

数と式 演習問題

1

(1)

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \{(3x+1)(3x-1)\}\{(x+2)(x-2)\} \\
 &= (9x^2-1)(x^2-4) \\
 &= 9x^4-37x^2+4
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \{(x+y+z)(x+y-z)\}\{(x-y+z)(x-y-z)\} \\
 &= [\{(x+y)+z\}\{(x+y)-z\}][\{(x-y)+z\}\{(x-y)-z\}] \\
 &= \{(x+y)^2-z^2\}\{(x-y)^2-z^2\} \\
 &= (x+y)^2(x-y)^2 - (x+y)^2z^2 - (x-y)^2z^2 + z^4 \\
 &= \{(x+y)(x-y)\}^2 - \{(x+y)^2 + (x-y)^2\}z^2 + z^4 \\
 &= (x^2-y^2)^2 - \{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2\}z^2 + z^4 \\
 &= x^4-2x^2y^2+y^4 - (2x^2+2y^2)z^2 + z^4 \\
 &= x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2
 \end{aligned}$$

2

(1)

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \{(x+y)+2\}\{(x+y)-3\}+4 \\
 &= (x+y)^2 - (x+y) - 2 \\
 &= \{(x+y)+1\}\{(x+y)-2\} \\
 &= (x+y+1)(x+y-2)
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= 12x^2 + (y-31)x - (6y^2+2y-20) \\
 &= 12x^2 + (y-31)x - 2(3y^2+y-10) \\
 &= 12x^2 + (y-31)x - 2(3y-5)(y+2)
 \end{aligned}$$

ここで、 x^2 の係数が 12、 $y-31$ の定数項が -31 、 $-2(3y-5)(y+2)$ の定数項が $-2 \cdot (-5) \cdot 2$ であることに注目して、たすき掛けを試みると、

$$\begin{array}{rcl}
 3 & \nearrow & -2 \cdot 2 \rightarrow -16 \\
 4 & \searrow & -5 \rightarrow -15 \\
 \hline
 & & -31
 \end{array}$$

より、

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= 12x^2 + (y-31)x - 2(3y-5)(y+2) \\
 &= \{3x-2(y+2)\}\{4x+(3y-5)\} \\
 &= (3x-2y-4)(4x+3y-5)
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\
 &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\
 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2) \\
 &= (x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)
 \end{aligned}$$

3

$\frac{30}{7} = 4.2857142\cdots$ より、小数点以下が 285714 となった後、再び 2 が現れるので、

285714 が繰り返される。したがって、2 が現れるのは小数点以下 1, 7, 13, $\cdots$ 位、すなわち 6 で割った余りが 1 となる位である。同様にして、8 が現れるのは 6 で割った余りが 2 となる位、5 が現れるのは 6 で割った余りが 3 となる位、7 が現れるのは 6 で割った余りが 4 となる位、1 が現れるのは 6 で割った余りが 5 となる位、4 が現れるのは 6 で割り切れる位である。

200 を 6 で割った余りは 2 だから、小数第 200 位の数字は 8 である。

4

与式のように、 x, y の値を入れ替えても同じ値になる式を対称式という。

対称式のうちもっとも簡単な対称式を基本対称式といい、対称式は基本対称式だけで表すことができる。与式のように、2 変数 x, y の基本対称式は $x + y$ と xy である。

したがって、与式を $x + y$ と xy だけで表せるよう変形することができる。

ゆえに、与式をそのように変形した式に $x + y$ と xy の値を代入すればよい。

$$\begin{aligned}
 x + y &= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\
 &= \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 xy &= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{(x + y)^2 - 2xy} \\
 &= \frac{4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4}{4^2 - 2 \cdot 1} \\
 &= \frac{26}{7}
 \end{aligned}$$

5

(1)

$x-3=0$ となるのは $x=3$ のとき, $2x-3=0$ となるのは $x=\frac{3}{2}$ のとき

よって,

$x < \frac{3}{2}$ のとき

$$-(x-3)-(2x-3)=9 \text{ より, } x=-1$$

これは $x < \frac{3}{2}$ を満たす。

$\frac{3}{2} \leq x < 3$ のとき

$$-(x-3)+(2x-3)=9 \text{ より, } x=9$$

これは $\frac{3}{2} \leq x < 3$ を満たさないから不適。

$x \geq 3$ のとき

$$(x-3)+(2x-3)=9 \text{ より, } x=5$$

これは $x \geq 3$ を満たす。

以上より, $x = -1, 5$

(2)

$$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \text{ だから, } |x-2| < 4 \text{ を解けばよい。}$$

$$\text{よって, } -4 < x-2 < 4$$

$$\text{ゆえに, } -2 < x < 6$$

6

加える食塩の重さを x [g 重] とする。

5%の食塩水に溶けている食塩の重さは $1530 \times \frac{5}{100}$ [g 重] だから,

これに食塩を加えると, 食塩の重さは $x + 1530 \times \frac{5}{100}$ [g 重] $\cdots \textcircled{1}$ になる。

