 でも割り切れない。
したがって，400 以下の自然数で 2 で割り切れる自然数の個数を $n(A)$，5 で割り切れる自然数の個数を $n(B)$ とすると，400 と互いに素である自然数の個数は $n\left(\overline{A\cup B}\right)$ だから，

$$
\begin{aligned}
n\left(\overline{A\cup B}\right)&=n(U)-n(A\cup B)\\
&=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}
\end{aligned}
$$

これと $n(U)=400$，$n(A)=200$，$n(B)=80$，$n(A\cap B)=40$ より，

$$
\begin{aligned}
n\left(\overline{A\cup B}\right)&=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}\\
&=400-(200+80-40)\\
&=160
\end{aligned}
$$

(3)

$600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$ だから, 600 と互いに素である自然数は 2 でも 3 でも 5 でも割り切れない。
したがって，600 以下の自然数で 2 で割り切れる自然数の個数を $n(A)$，3 で割り切れる自然数の個数を $n(B)$，5 で割り切れる自然数の個数を $n(C)$ とすると，600 と互いに素である自然数の個数は $n\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)$ だから，

$$
\begin{aligned}
n\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)&=n(U)-n(A\cup B\cup C)\\
&=n(U)-\{n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\}
\end{aligned}
$$

これと $n(U)=600$，$n(A)=300$，$n(B)=200$，$n(C)=120$，$n(A\cap B)=100$，$n(B\cap C)=40$，$n(C\cap A)=60$，$n(A\cap B\cap C)=20$

$$
\begin{aligned}
\therefore n\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)&=600-(300+200+120-100-40-60+20)\\
&=160
\end{aligned}
$$

例題 35 補足

例えば 1 から 40 までの自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots40$ について

N を素因数分解したときの素因数 2 の個数

	2 の割り算				
2 で割り切れる数	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目
2	○				
4	○	○			
6	○				
8	○	○	○		
10	○				
12	○	○			
14	○				
16	○	○	○	○	
18	○				
20	○	○			
22	○				
24	○	○	○		
26	○				
28	○	○			
30	○				
32	○	○	○	○	○
34	○				
36	○	○			
38	○				
40	○	○	○		
計	20	10	5	2	1

○は全部で 38 個あるから，素因数 2 の数は 38 であることがわかる。

また，

2 の割り算が 1 回目で終了する個数＝40 を 2 で割った商

2 の割り算が 2 回目で終了する個数＝40 を 2^2 で割った商

2 の割り算が 3 回目で終了する個数＝40 を 2^3 で割った商

2 の割り算が 4 回目で終了する個数＝40 を 2^4 で割った商

2 の割り算が 5 回目で終了する個数＝40 を 2^5 で割った商

となることもわかる。

よって，素因数 2 の個数＝40 を 2，2^2，2^3，2^4，2^5 で割った各商の合計

248

(1)

3 の倍数の個数は 240 を 3 で割った商で 80

3^2 の倍数の個数は 240 を 3^2 で割った商で 26

3^3 の倍数の個数は 240 を 3^3 で割った商で 8

3^4 の倍数の個数は 240 を 3^4 で割った商で 2

よって，N を素因数分解したときの素因数 3 の個数は $80+26+8+2=116$ 個

(2)

7 の倍数の個数は 450 を 7 で割った商で 64

7^2 の倍数の個数は 450 を 7^2 で割った商で 9

7^3 の倍数の個数は 450 を 7^3 で割った商で 1

よって，N を素因数分解したときの素因数 7 の個数は $64+9+1=74$ 個

249

N を素因数 2 と 5 で分解したとき， $N=2^p5^qM$ となったとする。

明らかに $p>q$ だから， $N=2^{p-q}\cdot 2^q\cdot 5^q\cdot M=2^{p-q}\cdot M\cdot(2\cdot 5)^q=2^{p-q}\cdot M\cdot 10^q$

よって，末尾に 0 が q 個並ぶ。

要するに，因数 10 の個数＝素因数 5 の個数

(1)

