数と式 2　整式の加法と減法および乗法

指数法則

$a^m a^n = a^{m+n}$ であることを具体的に確かめてみよう。

$$
\begin{aligned}
a^2a^3 &= a^2 \times a^3 \\
&= (a \times a) \times (a \times a \times a) \\
&= a \times a \times a \times a \times a \\
&= a^5
\end{aligned}
$$

$(a^m)^n = a^{mn}$ であることを具体的に確かめてみよう。

$$
\begin{aligned}
(a^2)^3 &= a^2 \times a^2 \times a^2 \\
&= (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) \\
&= a \times a \times a \times a \times a \times a \\
&= a^6
\end{aligned}
$$

$(ab)^n = a^n b^n$ であることを具体的に確かめてみよう。

$$
\begin{aligned}
(ab)^3 &= ab \times ab \times ab \\
&= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \\
&= a \times b \times a \times b \times a \times b \\
&= a \times a \times a \times b \times b \times b \\
&= (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) \\
&= a^3 \times b^3 \\
&= a^3 b^3
\end{aligned}
$$

展開の公式

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ を表を利用して覚えよう。

$(a+b+c)^2 = (a+b+c) \times (a+b+c)$ とし,

さらにそれぞれの $a+b+c$ を単項式 a, $+b$, $+c$ に分解し, 各単項式の掛け算をする (下表)。

	a	$+b$	$+c$
a	a^2	$+ab$	$+ca$
$+b$	$+ab$	$+b^2$	$+bc$
$+c$	$+ca$	$+bc$	$+c^2$

表の黄色で塗りつぶした単項式をつないで多項式にすると,

$$
\begin{aligned}
&a^2 + (+ab) + (+ca) + (+ab) + (+b^2) + (+bc) + (+ca) + (+bc) + (+c^2) \\
&= a^2 + ab + ca + ab + b^2 + bc + ca + bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca
\end{aligned}
$$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ については

	ax	$+b$
cx	acx^2	$+bcx$
$+d$	$+adx$	$+bd$

$\therefore acx^2+(+bcx)+(+adx)+(+bd)=acx^2+bcx+adx+bd$

$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ については

まず $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$ としてから，

	a	$+b$
a^2	a^3	$+a^2b$
$+2ab$	$+2a^2b$	$+2ab^2$
$+b^2$	$+ab^2$	$+b^3$

$\therefore a^3+(+a^2b)+(+2a^2b)+(+2ab^2)+(+ab^2)+(+b^3)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ については

まず $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$ としてから，

	a	$-b$
a^2	a^3	$-a^2b$
$-2ab$	$-2a^2b$	$+2ab^2$
$+b^2$	$+ab^2$	$-b^3$

$\therefore a^3+(-a^2b)+(-2a^2b)+(+2ab^2)+(+ab^2)+(-b^3)=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

15

(1)

$$\begin{aligned}(a+1)^3 &= a^3+3\times a^2\times 1+3\times a\times 1^2+1^3\\ &= a^3+3a^2+3a+1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(a+3b)^3 &= \{a+(3b)\}^3\\ &= a^3+3\times a^2\times(3b)+3\times a\times(3b)^2+(3b)^3\\ &= a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(2a-1)^3 &= \{(2a)-1\}^3\\ &= (2a)^3-3\times(2a)^2\times 1+3\times(2a)\times 1^2-1^3\\ &= 8a^3-12a^2+6a-1\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}(2a-1)^3 &= \{2a+(-1)\}^3=(2a)^3+3\times(2a)^2\times(-1)+3\times(2a)\times(-1)^2+(-1)^3\\ &= 8a^3-12a^2+6a-1\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(-3a+2b)^3 &= \{(-3a)+(2b)\}^3\\ &= (-3a)^3+3\times(-3a)^2\times(2b)+3\times(-3a)\times(2b)^2+(2b)^3\\ &= -27a^3+54a^2b-36ab^2+8b^3\end{aligned}$$

