

数と式 6 1次不等式

数と式 7 1次不等式の利用

74

(1)

 $a > 0$ のとき両辺を正の数 a で割って $x \leq \frac{2}{a}$ $a = 0$ のとき

$$0 \cdot x \leq 2$$

 $0 \cdot x = 0$ だから、すべての実数 x が $0 \cdot x \leq 2$ を満たす。

よって、解はすべての実数。

 $a < 0$ のとき両辺を負の数 a で割って $x \geq \frac{2}{a}$

(2)

 x の項を左辺に、定数項を右辺に移項し、両辺を整理すると、 $(a-3)x > 2(a-3)$ $a-3 > 0$ すなわち $a > 3$ のとき両辺を正の数 $a-3$ で割って $x > 2$ $a-3 = 0$ すなわち $a = 3$ のとき

$$0 \cdot x > 0$$

 $0 \cdot x = 0$ だから、 $0 \cdot x > 0$ を満たす実数 x は存在しない。

よって、解がない。

 $a-3 < 0$ すなわち $a < 3$ のとき両辺を負の数 $a-3$ で割って $x < 2$

75

(1)

$$2x - 3 > a + 8x \text{ より, } -6x > a + 3 \quad \therefore x < \frac{-a-3}{6}$$

解が $x < 1$ であるから、 $-\frac{a+3}{6} = 1$ ゆえに、 $a = -9$

(2)

$$x = 0 \text{ が } x < \frac{-a-3}{6} \text{ を満たすから, } 0 < \frac{-a-3}{6} \quad \therefore a < -3$$

76

(1)

$$5(x-3) < -2(x-14) \text{ から, } 7x < 43 \quad \therefore x < \frac{43}{7}$$

これと $6 < \frac{43}{7} < 7$ より, 求める最大の整数は 6

(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{4}{3} \geq x - \frac{2}{3} \text{ から, } -\frac{x}{2} \geq -2 \quad \therefore x \leq 4$$

よって, これを満たす自然数 x は 1, 2, 3, 4 の 4 個

77

x 分後の A, B の水の体積はそれぞれ $4 + 0.6x$ [m³], $2.5 + 0.25x$ [m³]

x 分後から A の水の量が B の水の量の 2 倍になったとすると,

$$4 + 0.6x \geq 2(2.5 + 0.25x) \quad \therefore x \geq 10$$

ゆえに, 10 分後

78

x 個買ったときの値段は会員で $500 + \frac{94}{100} \cdot 800x$ 円, 非会員で $800x$ 円

x 個買ったとき会員の方が安くなったとすると,

$$500 + \frac{94}{100} \cdot 800x < 800x \text{ より, } 800x \left(1 - \frac{94}{100}\right) > 500 \quad \therefore x > \frac{500}{48}$$

これと $10 < \frac{500}{48} < 11$ より, 11 個以上買えば会員の方が安くなる。

すなわち, 入会しないで買うより安くなる。

79

5%の食塩水を x [g], 13%の食塩水を $400 - x$ [g] 混ぜたとき

濃度が 10%以上の食塩水が 400 [g] できたとすると,

5%と 13%の食塩水に溶解している食塩の質量 \geq 10%の食塩水に溶解している食塩の質量より,

$$\frac{5}{100}x + \frac{13}{100}(400 - x) \geq \frac{10}{100} \cdot 400$$

両辺を 100 倍すると, $5x + 13(400 - x) \geq 10 \cdot 400$

よって, $13x - 5x \leq 400(13 - 10)$ より, $x \leq 150$

ゆえに, 150g 以下

80

長いすの脚数を x とすると、1 年生の生徒数は $6x+15$

条件より、生徒が 7 人ずつかけていくと 7 人が座る脚数は $x-4$

1 人以上 7 人以下の生徒が座る脚数は 1

これより、生徒数についての不等式は $7(x-4)+1 \leq 6x+15 \leq 7(x-4)+7$

すなわち $7(x-4)+1 \leq 6x+15 \quad \dots \textcircled{1}$ かつ $6x+15 \leq 7(x-4)+7 \quad \dots \textcircled{2}$

①より $x \leq 42$, ②より $36 \leq x$

よって、 $36 \leq x \leq 42$

ゆえに、36 脚以上 42 脚以下

81

(1)

$x+1 \geq 0$ すなわち $x \geq -1$ のとき

$$|x+1| = x+1 \text{ より, } x+1 = 3x \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

これは $x \geq -1$ を満たす。

$x+1 < 0$ すなわち $x < -1$ のとき

$$|x+1| = -(x+1) \text{ より, } -(x+1) = 3x \quad \therefore x = -\frac{1}{4}$$

これは $x < -1$ を満たさない。

よって、 $x = \frac{1}{2}$

別解

$|x+1| \geq 0$ だから、 $|x+1| = 3x$ のとき $3x \geq 0$ すなわち $x \geq 0$

このとき $x+1 \geq 0$ だから、 $|x+1| = x+1$ より、 $x+1 = 3x \quad \therefore x = \frac{1}{2}$

