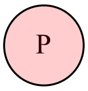
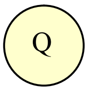
# 数と式 10　命題と証明

## 逆・対偶・裏

P：条件 $p$ を満たす要素全体の集合

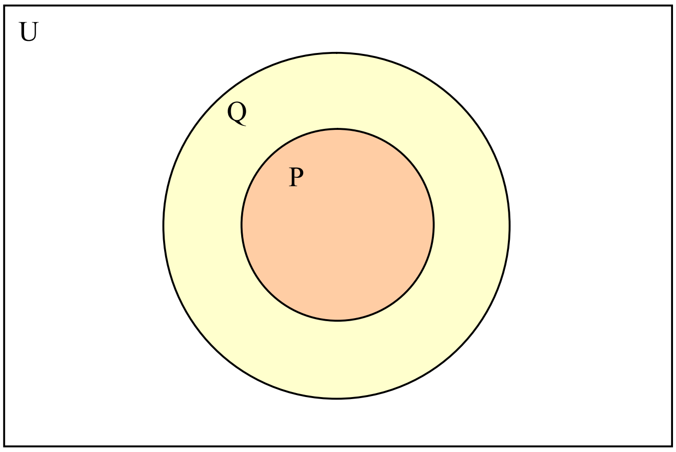


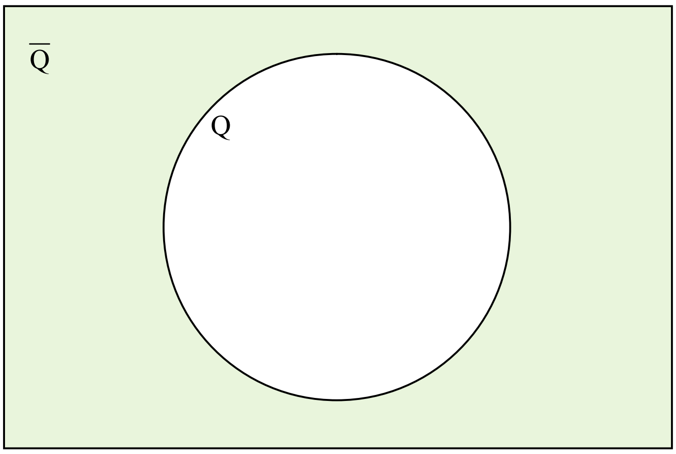

Q：条件 $q$ を満たす要素全体の集合

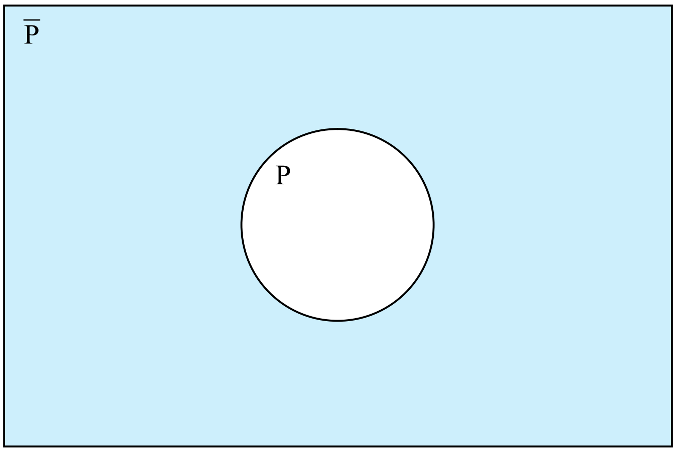



命題 $p \Rightarrow q$ が真のとき

$P \subset Q$ の場合






より，

逆 $q \Rightarrow p$ は偽

反例はベン図の $\mathrm{Q} \cap \overline{\mathrm{P}}$ の要素

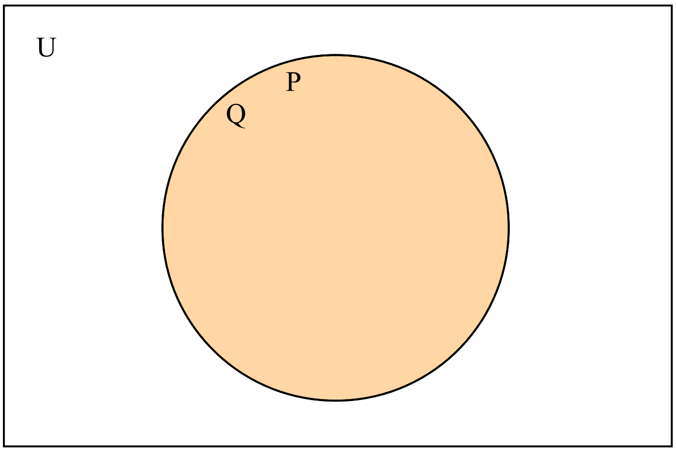
裏 $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ は偽

反例は $\overline{\mathrm{P}} \cap \mathrm{Q}$ の要素

対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ は真

$\because \overline{\mathrm{Q}} \subset \overline{\mathrm{P}}$

$\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ の場合




より，逆，裏，対偶とも真

**110**

**(1)**

対偶「$n$ が 5 の倍数でないならば，$n^2$ は 5 の倍数でない」を証明する。

5 の倍数でない整数 $n$ は，ある整数 $k$ を用いて，$5k+1,\ 5k-1,\ 5k+2,\ 5k-2$ のいずれかで表される。

$n=5k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+1)^2 \\ &= 25k^2+10k+1 \\ &= 5(5k^2+2k)+1 \end{aligned}$$