16

(1)

$$\begin{aligned}(a+5)(a^2-5a+25) &= (a+5)(a^2-5a+5^2)\\ &= a^3+5^3\\ &= a^3+125\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(3-a)(9+3a+a^2) &= (3-a)(3^2+3a+a^2)\\ &= 3^3-a^3\\ &= 27-a^3\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(2a+b)(4a^2-2ab+b^2) &= \{(2a)+b\}\{(2a)^2-(2a)\times b+b^3\}\\ &= (2a)^3+b^3\\ &= 8a^3+b^3\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2) &= \{(3a)-(2b)\}\{(3a)^2+(3a)\times(2b)+(2b)^2\}\\ &= (3a)^3-(2b)^3\\ &= 27a^3-8b^3\end{aligned}$$

17

(1)

$$
\begin{aligned}
(3a-2)^3 &= \{(3a)-2\}^3 \\
&= (3a)^3 - 3\times(3a)^2\times 2 + 3\times(3a)\times 2^2 - 2^3 \\
&= 27a^3 - 54a^2 + 36a - 8
\end{aligned}
$$

別解

$$
\begin{aligned}
(3a-2)^3 &= \{(3a)+(-2)\}^3 \\
&= (3a)^3 + 3\times(3a)^2\times(-2) + 3\times(3a)\times(-2)^2 + (-2)^3 \\
&= 27a^3 - 54a^2 + 36a - 8
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2) &= \{(3a)-(4b)\}\{(3a)^2+(3a)\times(4b)+(4b)^2\} \\
&= (3a)^3-(4b)^3 \\
&= 27a^3-64b^3
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(2x-y)^3(2x+y)^3 &= \{(2x)-y\}^3\{(2x)+y\}^3 \\
&= [\{(2x)-y\}\{(2x)+y\}]^3 \\
&= \{(2x)^2-y^2\}^3 \\
&= (4x^2-y^2)^3 \\
&= \{(4x^2)+(-y^2)\}^3 \\
&= (4x^2)^3 + 3\times(4x^2)^2\times(-y^2) + 3\times(4x^2)\times(-y^2)^2 + (-y^2)^3 \\
&= 4^3(x^2)^3 + 3\times 4^2(x^2)^2\times(-y^2) + 3\times(4x^2)\times(-1)^2(y^2)^2 + (-1)^3(y^2)^3 \\
&= 64x^6 - 48x^4y^2 + 12x^2y^4 - y^6
\end{aligned}
$$

18

ある整式を A とおくと，条件より $A+(3x^2-xy+2y^2)=2x^2+xy-y^2$

$$
\begin{aligned}
\therefore A &= 2x^2+xy-y^2-(3x^2-xy+2y^2) \\
&= 2x^2+xy-y^2-3x^2+xy-2y^2 \\
&= -x^2+2xy-3y^2
\end{aligned}
$$

よって，正しい答えは，

$$
\begin{aligned}
A-(3x^2-xy+2y^2) &= -x^2+2xy-3y^2-3x^2+xy-2y^2 \\
&= -4x^2+3xy-5y^2
\end{aligned}
$$

別解

$$
\begin{aligned}
A-(3x^2-xy+2y^2) &= \{A+(3x^2-xy+2y^2)\}-(3x^2-xy+2y^2)-(3x^2-xy+2y^2) \\
&= \{A+(3x^2-xy+2y^2)\}-2(3x^2-xy+2y^2) \\
&= 2x^2+xy-y^2-6x^2+2xy-4y^2 \\
&= -4x^2+3xy-5y^2
\end{aligned}
$$

19

(1)