5 の倍数の個数は 125 を 5 で割った商で 25

5^2 の倍数の個数は 125 を 5^2 で割った商で 5

5^3 の倍数の個数は 125 を 5^3 で割った商で 1

よって，N を素因数分解したときの素因数 5 の個数は $25+5+1=31$ 個

また，素因数 2 の個数は明らかに素因数 5 の個数より多い。

$10=2\cdot 5$ であるから，因数 10 の個数は 31 である。

よって，末尾には 0 が連続して 31 個並ぶ。

(2)

5 の倍数の個数は 300 を 5 で割った商で 60

5^2 の倍数の個数は 300 を 5^2 で割った商で 12

5^3 の倍数の個数は 300 を 5^3 で割った商で 2

よって，N を素因数分解したときの素因数 5 の個数は $60+12+2=74$ 個

また，素因数 2 の個数は明らかに素因数 5 の個数より多い。

$10=2\cdot 5$ であるから，因数 10 の個数は 74 である。

よって，末尾には 0 が連続して 74 個並ぶ。

250

(1)

解法 1

37 を 6 で割った余りは 1 だから，

37^{100} を 6 で割った余りは 1^{100} すなわち 1 を 6 で割った余り 1 に等しい。

よって，37^{100} を 6 で割った余りは 1

解法 2

$37 \equiv 1 \pmod 6$ より，$37^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod 6$

よって，37^{100} を 6 で割った余りは 1

補足

$a \equiv b \pmod m$ のとき $a^k \equiv b^k \pmod m$

解法 3　二項定理（数学Ⅱ 式と証明）を利用

$$37^{100} = (6 \cdot 6 + 1)^{100}$$
$$= {}_{100}\mathrm{C}_0 (6 \cdot 6)^{100} + {}_{100}\mathrm{C}_1 (6 \cdot 6)^{99} \cdot 1^1 + {}_{100}\mathrm{C}_2 (6 \cdot 6)^{98} \cdot 1^2 + \cdots + {}_{100}\mathrm{C}_{99} (6 \cdot 6)^1 \cdot 1^{99} + {}_{100}\mathrm{C}_{100} 1^{100}$$

より，37^{100} を 6 で割った余りは ${}_{100}\mathrm{C}_{100} 1^{100}$ すなわち 1

または,

$$37^{100} = (36+1)^{100}$$
$$= \sum_{k=0}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_k 36^k \cdot 1^{100-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_k 36^k$$
$$= {}_{100}\mathrm{C}_0 36^0 + \sum_{k=1}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_k 36^k$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_k 36^k$$

$\sum_{k=1}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_k 36^k$ は 6 の倍数だから，37^{100} を 6 で割った余りは 1

(2)

解法 1

$5^{80} = (5^2)^{40} = 25^{40}$ より，25^{40} を 8 で割った余りを求めればよい。

25 を 8 で割った余りは 1 だから，25^{40} を 8 で割った余りは 1^{40} すなわち 1 を 8 で割った余り 1 に等しい。

よって，5^{80} を 8 で割った余りは 1

解法 2

$5^{80}=\left(5^{2}\right)^{40}=25^{40}$， $25\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$ より， $5^{80}\equiv(25)^{40}\equiv 1^{40}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$

よって， 5^{80} を 8 で割った余りは 1

解法 3　二項定理（数学Ⅱ 式と証明）を利用

$$
\begin{aligned}
5^{80}&=\left(5^{2}\right)^{40}\\
&=25^{40}\\
&=\{(8\cdot 3)+1\}^{40}\\
&={}_{40}\mathrm{C}_{0}(8\cdot 3)^{40}+{}_{40}\mathrm{C}_{1}(8\cdot 3)^{39}\cdot 1^{1}+{}_{40}\mathrm{C}_{2}(8\cdot 3)^{38}\cdot 1^{2}+\cdots+{}_{40}\mathrm{C}_{39}(8\cdot 3)^{1}\cdot 1^{39}+{}_{40}\mathrm{C}_{40}1^{40}
\end{aligned}
$$

