数と式 3　因数分解

32

(1)

$$\begin{aligned}
与式 &= (2x)^3 + 1^3 \\
&= \{(2x)+1\}\{(2x)^2 - (2x)\cdot 1 + 1^3\} \\
&= (2x+1)(4x^2 - 2x + 1)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
与式 &= (4x)^3 - 3^3 \\
&= \{(4x)-3\}\{(4x)^2 + (4x)\cdot 3 + 3^2\} \\
&= (4x-3)(16x^2 + 12x + 9)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
与式 &= (2x)^3 + (3y)^3 \\
&= \{(2x)+(3y)\}\{(2x)^2 - (2x)\cdot(3y) + (3y)^2\} \\
&= (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)
\end{aligned}$$

33

(1)

$$\begin{array}{ccccc}
ax & & -b & \longrightarrow & -b^2x \\
bx & & -a & \longrightarrow & -a^2x \\
\hline
abx^2 & & ab & & -(a^2+b^2)x
\end{array}$$

より，

$$与式 = (ax-b)(bx-a)$$

(2)

$$\begin{array}{ccccc}
ax & & -by & \longrightarrow & -b^2xy \\
bx & & ay & \longrightarrow & a^2xy \\
\hline
abx^2 & & -aby^2 & & (a^2-b^2)xy
\end{array}$$

より，

$$与式 = (ax-by)(bx+ay)$$

34

(1)

$$\begin{aligned}
与式 &= \{(x^2-x)-2\}\{(x^2-x)-6\} \\
&= (x^2-x-2)(x^2-x-6) \\
&= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \left(x^2+2x\right)\left\{\left(x^2+2x\right)-2\right\}-3 \\
&= \left(x^2+2x\right)^2-2\left(x^2+2x\right)-3 \\
&= \left\{\left(x^2+2x\right)+1\right\}\left\{\left(x^2+2x\right)-3\right\} \\
&= \left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x-3\right) \\
&= (x+1)^2(x-1)(x+3)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \left(x^3\right)^2+7\left(x^3\right)-8 \\
&= \left\{\left(x^3\right)+8\right\}\left\{\left(x^3\right)-1\right\} \\
&= \left(x^3+8\right)\left(x^3-1\right) \\
&= \left(x^3+2^3\right)\left(x^3-1^3\right) \\
&= (x+2)\left(x^2-2x+4\right)(x-1)\left(x^2+x+1\right) \\
&= (x+2)(x-1)\left(x^2-2x+4\right)\left(x^2+x+1\right)
\end{aligned}
$$

35

(1)

x についての 1 次式， y についての 1 次式である。

式の次数が同じ（1 次式）だから，どっちで整理しても労力は同じ。

$$
\begin{aligned}
与式 &= x(y-1)-y+1 \\
&= x(y-1)-(y-1) \\
&= (x-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

(2)

(1)と同じく，どの文字について整理しても労力は同じ。

$$
\begin{aligned}
与式 &= a(b-d)+bc-cd \\
&= a(b-d)+c(b-d) \\
&= (a+c)(b-d)
\end{aligned}
$$

(3)

x についての 2 次式， y についての 1 次式である。

したがって， y について整理すれば労力が軽減される。

$$
\begin{aligned}
与式 &= 3y(x-5)-x^2+25 \\
&= 3y(x-5)-\left(x^2-25\right) \\
&= 3y(x-5)-(x-5)(x+5) \\
&= (x-5)\{3y-(x+5)\} \\
&= (x-5)(-x+3y-5)
\end{aligned}
$$

(4)

a についての 2 次式，b についての 1 次式である。

したがって，b について整理すれば労力が軽減される。

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= b\left(a^2-1\right)+a^2-1 \\
&= \left(a^2-1\right)(b+1) \\
&= (a+1)(a-1)(b+1)
\end{aligned}
$$

(5)

a についての 2 次式，b についての 2 次式，c についての 1 次式である。

したがって，c について整理すれば労力が軽減される。

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 2c(a+b)+a^2+2ab+b^2 \\
&= 2c(a+b)+(a+b)^2 \\
&= (a+b)\{(a+b)+2c\} \\
&= (a+b)(a+b+2c)
\end{aligned}
$$

(6)

a についての 2 次式，b についての 2 次式，c についての 1 次式である。

したがって，c について整理すれば労力が軽減される。

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= c(b-a)+a^2-2ab+b^2 \\
&= c(b-a)+(b-a)^2 \\
&= (b-a)\{c+(b-a)\} \\
&= (b-a)(-a+b+c) \\
&= (a-b)(a-b-c)
\end{aligned}
$$