また, 食塩水の重さは $x + 1530$ [g 重] となり, その濃度が 10%以上 15%以下だから, 溶けている食塩の重さの範囲は

$(x+1530) \times \frac{10}{100}$ [g 重] 以上 $(x+1530) \times \frac{15}{100}$ [g 重] 以下 $\cdots \textcircled{2}$ でなければならない。

したがって, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ より, $(x+1530) \times \frac{10}{100} \leq x + 1530 \times \frac{5}{100} \leq (x+1530) \times \frac{15}{100}$

各辺を 100 倍し、整理すると、 $10x + 1530 \cdot 10 \leq 100x + 1530 \times 5 \leq 15x + 1530 \cdot 15$

すなわち

$$10x + 1530 \cdot 10 \leq 100x + 1530 \times 5 \quad \cdots \textcircled{3} \text{かつ} 100x + 1530 \times 5 \leq 15x + 1530 \cdot 15 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$ を解くと $x \geq 85$ ， $\textcircled{4}$ を解くと $x \leq 180$

よって、 $85 \leq x \leq 180$

ゆえに、加える食塩の重さの範囲は 85 [g 重] 以上 180 [g 重] 以下である。

7

命題が真のとき、 $-2 \leq x \leq 3$ を満たすすべての実数 x は $k - 6 \leq x \leq k$ を満たすから、

$$k - 6 \leq -2 \text{ かつ } 3 \leq k \quad \therefore 3 \leq k \leq 4$$

8

$\sqrt{7}$ が有理数であると仮定すると、

1 以外の公約数をもたない適当な 2 数 p, q を用いて $\sqrt{7} = \frac{q}{p}$ すなわち $p\sqrt{7} = q$ と表せる。

この両辺を 2 乗すると $7p^2 = q^2$ となるから、 q^2 は 7 の倍数である。

よって、 q は 7 の倍数 $\cdots \textcircled{1}$ である。

そこで、 $q = 7k$ とおき、 $7p^2 = q^2$ に代入すると、 $7p^2 = 49k^2$ すなわち $p^2 = 7k^2$

これより、 p^2 は 7 の倍数であり、ゆえに、 p は 7 の倍数 $\cdots \textcircled{2}$ である。

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、 p, q は 7 を公約数にもつ。

これは p, q が 1 以外の公約数をもたないことと矛盾する。

よって、 $\sqrt{7}$ は無理数である。

9

$$\begin{aligned} \sqrt{12 - \sqrt{108}} &= \sqrt{12 - 2\sqrt{27}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9} - \sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2} \\ &= |3 - \sqrt{3}| \\ &= 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$1^2 < 3 < 2^2$ より、 $1 < \sqrt{3} < 2$ だから、 $\sqrt{3} = 1 + \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) とおくと、

$$\begin{aligned} \sqrt{12 - \sqrt{108}} &= 3 - \sqrt{3} \\ &= 3 - (1 + \alpha) \\ &= 2 - \alpha \end{aligned}$$

$1 < 2 - \alpha < 2$ だから、 $\sqrt{12 - \sqrt{108}}$ の整数部分 $a = 1$

あるいは,

$$1^2 < 3 < 2^2 \text{ より, } 1 < \sqrt{3} < 2$$

$$\text{したがって, } -2 < -\sqrt{3} < -1$$

$$\text{よって, } 3 + (-2) < 3 + (-\sqrt{3}) < 3 + (-1) \quad \text{すなわち } 1 < 3 - \sqrt{3} < 2$$

ゆえに, $\sqrt{12 - \sqrt{108}}$ の整数部分 $a = 1$

$\sqrt{12 - \sqrt{108}}$ の整数部分が 1 であることと $\sqrt{12 - \sqrt{108}} = 3 - \sqrt{3}$ より,

$$\sqrt{12 - \sqrt{108}} \text{ の小数部分 } b = (3 - \sqrt{3}) - 1 = 2 - \sqrt{3}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b-1} + \frac{1}{a-b+3} &= \frac{1}{1+(2-\sqrt{3})-1} + \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})+3} \\ &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{4}{4-3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^3 + \frac{1}{b^3} &= b^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 \\ &= \left(b + \frac{1}{b}\right)^3 - 3b \cdot \frac{1}{b} \left(b + \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)^3 - 3 \left(2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right) \\ &= 4^3 - 3 \cdot 4 \\ &= 52 \end{aligned}$$

