整数の性質 7　分数と小数

288

(1) $\frac{5}{8}=0.625$　**(2)** $\frac{17}{6}=2.83333\cdots=2.8\dot{3}$　**(3)** $\frac{43}{25}=1.72$

(4) $\frac{7}{16}=0.4375$　**(5)** $\frac{35}{44}=0.79545454\cdots=0.79\dot{5}\dot{4}$　(6) $\frac{59}{27}=2.185185\cdots=2.\dot{1}8\dot{5}$

289

(1)

$\frac{24}{37}=0.648648\cdots=0.\dot{6}4\dot{8}$ より，

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とすると，

小数第$1,\ 4,\ 7,\ \cdots$位　すなわち小数第$3k-2$位の数字は 6

小数第$2,\ 5,\ 8,\ \cdots$位　すなわち小数第$3k-1$位の数字は 4

小数第$3,\ 6,\ 9,\ \cdots$位　すなわち小数第$3k$位の数字は 8

小数第 50 位は$3\cdot17-1$より，小数第$3k-1$位に属するから，その数字は 4

(2)

$\frac{11}{101}=0.10891089\cdots=0.\dot{1}08\dot{9}$ より，

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とすると，

小数第$1,\ 5,\ 9,\ \cdots$　すなわち小数第$4k-3$位の数字は 1

小数第$2,\ 6,\ 10,\ \cdots$　すなわち小数第$4k-2$位の数字は 0

小数第$3,\ 7,\ 11,\ \cdots$　すなわち小数第$4k-1$位の数字は 8

小数第$4,\ 8,\ 12,\ \cdots$　すなわち小数第$4k$位の数字は 9

小数第 75 位は$4\cdot19-1$より，小数第$4k-1$位に属するから，その数字は 8

(3)

$\frac{9}{41}=0.2195121951\cdots=0.\dot{2}195\dot{1}$ より，

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とすると，

小数第$1,\ 6,\ 11,\ \cdots$位　すなわち小数第$5k-4$位の数字は 2

小数第$2,\ 7,\ 12,\ \cdots$位　すなわち小数第$5k-3$位の数字は 1

小数第$3,\ 8,\ 13,\ \cdots$位　すなわち小数第$5k-2$位の数字は 9

小数第$4,\ 9,\ 14,\ \cdots$位　すなわち小数第$5k-1$位の数字は 5

小数第$5,\ 10,\ 15,\ \cdots$位　すなわち小数第$5k$位の数字は 1

小数第 100 位は$5\cdot20$より，小数第$5k$位に属するから，その数字は 1

(4)

$\dfrac{7}{13}=0.538461538461\cdots=0.\dot{5}3846\dot{1}$ より,

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とすると,

小数第$1,\ 7,\ 13,\ \cdots$　すなわち小数第$6k-5$位の数字は5

小数第$2,\ 8,\ 14,\ \cdots$　すなわち小数第$6k-4$位の数字は3

小数第$3,\ 9,\ 15,\ \cdots$　すなわち小数第$6k-3$位の数字は8

小数第$4,\ 10,\ 16,\ \cdots$　すなわち小数第$6k-2$位の数字は4

小数第$5,\ 11,\ 17,\ \cdots$　すなわち小数第$6k-1$位の数字は6

小数第$6,\ 12,\ 18,\ \cdots$　すなわち小数第$6k$位の数字は1

小数第200位は$6\cdot 34-4$より，小数第$6k-4$位に属するから，その数字は3

290

整数でない既約分数$\dfrac{m}{n}$について,

分母nの素因数が2または5だけからなる $\Leftrightarrow$ $\dfrac{m}{n}$は有限小数で表される

既約分数の分母の素因数が2または5だけからなるものを選べばよいから,

$$\frac{5}{14}=\frac{5}{2\cdot 7},\ \frac{49}{32}=\frac{7^2}{2^5},\ \frac{13}{15}=\frac{13}{3\cdot 5},\ \frac{1}{72}=\frac{1}{2^3\cdot 3^2},\ \frac{77}{500}=\frac{7\cdot 11}{2^2\cdot 5^3},\ \frac{23}{90}=\frac{23}{2\cdot 3^2\cdot 5},\ \frac{123}{625}=\frac{3\cdot 41}{5^4}$$