より， 5^{80} を 8 で割った余りは ${}_{40}\mathrm{C}_{40}1^{40}$ すなわち 1

または,

$$
\begin{aligned}
5^{80}&=\left(5^{2}\right)^{40}\\
&=25^{40}\\
&=(24+1)^{40}\\
&=\sum_{k=0}^{40}{}_{40}\mathrm{C}_{k}24^{k}\cdot 1^{40-k}\\
&=\sum_{k=0}^{40}{}_{40}\mathrm{C}_{k}24^{k}\\
&={}_{40}\mathrm{C}_{0}24^{0}+\sum_{k=1}^{40}{}_{40}\mathrm{C}_{k}24^{k}\\
&=1+\sum_{k=1}^{40}{}_{40}\mathrm{C}_{k}24^{k}
\end{aligned}
$$

$\sum_{k=1}^{40}{}_{40}\mathrm{C}_{k}24^{k}$ は 8 の倍数だから， 5^{80} を 8 で割った余りは 1

(3)

解法 1

$3^{100}=3\cdot\left(3^{3}\right)^{33}=3\cdot 27^{33}$

3 を 13 で割った余りは 3

27 を 13 で割った余りは 1 だから， 27^{33} を 13 で割った余りは 1^{33} すなわち 1 を 13 で割った余り 1 に等しい。

よって， $3\cdot 27^{33}$ を 13 で割った余りは $3\cdot 1$ すなわち 3 を 13 で割った余り 3 に等しい。

ゆえに， 3^{100} を 13 で割った余りは 3

解法 2

$3^{100}=3\cdot\left(3^3\right)^{33}=3\cdot 27^{33}$

ここで，$27\equiv 1 \pmod{13}$ より，$27^{33}\equiv 1^{33}\equiv 1 \pmod{13}$

よって，$3^{100}\equiv 3\cdot 27^{33}\equiv 3\cdot 1\equiv 3 \pmod{13}$

ゆえに，3^{100} を 13 で割った余りは 3

補足

$a\equiv b \pmod{m}$ のとき $a^k\equiv b^k \pmod{m}$

$a\equiv b \pmod{m}$，$c\equiv d \pmod{m}$ のとき $ab\equiv cd \pmod{m}$

解法 3　二項定理（数学Ⅱ 式と証明）を利用

$$
\begin{aligned}
3^{100}&=3\cdot\left(3^3\right)^{33}\\
&=3\cdot 27^{33}\\
&=3\{(13\cdot 2)+1\}^{33}\\
&=3\left\{{}_{33}\mathrm{C}_0(13\cdot 2)^{33}+{}_{33}\mathrm{C}_1(13\cdot 2)^{32}\cdot 1^1+\cdots+{}_{33}\mathrm{C}_{32}(13\cdot 2)^1\cdot 1^{32}+{}_{33}\mathrm{C}_{33}1^{33}\right\}\\
&=3\left\{{}_{33}\mathrm{C}_0(13\cdot 2)^{33}+{}_{33}\mathrm{C}_1(13\cdot 2)^{32}+\cdots+{}_{33}\mathrm{C}_{32}\cdot 13\cdot 2\right\}+3
\end{aligned}
$$

より，3^{100} を 13 で割った余りは 3

または,

$$
\begin{aligned}
3^{100}&=3\cdot\left(3^3\right)^{33}\\
&=3\cdot 27^{33}\\
&=3\cdot(26+1)^{33}\\
&=3\sum_{k=0}^{33}{}_{33}\mathrm{C}_k 26^k\cdot 1^{33-k}\\
&=3\sum_{k=0}^{33}{}_{33}\mathrm{C}_k 26^k\\
&=3\left({}_{33}\mathrm{C}_0 26^0+\sum_{k=1}^{33}{}_{33}\mathrm{C}_k 26^k\right)\\
&=3+3\sum_{k=1}^{33}{}_{33}\mathrm{C}_k 26^k
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{33}{}_{33}\mathrm{C}_k 26^k$ は 13 の倍数だから，3^{100} を 13 で割った余りは 3

(4)