10

$$7x - 5 > 13 - 2x \text{ を整理すると, } 9x > 18 \quad \therefore x > 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x + a \geq 3x + 5 \text{ を整理すると, } a - 5 \geq 2x \quad \therefore x \leq \frac{a-5}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

したがって、①と②を同時に満たす整数解が 5 個存在するとき、

$$2 < x \leq \frac{a-5}{2} \text{ より, その整数解は } 3, 4, 5, 6, 7 \text{ だから, } 7 \leq \frac{a-5}{2} < 8$$

$$\text{各辺を 2 倍すると, } 14 \leq a - 5 < 16$$

$$\text{よって, } 19 \leq a < 21$$

11

(1)

$a \in A$ ならば $a = 8m + 3n$ (m, n は整数) と表せる。

これと $8m + 3n$ が整数であることから、 $a \in B$

よって、 $A \subset B$

(2)

$8m + 3n = 1$ を満たす整数 m, n が存在するならば $1 \in A$ である。

$$8m + 3n = 1 \text{ より, } n = \frac{1-8m}{3} = -2m + \frac{1-2m}{3}$$

n は整数だから、 $1-2m$ が 3 の倍数となればよく、 $m = -1$ はこれを満たす。

よって、 $8m + 3n = 1$ を満たす整数 m, n が存在する。

ゆえに、 $1 \in A$ である。

(3)

$k \in B$ とする。

(2)より、 $8m + 3n = 1$ を満たす整数 m, n が存在するから、

これを満たす (m, n) の組の 1 つを (p, q) とすると、 $8p + 3q = 1$

$$\text{したがって, } k = k \cdot 1 = k(8p + 3q) = 8kp + 3kq$$

kp, kq は整数だから、 $k \in A$

よって、 $B \subset A$

これと $A \subset B$ より、 $A = B$

12

$$(p + \sqrt{2})(q + 3\sqrt{2}) = pq + 6 + (2p + q)\sqrt{2} \text{ より, } pq + 6 + (3p + q)\sqrt{2} = 8 + 7\sqrt{2}$$

$$\text{よって, } pq - 2 + (3p + q - 7)\sqrt{2} = 0$$

$$\text{ここで, } 3p + q - 7 \neq 0 \text{ とすると, } \sqrt{2} = -\frac{pq - 2}{3p + q - 7}$$

$3p + q - 7, pq - 2$ は有理数だから, 右辺は有理数となり,

$\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する。

よって, $3p + q - 7 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$ であり, これより $pq - 2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

①より, $q = -3p + 7 \quad \dots \textcircled{3}$

これを②に代入して, p について整理すると, $3p^2 - 7p + 2 = 0$

$$\text{これと } 3p^2 - 7p + 2 = (3p - 1)(p - 2) \text{ より, } (3p - 1)(p - 2) = 0 \quad \therefore p = \frac{1}{3}, 2$$

$p = \frac{1}{3}$ のとき

③より, $q = 6$

これは $p < q$ を満たす。

$p = 2$ のとき

③より, $q = 1$

これは $p < q$ を満たさない。

$$\text{よって, } p = \frac{1}{3}, q = 6$$

13

(1)

偽である。反例は $a = 1, b = 2$

(2)

真である。

命題の対偶は「 a または b が 3 の倍数でないならば, $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。」だから, この真偽を調べる。

$a = 3m + p, b = 3n + q$ ($p, q = 0, 1, -1$, ただし $p = q = 0$ を除く) とすると,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 9m^2 + 6mp + p^2 + 9n^2 + 6nq + q^2 \\ &= 3(3m^2 + 3n^2 + 2mp + 2nq) + p^2 + q^2 \end{aligned}$$

これと $p^2 + q^2 = 1, 2$ より, $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。

対偶が真だから, 命題も真である。

補充問題

$\frac{5-a}{4} \leq x \leq \frac{5+a}{4}$ の整数解が 4 個となるような a の値の範囲を求めよ。

解

ポイント：対称性に注目

$\frac{5-a}{4}$ と $\frac{5+a}{4}$ の数直線上の中点は $\frac{5}{4}$ だから、

4 個の整数解は、 $\frac{5}{4}$ に近い順に、1, 2, 0, 3 となる。

よって、

$$1 < \frac{5-a}{4} \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a < 9 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$3 \leq \frac{5+a}{4} < 4 \quad \therefore 7 \leq a < 11 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①かつ②より、 $7 \leq a < 9$