36

(1)

$$
\begin{array}{cccc}
x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y+4 & \longrightarrow \quad (y+4)x \\
x & & 2y-3 & \longrightarrow \quad (2y-3)x \\
\hline
x^2 & & (y+4)(2y-3) & \quad (3y+1)x
\end{array}
$$

よって，与式 $=(x+y+4)(x+2y-3)$

(2)

x について整理すると，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= x^2+(3y-6)x+2y^2-11y+5 \\
&= x^2+(3y-6)x+(y-5)(2y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y-5 & \longrightarrow \quad (y-5)x \\
x & & 2y-1 & \longrightarrow \quad (2y-1)x \\
\hline
x^2 & & (y-4)(2y-1) & \quad (3y-6)x
\end{array}
$$

よって，与式 $=(x+y-5)(x+2y-1)$

(3)

x について整理すると，

与式 $= x^2 + (-2y-1)x + y^2 + y - 2$

$\quad = x^2 + (-2y-1)x + (y-1)(y+2)$

$$\begin{array}{ccccc}
x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -(y-1) & \longrightarrow & -(y-1)x \\
x & & -(y+2) & \longrightarrow & -(y+2)x \\
\hline
x^2 & & (y-1)(y+2) & & (-2y-1)x
\end{array}$$

よって，与式 $= \{x-(y-1)\}\{x-(y+2)\} = (x-y+1)(x-y-2)$

別解

与式 $= (x^2 - 2xy + y^2) - (x-y) - 2$

$\quad = (x-y)^2 - (x-y) - 2$

$\quad = \{(x-y)+1\}\{(x-y)-2\}$

$\quad = (x-y+1)(x-y-2)$

(4)

x について整理すると，

与式 $= 2x^2 + (5y+4)x + 2y^2 - y - 6$

$\quad = 2x^2 + (5y+4)x + (y-2)(2y+3)$

$$\begin{array}{ccccc}
2x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y-2 & \longrightarrow & (y-2)x \\
x & & 2y+3 & \longrightarrow & (4y+6)x \\
\hline
x^2 & & (y-2)(2y+3) & & (5y+4)x
\end{array}$$

よって，与式 $= (2x+y-2)(x+2y+3)$

(5)

x について整理すると，

与式 $= 2x^2 + (y+7)x - y^2 - 5y - 4$

$\quad = 2x^2 + (y+7)x - (y^2 + 5y + 4)$

$\quad = 2x^2 + (y+7)x - (y+1)(y+4)$

$$\begin{array}{ccccc}
2x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -(y+1) & \longrightarrow & (-y-1)x \\
x & & y+4 & \longrightarrow & (2y+8)x \\
\hline
x^2 & & -(y+1)(y+4) & & (y+7)x
\end{array}$$

よって，与式 $= \{2x-(y+1)\}(x+y+4) = (2x-y-1)(x+y+4)$

(6)

x について整理すると,

与式 $=2x^2+(5y-1)x-(3y^2-11y+6)$

$\quad\;\; =2x^2+(5y-1)x-(y-3)(3y-2)$

$$\begin{array}{ccccc} 2x & & -(y-3) & \longrightarrow & (-y+3)x \\ x & & 3y-2 & \longrightarrow & (6y-4)x \\ \hline x^2 & & -(y-3)(3y-2) & & (5y-1)x \end{array}$$

よって,与式 $=\{2x-(y-3)\}(x+3y-2)=(2x-y+3)(x+3y-2)$

37

(1)

a について整理すると,

与式 $=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-bc^2$

$\quad\;\; =a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)+bc(b-c)$

$\quad\;\; =(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$\quad\;\; =(b-c)(a-b)(a-c)$

$\quad\;\; =-(a-b)(b-c)(c-a)$

(2)

与式 $=\{(a+b)(a+c)\}(b+c)+abc$

$\quad\;\; =\{a^2+(b+c)a+bc\}(b+c)+abc$

$\quad\;\; =a^2(b+c)+(b+c)^2a+bc(b+c)+abc$

$\quad\;\; =a^2(b+c)+a\{(b+c)^2+bc\}+bc(b+c)$

$$\begin{array}{ccccc} a & & b+c & \longrightarrow & (b+c)^2a \\ a(b+c) & & bc & \longrightarrow & bca \\ \hline a^2(b+c) & & bc(b+c) & & \{(b+c)^2+bc\}a \end{array}$$

よって,

$(a+b+c)\{a(b+c)+bc\}=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

38

(1)

与式 $=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$\quad\;\; =(x^2+2)^2-x^2$