解法 1

$$4^{100}=4^2\left(4^3\right)^{66}=16\cdot 64^{66}$$

16 を 9 で割った余りは 7

64 を 9 で割った余りは 1 だから，64^{66} を 9 で割った余りは 1^{66} を 9 で割った余り 1 に等しい。

よって，$16\cdot 64^{66}$ を 9 で割った余りは $7\cdot 1$ すなわち 7 を 9 で割った余り 7 に等しい。

ゆえに，4^{100} を 9 で割った余りは 7

解法 2

$$4^{100}=4^2\left(4^3\right)^{66}=16\cdot 64^{66}$$

ここで，$16\equiv 7\pmod 9$

また，$64\equiv 1\pmod 9$ より，$64^{66}\equiv 1^{66}\equiv 1\pmod 9$

よって，$4^{100}\equiv 16\cdot 64^{66}\equiv 7\cdot 1\equiv 7\pmod 9$　ゆえに，4^{100} を 9 で割った余りは 7

解法 3　**二項定理（数学Ⅱ　式と証明）を利用**

$$\begin{aligned}4^{100}&=4^2\cdot\left(4^3\right)^{66}\\&=16\cdot 64^{66}\\&=16\{(9\cdot 7)+1\}^{66}\\&=16\left\{{}_{66}\mathrm{C}_0(9\cdot 7)^{66}+{}_{66}\mathrm{C}_1(9\cdot 7)^{65}\cdot 1^1+\cdots+{}_{66}\mathrm{C}_{65}(9\cdot 7)^1\cdot 1^{65}+{}_{66}\mathrm{C}_{66}1^{66}\right\}\\&=16\left\{{}_{66}\mathrm{C}_0(9\cdot 7)^{66}+{}_{66}\mathrm{C}_1(9\cdot 7)^{65}+\cdots+{}_{66}\mathrm{C}_{65}(9\cdot 7)^1\right\}+16\end{aligned}$$

より，4^{100} を 9 で割った余りは 7

または，

$$\begin{aligned}4^{100}&=4^2\cdot\left(4^3\right)^{66}\\&=16\cdot(63+1)^{66}\\&=16\sum_{k=0}^{66}{}_{66}\mathrm{C}_k\,63^k\cdot 1^{66-k}\\&=16\sum_{k=0}^{66}{}_{66}\mathrm{C}_k\,63^k\\&=16\left({}_{66}\mathrm{C}_0\,63^0+\sum_{k=1}^{66}{}_{66}\mathrm{C}_k\,63^k\right)\\&=16+16\sum_{k=1}^{66}{}_{66}\mathrm{C}_k\,63^k\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{66}{}_{66}\mathrm{C}_k\,63^k$ は 9 の倍数だから，4^{100} を 9 で割った余りは 16 を 9 で割った余りに等しい。

よって，求める余りは 7

251

(1)

$n \equiv 3 \pmod 8$ より，$n^2+2n+5 \equiv 3^2+2\cdot 3+5 \equiv 20 \equiv 4 \pmod 8$

よって，n^2+2n+5 を 8 で割った余りは 4

(2)

$n \equiv 15 \pmod{17}$ より，$3n^2+5n+9 \equiv 3\cdot 15^2+5\cdot 15+9 \equiv 759 \equiv 11 \pmod{17}$

よって，$3n^2+5n+9$ を 17 で割った余りは 11

(3)

$n \equiv 2 \pmod{35}$ より，$n^4+3n^3+4 \equiv 2^4+3\cdot 2^3+4 \equiv 44 \equiv 9 \pmod{35}$

よって，n^4+3n^3+4 を 35 で割った余りは 9

252

(1)

$241 \equiv 7 \pmod 9$，$120 \equiv 3 \pmod 9$ より，$241n+120 \equiv 7n+3 \pmod 9$

$7n+3$ は 9 の倍数だから，自然数 m を用いて $7n+3=9m$　・・・①　と表せる。

①より，$n=\dfrac{9m-3}{7}=\dfrac{7m+2m-3}{7}=m+\dfrac{2m-3}{7}$

ここで，n は自然数だから，$2m-3$ は 7 の倍数である。

そこで，整数 l を用いて $2m-3=7l$ とおくと，$m=\dfrac{7l+3}{2}$

したがって，$l=1$ とすると，$m=5,\ n=6$ となり，これを①に代入すると，

$7\cdot 6+3=9\cdot 5$　・・・②

よって，①と②の両辺の差をとると，$7n+3-(7\cdot 6+3)=9m-9\cdot 5$

すなわち $7(n-6)=9(m-5)$

ここで，7 と 9 は互いに素だから，$n-6=9k,\ m-5=7k$ （k は整数）

よって，$n=9k+6,\ m=7k+5$

ゆえに，$k=0$ で自然数 n は最小値 6 をとる。

補足

$7n+3$ に $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ を順に代入していく方法もあるが，計算が面倒になる場合がある。