より，$\dfrac{49}{32},\ \dfrac{77}{500},\ \dfrac{123}{625}$

291

(1)

解法 1

$$\frac{1}{7}=1\cdot\frac{1}{7^1}=0.1_{(7)}$$

解法 2

$$\frac{1}{7}=\frac{1\cdot 7^0}{1\cdot 7^1+0\cdot 7^0}=\frac{1_{(7)}}{10_{(7)}}$$

$$\begin{array}{r} 0.\ 1 \\ 1\ \ 0\ \overline{)\ 1\ \ 0} \\ 1\ \ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

より，$\dfrac{1}{7}=0.1_{(7)}$

(2)

解法 1

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= \frac{1}{2^3}\cdot\frac{8}{7} \\
&= \frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{7} \\
&= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{7} \\
&= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{7} \\
&\quad\vdots \\
&= 1\cdot\frac{1}{2^3}+1\cdot\frac{1}{2^6}+1\cdot\frac{1}{2^9}+\cdots \\
&= 0.001+0.000001+0.000000001+\cdots \\
&= 0.001001001\cdots \\
&= 0.\dot{0}0\dot{1}_{(2)}
\end{aligned}
$$

解法 2

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= \frac{1\cdot 2^0}{1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0} \\
&= \frac{1_{(2)}}{111_{(2)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0. & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\ \cdots \\ \cline{5-11}
1 & 1 & 1 &) & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ \cline{5-11}
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ \cline{8-11}
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

より， $\dfrac{1}{7}=0.\dot{0}0\dot{1}_{(2)}$

(3)

解法 1

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{8} &= \frac{2^2+1}{2^3} \\
&= \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2^3} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2^1} + 1 \cdot \frac{1}{2^3} \\
&= 0.1_{(2)} + 0.001_{(2)} \\
&= 0.101_{(2)}
\end{aligned}
$$

解法 2

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{8} &= \frac{1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}{1 \cdot 2^3} \\
&= \frac{101_{(2)}}{1000_{(2)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc|cccccc}
 & & & & & & 0. & 1 & 0 & 1 \\ \cline{5-10}
1 & 0 & 0 & 0 & \big) & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \cline{6-10}
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{8-11}
 & & & & & & & & & & 0
\end{array}
$$

より， $\frac{5}{8} = 0.101_{(2)}$

(4)

解法 1

$$
\begin{aligned}
\frac{13}{100} &= \frac{13}{5^2 \cdot 4} \\
&= \frac{1}{5^2} \cdot \frac{13}{4} \\
&= \frac{1}{5^2}\left(3 + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3}{5^2} + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{5^2} + \frac{1}{5^3} \cdot \frac{5}{4} \\
&= \frac{3}{5^2} + \frac{1}{5^3}\left(1 + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4}\left(1 + \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5}\left(1 + \frac{1}{4}\right) \\
&= 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 1 \cdot \frac{1}{5^3} + 1 \cdot \frac{1}{5^4} + 1 \cdot \frac{1}{5^5} + \cdots \\
&= 0.03111\cdots \\
&= 0.03\dot{1}_{(5)}
\end{aligned}
$$

解法 2

$$
\begin{aligned}
\frac{13}{100} &= \frac{2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0}{4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0} \\
&= \frac{23_{(5)}}{400_{(5)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & 0. & 0 & 3 & 1 & 1\ \cdots \\ \cline{5-9}
4 & 0 & 0 &) & 2 & 3 & 0 & 0 & \\
 & & & & 2 & 2 & 0 & 0 & \\ \cline{5-9}
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 4 & 0 & 0 \\ \cline{6-9}
 & & & & & & 1 & 0 & 0 \ 0 \\
 & & & & & & & 4 & 0 \ 0 \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & 1 & 0 \ 0
\end{array}
$$

より，$\dfrac{13}{100} = 0.03\dot{1}_{(5)}$

292

2 以外の素数はすべて奇数だから，

2 桁の自然数 n, $n+2$ はともに素数かつ連続する奇数である。

2 桁の奇数を小さい順に並べると

11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, $\cdots$

よって，$(n,\ n+2) = (11,\ 13),\ (17,\ 19),\ (29,\ 31),\ (41,\ 43),\ \cdots$

ゆえに，小さいものから数えて 3 番目の自然数 n は 29 である。

293

$\dfrac{2310}{n} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{n}$ より，$\dfrac{2310}{n}$ が素数ならば $\dfrac{2310}{n} = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11$