これは $x \geq 0$ を満たす。

ゆえに、解は $\frac{1}{2}$

(2)

$x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ のとき

$$|x-3| = x-3 \text{ より, } x-3 = -2x \quad \therefore x = 1$$

これは $x \geq 3$ を満たさない。

$x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ のとき

$$|x-3| = -(x-3) \text{ より, } -(x-3) = -2x \quad \therefore x = -3$$

これは $x < 3$ を満たす。

よって、 $x = -3$

別解

$|x-3| \geq 0$ だから, $|x-3| = -2x$ のとき $-2x \geq 0$ すなわち $x \leq 0$

このとき $x-3 \leq 0$ だから, $|x-3| = -(x-3)$ より, $-(x-3) = -2x \quad \therefore x = -3$

これは $x \leq 0$ を満たす。

ゆえに, 解は -3

(3) 略解

$x \geq 2$ のとき

$$2x + (x-2) = 6 \quad \therefore x = \frac{8}{3}$$

これは $x \geq 2$ を満たす。

$0 \leq x < 2$ のとき

$$2x - (x-2) = 6 \quad \therefore x = 4$$

これは $0 \leq x < 2$ を満たさない。

$x < 0$ のとき

$$-2x - (x-2) = 6 \quad \therefore x = -\frac{4}{3}$$

これは $x < 0$ を満たす。

よって, $x = \frac{8}{3}, -\frac{4}{3}$

(4)

$x+1 \geq 0$ すなわち $x \geq -1$ のとき

$$|x+1| = x+1 \text{ より, } x+1 > 3x \quad \therefore x < \frac{1}{2}$$

$$\text{これと } x \geq -1 \text{ より, } -1 \leq x < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$x+1 < 0$ すなわち $x < -1$ のとき

$$|x+1| = -(x+1) \text{ より, } -(x+1) > 3x \quad \therefore x < -\frac{1}{4}$$

$$\text{これと } x < -1 \text{ より, } x < -1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②を合わせることにより, 解は $x < \frac{1}{2}$

別解

 $x < 0$ のとき $|x+1| \geq 0$, $3x < 0$ より, $x < 0$ を満たす全ての実数 x について $|x+1| > 3x$ が成り立つ。 $x \geq 0$ のとき

$$|x+1| = x+1 \text{ より, } x+1 > 3x \quad \therefore x < \frac{1}{2}$$

$$\text{これと } x \geq 0 \text{ より } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\text{以上より, } x < \frac{1}{2}$$

(5)

 $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ のとき

$$|x-3| = x-3 \text{ より, } x-3 \leq -2x \quad \therefore x \leq 1$$

これは $x \geq 3$ を満たさない。 $x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ のとき

$$|x-3| = -(x-3) \text{ より, } -(x-3) \leq -2x \quad \therefore x \leq -3$$

これと $x < 3$ より, $x \leq -3$ よって, $x \leq -3$

別解

 $x > 0$ のとき $|x-3| \geq 0$, $-2x < 0$ より, $|x-3| \leq -2x$ を満たす解はない。 $x \leq 0$ のとき

$$|x-3| = -(x-3) \text{ より, } -(x-3) \leq -2x \quad \therefore x \leq -3$$

これと $x \leq 0$ より, $x \leq -3$ ゆえに, $x \leq -3$

(6) 略解

 $x \geq 2$ のとき

$$2x + (x-2) < 6 \text{ より, } x < \frac{8}{3}$$

$$\text{これと } x \geq 2 \text{ より, } 2 \leq x < \frac{8}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

 $0 \leq x < 2$ のとき

$$2x - (x-2) < 6 \text{ より, } x < 4$$

$$\text{これと } 0 \leq x < 2 \text{ より, } 0 \leq x < 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$x < 0$ のとき

$$-2x - (x - 2) < 6 \text{ より, } x > -\frac{4}{3}$$

$$\text{これと } x < 0 \text{ より, } -\frac{4}{3} < x < 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{ を合わせることに より, } -\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}$$

82

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 10x + 25} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} &= \sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \\ &= |x-5| + |x+2| \end{aligned}$$

よって,

$x \geq 5$ のとき

$$(x-5) + (x+2) \text{ すなわち } 2x-3$$

$-2 \leq x < 5$ のとき

$$-(x-5) + (x+2) \text{ すなわち } 7$$

$x < -2$ のとき

$$-(x-5) - (x+2) \text{ すなわち } -2x+3$$