$$\begin{aligned}与式&=\{(x-1)(x+1)\}\{(x-3)(x+3)\}\\&=(x^2-1)(x^2-9)\\&=x^4-10x^2+9\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}与式&=\{(x+2)(x-1)\}\{(x+5)(x-4)\}\\&=\{(x^2+x)-2\}\{(x^2+x)-20\}\\&=(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40\\&=x^4+2x^3+x^2-22x^2-22x+40\\&=x^4+2x^3-21x^2-22x+40\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}与式&=\{(a-b)(a+b)\}(a^2+b^2)(a^4+b^4)\\&=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\\&=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}(a^4+b^4)\\&=(a^4-b^4)(a^4+b^4)\\&=a^8-b^8\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}与式&=\{(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2\\&=[\{(a+b)(a-b)\}(a^4+a^2b^2+b^4)]^2\\&=\{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2\\&=\left[(a^2-b^2)\left\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\right\}\right]^2\\&=\left\{(a^2)^3-(b^2)^3\right\}^2\\&=(a^6-b^6)^2\\&=(a^6)^2-2a^6b^6+(b^6)^2\\&=a^{12}-2a^6b^6+b^{12}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}与式&=\{(a+b)+c\}^2+\{(a+b)-c\}^2+\{c-(a-b)\}^2+\{c+(a-b)\}^2\\&=\left\{(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\right\}+\left\{(a+b)^2-2(a+b)c+c^2\right\}\\&\quad+\left\{c^2-2c(a-b)+(a-b)^2\right\}+\left\{c^2+2c(a-b)+(a-b)^2\right\}\\&=2(a+b)^2+2(a-b)^2+4c^2\\&=2(a^2+2ab+b^2)+2(a^2-2ab+b^2)+4c^2\\&=4a^2+4b^2+4c^2\end{aligned}$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{(b+c)+a\}^2 - \{(b+c)-a\}^2 + \{(c-b)+a\}^2 - \{(c-b)-a\}^2 \\
&= \{(b+c)^2 + 2(b+c)a + a^2\} - \{(b+c)^2 - 2(b+c)a + a^2\} \\
&\quad + \{(c-b)^2 + 2(c-b)a + a^2\} - \{(c-b)^2 - 2(c-b)a + a^2\} \\
&= 4(b+c)a + 4(c-b)a \\
&= 4ba + 4ca + 4ca - 4ba \\
&= 8ca
\end{aligned}
$$

20

a^3b^2 の係数は，下の同色の係数の積の和より，$5\times(-3)+(-3)\times 2+7\times 3=0$

$5a^3$　　$3a^2$
$-3a^2b$　　$2ab$
$7ab^2$　　$-3b^2$
$-2b^3$

a^2b^3 の係数は，下の同色の係数の積の和より，$-3\times(-3)+7\times 2+(-2)\times 3=17$

$5a^3$　　$3a^2$
$-3a^2b$　　$2ab$
$7ab^2$　　$-3b^2$
$-2b^3$

21

(1)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}(x^4-x^2y^2+y^4) \\
&= \{(x^2+y^2)^2 - x^2y^2\}(x^4-x^2y^2+y^4) \\
&= \{(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2\}(x^4-x^2y^2+y^4) \\
&= \{(x^4+y^4)+x^2y^2\}\{(x^4+y^4-x^2y^2)\} \\
&= (x^4+y^4)^2-(x^2y^2)^2 \\
&= x^8+2x^4y^4+y^8-x^4y^4 \\
&= x^8+x^4y^4+y^8
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \{(x+y)+1\}\{(x+y)-1\}\{(x-y)+1\}\{(x-y)-1\} \\
&= \{(x+y)^2-1\}\{(x-y)^2-1\} \\
&= (x+y)^2(x-y)^2-(x+y)^2-(x-y)^2+1 \\
&= \{(x+y)(x-y)\}^2-(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)+1 \\
&= (x^2-y^2)^2-2x^2-2y^2+1 \\
&= x^4-2x^2y^2+y^4-2x^2-2y^2+1
\end{aligned}
$$

22

(1)

3 種のアルファベット順は abc ,

2 種のアルファベット順は ab, bc, ca とすると決めてから展開する。

$$
\begin{aligned}
与式 &= a(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+b(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
&\quad +c(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
&= (a^3+ab^2+c^2a-a^2b-abc-ca^2)+(a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc) \\
&\quad +(ca^2+b^2c-abc-bc^2-c^2a) \\
&= a^3+b^3+c^3-3abc
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
与式 &= (x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x) \\
&= \{x+y+(-1)\}\{x^2+y^2+(-1)^2-xy-y\cdot(-1)-(-1)\cdot x\} \\
&= x^3+y^3+(-1)^3-3xy\cdot(-1) \\
&= x^3+y^3-1+3xy \\
&= x^3+y^3+3xy-1
\end{aligned}
$$

補足

(1)の a を x， b を y， c を -1 に置き換えた形になる。