よって，自然数 n は $\dfrac{2310}{2} = 1155,\ \dfrac{2310}{3} = 770,\ \dfrac{2310}{5} = 462,\ \dfrac{2310}{7} = 330,\ \dfrac{2310}{11} = 210$ の 5 個

294

$n^2-14n+40=(n-4)(n-10)$

素数は正だから，$n^2-14n+40$ が素数のとき，

$n-10<n-4<0$ の場合と $0<n-10<n-4$ の場合がある。

$n-10<n-4<0$ の場合

$n-4=-1$ より，$n=3$

よって，$n^2-14n+40=(n-4)(n-10)=7$

7 は素数だから条件を満たす。

$0<n-10<n-4$ の場合

$n-10=1$ より，$n=11$

よって，$n^2-14n+40=(n-4)(n-10)=7$

7 は素数だから条件を満たす。

よって，$n^2-14n+40$ が素数となるような n は $n=3,\ 11$

295

(1)

$a+b<a+c<a+d,\ b+c<b+d<c+d,\ a+c<b+c$ より，

$a+b<a+c<(a+d,\ b+c)<b+d<c+d$

よって，$a+b=40,\ b+d=94$

(2)

$a+b<a+c<(a+d,\ b+c)<b+d<c+d$ より，

$a+b=40$ ・・・①

$a+c=60$ ・・・②

$b+d=94$ ・・・③

$c+d=114$ ・・・④

$(a+d,\ b+c)=(66,\ 88)$ のとき

①－③より，$a-d=-54$ ・・・⑤

これと $a+d=66$ より，$a=6$

6 は素数でないから不適

$(a+d,\ b+c)=(88,\ 66)$ のとき

⑤および $a+d=88$ より，$a=17$

これを①，②に代入し，$b,\ c$ を求めると，$b=23$，$c=43$

これは $b+c=66$ を満たす。

$c=43$ を④に代入し，d を求めると，$d=71$

$a,\ b,\ c,\ d$ は素数かつ $a<b<c<d$ だから，条件を満たす。

以上より，$(a,\ b,\ c,\ d)=(17,\ 23,\ 43,\ 71)$

296

(1)

$$\begin{aligned} n^4+4 &= \left(n^2+2\right)^2-4n^2 \\ &= \left(n^2+2\right)^2-(2n)^2 \\ &= \left\{\left(n^2+2\right)+2n\right\}\left\{\left(n^2+2\right)-2n\right\} \\ &= \left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right) \end{aligned}$$

(2)

解法 1

$n^4+4=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)$において，

nは正の数だから， $0<n^2+2n+2$， $n^2-2n+2<n^2+2n+2$

これと$n^4+4>0$より， $0<n^2-2n+2<n^2+2n+2$

したがって， n^4+4が素数であると仮定すると，

$n^2-2n+2=1$　すなわち$(n-1)^2=0$より， $n=1$

ところがnは2以上の自然数である。

よって，不適

ゆえに， n^4+4は素数ではない。

解法 2

$n^4+4=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)$において， nは2以上の自然数だから，

$n^2+2n+2=(n+1)^2+1\geq(2+1)^2+1=10$

$n^2-2n+2=(n-1)^2+1\geq(2-1)^2+1=2$

よって， $n^2-2n+2,\ n^2+2n+2$のいずれも1ではない。

すなわち$\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)$は合成数である。

ゆえに， n^4+4は素数ではない。

297

nが素数ならば，$n\geq 2$より，nは自然数kを用いて$3k-1,\ 3k,\ 3k+1$のいずれかで表される。

$n=3k-1$のとき

$n+4=3k+3=3(k+1)$

これと$k+1\geq 2$より， $n+4$は合成数すなわち素数ではない。

$n=3k$のとき

nは素数だから， $n=3$

このとき$n+2=5,\ n+4=7$より， $n,\ n+2,\ n+4$がすべて素数となる。

$n=3k+1$のとき

$n+2=3k+3=3(k+1)$

これと$k+1\geq 2$より， $n+2$は合成数すなわち素数ではない。

以上より， $n,\ n+2,\ n+4$がすべて素数ならば$n=3$