(2)

$373n+142 \equiv 13n+7 \pmod{15}$

$13n+7$ は 15 の倍数だから，自然数 m を用いて $13n+7=15m$　・・・①　と表せる。

①より，$n=\dfrac{15m-7}{13}=\dfrac{13m+2m-7}{13}=m+\dfrac{2m-7}{13}$

ここで，n は自然数だから，$2m-7$ は 13 の倍数である。

そこで，整数 l を用いて，$2m-7=13l$ とおくと，$m=\dfrac{13l+7}{2}$

したがって，$l=1$ とすると，$m=10,\ n=11$ となり，これを①に代入すると，

$13\cdot 11+7=15\cdot 10$　・・・②

よって，①と②の両辺の差をとると，$13n+7-(13\cdot 11+7)=15m-15\cdot 10$

すなわち $13(n-11)=15(m-10)$

ここで，13 と 15 は互いに素だから，$n-11=15k,\ m-10=13k$ （k は整数）

よって，$n=15k+11,\ m=13k+10$

ゆえに，$k=0$ で自然数 n は最小値 11 をとる。

253

(1)

任意の自然数の一の位の数はその自然数を 10 で割った余りの数である。

例：$123456789=12345678\times 10+9$

したがって，自然数を 10 で割ったときの余りを合同式を用いて求めればよい。

$$
\begin{aligned}
123^{122} &\equiv 3^{122}\\
&\equiv 3^2\cdot(3^4)^{30}\\
&\equiv 9\cdot 81^{30}\\
&\equiv 9\cdot 1^{30}\\
&\equiv 9\cdot 1\\
&\equiv 9 \pmod{10}
\end{aligned}
$$

よって，一の位の数は 9

(2)

任意の自然数の下 2 桁の数はその自然数を 100 で割った余りの数である。

例：$123456789=1234567\times 100+89$

したがって，自然数を 100 で割ったときの余りを合同式を用いて求めればよい。

$$
\begin{aligned}
7^{251} &\equiv 7^3\cdot(7^4)^{62}\\
&\equiv 343\cdot 2401^{62}\\
&\equiv 43\cdot 1^{62}\\
&\equiv 43\cdot 1\\
&\equiv 43 \pmod{100}
\end{aligned}
$$

よって，下 2 桁は 43

254

(1)

$$
\begin{aligned}
2^{6n-5}+3^{2n} &\equiv 2\cdot 2^{6n-6}+\left(3^2\right)^n \\
&\equiv 2\cdot 2^{6(n-1)}+9^n \\
&\equiv 2\cdot \left(2^6\right)^{n-1}+9^n \\
&\equiv 2\cdot 64^{n-1}+9^n \\
&\equiv 2\cdot 9^{n-1}+9^n \\
&\equiv 2\cdot 9^{n-1}+9\cdot 9^{n-1} \\
&\equiv 9^{n-1}(2+9) \\
&\equiv 9^{n-1}\cdot 11 \\
&\equiv 9^{n-1}\cdot 0 \\
&\equiv 0 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
4^{n+1}+5^{2n-1} &\equiv 4^2\cdot 4^{n-1}+5\cdot 5^{2n-2} \\
&\equiv 16\cdot 4^{n-1}+5\cdot 5^{2(n-1)} \\
&\equiv 16\cdot 4^{n-1}+5\cdot \left(5^2\right)^{n-1} \\
&\equiv 16\cdot 4^{n-1}+5\cdot 25^{n-1} \\
&\equiv 16\cdot 4^{n-1}+5\cdot 4^{n-1} \\
&\equiv 4^{n-1}\cdot(16+5) \\
&\equiv 4^{n-1}\cdot 21 \\
&\equiv 4^{n-1}\cdot 0 \\
&\equiv 0 \pmod{21}
\end{aligned}
$$