より，$n^2$ は 5 の倍数ではない。

$n=5k-1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k-1)^2 \\ &= 25k^2-10k+1 \\ &= 5(5k^2-2k)+1 \end{aligned}$$

より，$n^2$ は 5 の倍数ではない。

$n=5k+2$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+2)^2 \\ &= 25k^2+20k+4 \\ &= 5(5k^2+4k)+4 \end{aligned}$$

より，$n^2$ は 5 の倍数ではない。

$n=5k-2$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k-2)^2 \\ &= 25k^2-20k+4 \\ &= 5(5k^2-4k)+4 \end{aligned}$$

より，$n^2$ は 5 の倍数ではない。

以上より，対偶は真である。

ゆえに，与えられた命題は真である。

補足

「5 の倍数でない整数 $n$ は，ある整数 $k$ を用いて $5k+1,\ 5k+2\ 5k+3,\ 5k+4$ のいずれかで表される」としてもよい。

**(2)**

対偶「$m, n$ がともに 3 の倍数でないならば，$mn$ は 3 の倍数でない」を証明する。

3 の倍数でない整数 $m$ は，ある整数 $k$ を用いて，$3k+1,\ 3k-1$ のいずれかで表される。

3 の倍数でない整数 $n$ は，ある整数 $l$ を用いて，$3l+1,\ 3l-1$ のいずれかで表される。

$m=3k+1,\ n=3l+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
mn &= (3k+1)(3l+1)\\
&= 9kl+3k+3l+1\\
&= 3(3kl+k+l)+1
\end{aligned}
$$

より，$mn$ は 3 の倍数ではない。

$m=3k+1,\ n=3l-1$ のとき

$$
\begin{aligned}
mn &= (3k+1)(3l-1)\\
&= 9kl-3k+3l-1\\
&= 3(3kl-k+l)-1
\end{aligned}
$$

より，$mn$ は 3 の倍数ではない。

$m=3k-1,\ n=3l+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
mn &= (3k-1)(3l+1)\\
&= 9kl+3k-3l-1\\
&= 3(3kl+k-l)-1
\end{aligned}
$$

より，$mn$ は 3 の倍数ではない。

$m=3k11,\ n=3l-1$ のとき

$$
\begin{aligned}
mn &= (3k-1)(3l-1)\\
&= 9kl-3k-3l+1\\
&= 3(3kl-k-l)+1
\end{aligned}
$$

より，$mn$ は 3 の倍数ではない。

以上より，対偶は真である。

ゆえに，与えられた命題は真である。

**111**

$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}-\sqrt{2}=p$ （$p$ は有理数）と表せる。

すると，$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=p^2$ より，$5-2\sqrt{6}=p^2$

よって，$\sqrt{6}=\dfrac{5-p^2}{2}$

$p^2$ は有理数だから，右辺 $\dfrac{5-p^2}{2}$ は有理数である。

したがって，$\sqrt{6}$ は有理数である。

これは $\sqrt{6}$ が無理数であることと矛盾する。

ゆえに，この仮定は偽，すなわち $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ は無理数である。

**112**

$q\neq 0$ と仮定すると，$p+qX=0$ より，$X=-\dfrac{p}{q}$

$p,\ q$ は有理数だから，右辺 $-\dfrac{q}{p}$ は有理数である。

したがって，$X$ は有理数である。

これは $X$ が無理数であることと矛盾する。

よって，この仮定は偽，すなわち $q=0$ である。

そこで，$p+qX=0$ に $q=0$ を代入し $p$ を求めると，$p=0$

ゆえに，$p+qX=0$ であるならば，$p=q=0$ である。

**113**

**(1)**

$\left(\sqrt{2}-1\right)p+q\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$ より，$(p+q-1)\sqrt{2}=p+2$

ここで，$p+q-1\neq 0$ と仮定すると，$\sqrt{2}=\dfrac{p+2}{p+q-1}$

$p,\ q$ は有理数だから，右辺 $\dfrac{p+2}{p+q-1}$ は有理数である。

したがって，$\sqrt{2}$ は有理数である。

これは $\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する。

よって，$p+q-1=0$　・・・①

このとき，$(p+q-1)\sqrt{2}=p+2$ の左辺は $0$ だから，$p+2=0$　・・・②

ゆえに，①，②より，$p=-2,\ q=3$

**(2)**

両辺を$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$倍すると，$\sqrt{2}p+\left(\sqrt{2}-1\right)q=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

これを整理すると，$(p+q+1)\sqrt{2}=q+2$

ここで，$p+q+1\neq 0$ と仮定すると，$\sqrt{2}=\dfrac{q+2}{p+q+1}$

$p,\ q$ は有理数だから，右辺$\dfrac{q+2}{p+q+1}$は有理数である。

したがって，$\sqrt{2}$ は有理数である。

これは$\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する。

よって，$p+q+1=0$　・・・①

このとき，$(p+q+1)\sqrt{2}=q+2$ の左辺は 0 だから，$q+2=0$　・・・②

ゆえに，①，②より，$p=1,\ q=-2$