

数と式 9 命題と条件

必要条件・十分条件と包含関係

P : 条件 p を満たす要素全体の集合

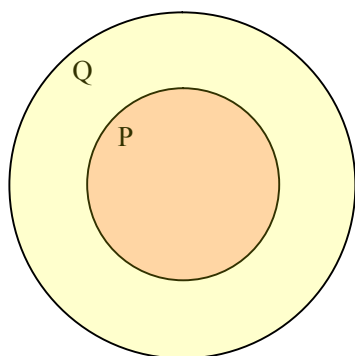


Q : 条件 q を満たす要素全体の集合



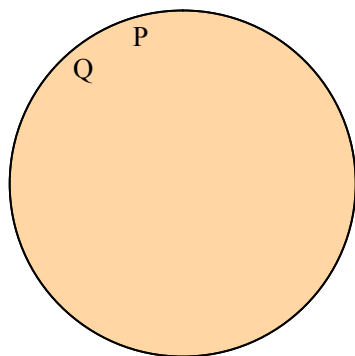
「 p は q であるための十分条件であるが必要条件ではない」 ときの P と Q の包含関係

$$P \subset Q$$

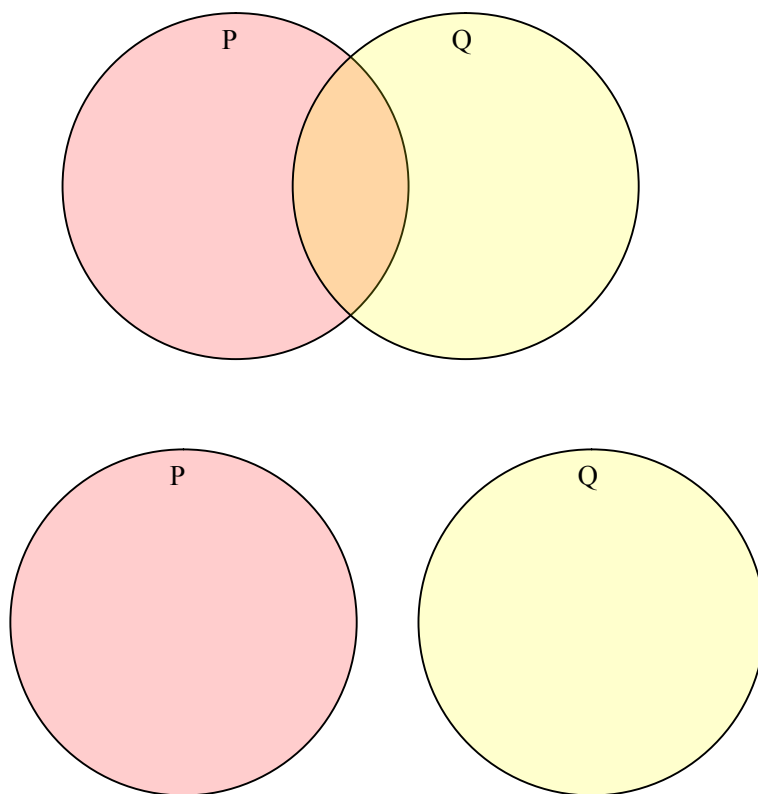


「 p は q であるための必要十分条件である」 ときの P と Q の包含関係

$$P = Q$$



「 p は q であるための必要条件でも十分条件でもない」とき P と Q の間に包含関係がない。



命題とその真偽の判定基準

命題：真偽を判定できる文や内容

「このチームはどの選手も背が高い」は命題ではないが

「このチームはどの選手も身長が 180cm 以上ある」は命題である。

命題の真偽の判定基準

1 つでも例外（「反例」という）があれば命題は偽である。

したがって、偽であることを示すには反例を 1 つあげるだけでよい。

102

(1)

偽, 反例は $a=1, b=0$

(2)

偽, 反例は $a=b=\sqrt{2}$

(3)

偽, 反例は $a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$

103

(1)

$$(x-y)(y-z)=0 \Rightarrow x=y=z$$

偽 (反例 $x=y=1, z=2$)

$$x=y=z \Rightarrow (x-y)(y-z)=0$$

真

よって, 「必要条件であるが十分条件ではない」

(2)

$$xy=0 \text{ かつ } x \neq 0 \Rightarrow y=0$$

$$x \neq 0 \text{ より, } y = \frac{0}{x} \quad \therefore y=0$$

ゆえに, 真

$$y=0 \Rightarrow xy=0 \text{ かつ } x \neq 0$$

偽 (反例 $x=y=0$)

よって, 「十分条件であるが必要条件ではない」

(3)

$$x=y=0 \Rightarrow xy=0 \text{ かつ } x+y=0$$

真

$$x=0 \text{ かつ } x+y=0 \Rightarrow x=y=0$$

$$0+y=0 \text{ より, } y=0$$

$$\text{よって, } x=y=0$$

ゆえに真

よって, 「必要十分条件である」

(4)

$$\angle A < 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ は鋭角三角形}$$

偽 (反例 $\angle A=30^\circ, \angle B=50^\circ, \angle C=100^\circ$ の鈍角三角形)

$$\triangle ABC \text{ は鋭角三角形} \Rightarrow \angle A < 90^\circ$$

真

よって, 「必要条件であるが十分条件ではない」

(5)

$$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0 \Rightarrow \triangle ABC \text{ は直角二等辺三角形}$$

偽 (反例 $a=b=c=1$ の正三角形)

$$\triangle ABC \text{ が直角二等辺三角形} \Rightarrow (a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$$

偽 (反例 $a=\sqrt{2}, b=c=1$ の直角二等辺三角形)

よって, 「必要条件でも十分条件でもない」

104

 $p \Rightarrow q$ が真であることの証明

$$a > 1, b > 1 \text{ より, } a+b > 1+1 \text{ すなわち } a+b > 2$$

$$a > 1, b > 1 \text{ より, } a-1 > 0, b-1 > 0 \quad \therefore (a-1)(b-1) > 0$$

よって, $p \Rightarrow q$ は真である。 $q \Rightarrow p$ が真であることの証明

$$(a-1)(b-1) > 0 \text{ より,}$$

$$a-1 > 0, b-1 > 0 \text{ すなわち } a > 1 \text{ かつ } b > 1$$

または

$$a-1 < 0, b-1 < 0 \text{ すなわち } a < 1 \text{ かつ } b < 1$$

これらのうち, $a+b > 2$ を満たすのは $a > 1$ かつ $b > 1$

よって,

$$a+b > 2 \text{ かつ } (a-1)(b-1) > 0 \Rightarrow a > 1 \text{ かつ } b > 1$$

 $a > 1$ かつ $b > 1$ は条件 p と一致する。ゆえに, $q \Rightarrow p$ は真である。以上から, $p \Leftrightarrow q$ が成り立つ。したがって, p と q は同値である。

105

(1)

命題の否定

$$\text{ある実数 } x \text{ について } (x-1)^2 = 0$$

真偽

$$x=1 \text{ のとき } (x-1)^2 = 0 \text{ だから, もとの命題は偽, その否定は真}$$

(2)

命題の否定

$$\text{すべての自然数 } n \text{ について } n^2 \neq 5n$$

真偽

$$n=5 \text{ のとき } n^2 = 5n \text{ が成り立つから, もとの命題は真, その否定は偽}$$