$\quad\;\; =(x^2+2-x)(x^2+2+x)$

$\quad\;\; =(x^2-x+2)(x^2+x+2)$

(2)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) - 4x^2 \\
&= \left(x^2 - 1\right)^2 - (2x)^2 \\
&= \left(x^2 - 1 - 2x\right)\left(x^2 - 1 + 2x\right) \\
&= \left(x^2 - 2x - 1\right)\left(x^2 + 2x - 1\right)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \left(x^4 - 2x^2y^2 + y^4\right) - 16x^2y^2 \\
&= \left(x^2 - y^2\right)^2 - (4xy)^2 \\
&= \left(x^2 - y^2 - 4xy\right)\left(x^2 - y^2 + 4xy\right) \\
&= \left(x^2 - 4xy - y^2\right)\left(x^2 + 4xy - y^2\right)
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \left(x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4\right) - 4x^2y^2 \\
&= \left(x^2 + 2y^2\right)^2 - (2xy)^2 \\
&= \left(x^2 + 2y^2 - 2xy\right)\left(x^2 + 2y^2 + 2xy\right) \\
&= \left(x^2 - 2xy + 2y^2\right)\left(x^2 + 2xy + 2y^2\right)
\end{aligned}
$$

39

(1)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\} + 15 \\
&= \{\left(x^2 - 8x\right) + 7\}\{\left(x^2 - 8x\right) + 15\} + 15 \\
&= \left(x^2 - 8x\right)^2 + 22\left(x^2 - 8x\right) + 120 \\
&= \{\left(x^2 - 8x\right) + 10\}\{\left(x^2 - 8x\right) + 12\} \\
&= \left(x^2 - 8x + 10\right)\left(x^2 - 8x + 12\right) \\
&= \left(x^2 - 8x + 10\right)(x-2)(x-6) \\
&= (x-2)(x-6)\left(x^2 - 8x + 10\right)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \{(x+1)(x-5)\}\{(x-1)(x-3)\} + 12 \\
&= \{\left(x^2 - 4x\right) - 5\}\{\left(x^2 - 4x\right) + 3\} + 12 \\
&= \left(x^2 - 4x\right)^2 - 2\left(x^2 - 4x\right) - 3 \\
&= \{\left(x^2 - 4x\right) + 1\}\{\left(x^2 - 4x\right) - 3\} \\
&= \left(x^2 - 4x + 1\right)\left(x^2 - 4x - 3\right)
\end{aligned}
$$

40

(1)

与式 $=(x+y)^3$

(2)

与式 $=(2a)^3+3(2a)^2(-b)+3(2a)(-b)^2+(-b)^3$

$=(2a-b)^3$

補足

$a^3+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ の変換も重要である。

41

(1)

与式 $=x^2(x-5)-4(x-5)$

$=(x-5)(x^2-4)$

$=(x-5)(x-2)(x+2)$

(2)

与式 $=(8x^3+1)+(6x^2+3x)$

$=(2x+1)(4x^2-2x+1)+3x(2x+1)$

$=(2x+1)\{(4x^2-2x+1)+3x\}$

$=(2x+1)(4x^2+x+1)$

(3)

x についての 2 次式，y についての 2 次式，z についての 1 次式より，

z について整理すると，

与式 $=z(4y^2-x^2)+x^2y-4y^3$

$=z(4y^2-x^2)+y(x^2-4y^2)$

$=(x^2-4y^2)(y-z)$

$=(x+2y)(x-2y)(y-z)$

(4)

a についての 4 次式，b についての 1 次式，c についての 3 次式より，

b について整理すると，

与式 $=b(a^2-c)-a^4c+2a^2c^2-c^3$

$=b(a^2-c)-c(a^4-2a^2c+c^2)$

$=b(a^2-c)-c(a^2-c)^2$

$=(a^2-c)\{b-c(a^2-c)\}$

$=(a^2-c)(b-a^2c+c^2)$

42

(1)

$$与式 = (a+b)\{(a+b)^2 - 3ab\}$$
$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$= a^3 + b^3$$

(2)

$$与式 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$$
$$= \{(a+b)^3 + c^3\} - 3ab(a+b) - 3abc$$
$$= \{(a+b)+c\}^3 - 3(a+b)c\{(a+b)+c\} - 3ab(a+b) - 3abc$$
$$= (a+b+c)^3 - 3(ac+bc)(a+b+c) - 3ab(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 3ac - 3bc - 3ab\}$$
$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

(3)

(2)の a に x， b に y， c に 1 を代入すると，(3)の与式になる。

よって， $(x+y+1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y)$

$\therefore (x+y+1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)$