2 次関数 2　2 次関数のグラフ

放物線 $y=ax^2$ を x 軸方向に p， y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式の求め方

求め方 1

$y=ax^2$ の頂点 $(0,\ 0)$ が $(p,\ q)$ に，軸 $x=0$ が $x=p$ に移動するから，

$y=a(x-p)^2+q$

求め方 2

$y=ax^2$ 上の任意の点を $(X,\ Y)$，

$(X,\ Y)$ を x 軸方向に p， y 軸方向に q だけ平行移動した点を $(X',\ Y')$ とすると，

$(X',\ Y')=(X+p,\ Y+q)$　 $\therefore (X,\ Y)=(X'-p,\ Y'-q)$　・・・①

$(X,\ Y)$ は $y=ax^2$ 上の点だから， $Y=aX^2$　・・・②

①を②に代入すると， $Y'-q=a(X'-p)^2$　 $\therefore Y'=a(X'-p)^2+q$

$(X',\ Y')$ を $(x,\ y)$ に書き直すことにより， $y=a(x-p)^2+q$

130

(1)

$y=-3x^2$ の頂点 $(0,\ 0)$ が $(1,\ 2)$，軸 $x=0$ が $x=1$ に移動するから，

$y=-3(x-1)^2+2$ すなわち $y=-3x^2+6x-1$

(2)

$y=-3x^2$ の頂点 $(0,\ 0)$ が $(-2,\ 3)$，軸 $x=0$ が $x=-2$ に移動するから，

$y=-3(x+2)^2+3$ すなわち $y=-3x^2-12x-9$

131

$y=x^2-4x+4$

$\quad =(x-2)^2$

より，その頂点は $(2,\ 0)$

$y=x^2+2x-1$

$\quad =(x+1)^2-2$

より，その頂点は $(-1,\ 2)$

よって， $y=x^2+2x-1$ が $y=x^2-4x+4$ に平行移動するとき，

頂点は x 軸方向に $-1-2=-3$， y 軸方向に $-2-0=-2$ だけ移動する。

ゆえに， $y=x^2+2x-1$ を x 軸方向に -3， y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，

$y=x^2-4x+4$ に重なる。

132

(1)

頂点$(0,\ 0)$，軸$x=0$がそれぞれ$(0+1,\ 0+(-2))=(1,\ -2)$，$x=0+1=1$に移動するから，

$y=-(x-1)^2-2$すなわち$y=-x^2+2x-3$

(2)

$$
\begin{aligned}
y&=2x^2+4x\\
&=2(x^2+2x)\\
&=2(x+1)^2-2
\end{aligned}
$$

より，頂点$(-1,\ -2)$，軸$x=-1$がそれぞれ$(-1+1,\ -2+(-2))=(0,\ -4)$，$x=-1+1=0$

に移動するから，$y=2x^2-4$

(3)

$$
\begin{aligned}
y&=3x^2+x-4\\
&=3\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)-4\\
&=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{12}-4\\
&=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{49}{12}
\end{aligned}
$$

より，頂点$\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{49}{12}\right)$，軸$x=-\frac{1}{6}$がそれぞれ$\left(-\frac{1}{6}+1,\ -\frac{49}{12}+(-2)\right)=\left(\frac{5}{6},\ -\frac{73}{12}\right)$，

$x=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$に移動するから，$y=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{73}{12}$すなわち$y=3x^2-5x-4$

133

$$
\begin{aligned}
y&=x^2-4x+3\\
&=(x-2)^2-1
\end{aligned}
$$

より，$y=x^2-4x+3$の頂点は$(2,\ -1)$，軸は$x=2$である。

(1)

y軸方向にqだけ平行移動したとすると，頂点は$(2+0,\ -1+q)=(2,\ -1+q)$になるから，

放物線の方程式は$y=(x-2)^2-1+q$

これが原点$(0,\ 0)$を通るから，$0=(0-2)^2-1+q$　$\therefore q=-3$

ゆえに，$y=(x-2)^2-4$すなわち$y=x^2-4x$

(2)

x軸方向にpだけ平行移動したとすると，頂点は$(2+p,\ -1+0)=(2+p,\ -1)$になるから，

放物線の方程式は$y=\{x-(2+p)\}^2-1$

これが原点$(0,\ 0)$を通るから，$0=(2+p)^2-1$　$\therefore p=-3,\ -1$

ゆえに，$y=(x+1)^2-1$すなわち$y=x^2+2x$または$y=(x-1)^2-1$すなわち$y=x^2-2x$

134

$y=f(x)$ を x 軸に関して対称移動した式の求め方

$y=f(x)$ 上の任意の点を $(X,\ Y)$,

$(X,\ Y)$ を x 軸に関して対称移動した点を $(X',\ Y')$ とすると,

$(X',\ Y')=(X,\ -Y)\quad \therefore (X,\ Y)=(X',\ -Y')$ ・・・①

$(X,\ Y)$ は $y=f(x)$ 上の点だから, $Y=f(X)$ ・・・②

①を②に代入すると, $-Y'=f(X')$

$(X',\ Y')$ を $(x,\ y)$ に書き直すことにより, $-y=f(x)$

$y=f(x)$ を y 軸に関して対称移動した式の求め方

$y=f(x)$ 上の任意の点を $(X,\ Y)$,

$(X,\ Y)$ を y 軸に関して対称移動した点を $(X',\ Y')$ とすると,

$(X',\ Y')=(-X,\ Y)\quad \therefore (X,\ Y)=(-X',\ Y')$ ・・・③

$(X,\ Y)$ は $y=f(x)$ 上の点だから, $Y=f(X)$ ・・・④

③を④に代入すると, $Y'=f(-X')$

$(X',\ Y')$ を $(x,\ y)$ に書き直すことにより, $y=f(-x)$

$y=f(x)$ を原点に関して対称移動した式の求め方

$y=f(x)$ 上の任意の点を $(X,\ Y)$,

$(X,\ Y)$ を原点に関して対称移動した点を $(X',\ Y')$ とすると,

$(X',\ Y')=(-X,\ -Y)\quad \therefore (X,\ Y)=(-X',\ -Y')$ ・・・⑤

$(X,\ Y)$ は $y=f(x)$ 上の点だから, $Y=f(X)$ ・・・⑥

⑤を⑥に代入すると, $-Y'=f(-X')$

$(X',\ Y')$ を $(x,\ y)$ に書き直すことにより, $-y=f(-x)$

***x* 軸に関して対称移動して得られる方程式**

(1) $-y=-x+1$ より, $y=x-1$ **(2)** $-y=2x-5$ より, $y=-2x+5$

(3) $-y=\frac{1}{2}x-3$ より, $y=-\frac{1}{2}x+3$ **(4)** $-y=x^2-1$ より, $y=-x^2+1$

(5) $-y=-2x^2+x$ より, $y=2x^2-x$ **(6)** $-y=x^2-x-6$ より, $y=-x^2+x+6$

***y* 軸に関して対称移動して得られる方程式**

(1) $y=-(-x)+1$ より, $y=x+1$ **(2)** $y=2(-x)-5$ より, $y=-2x-5$

(3) $y=\frac{1}{2}(-x)-3$ より, $y=-\frac{1}{2}x-3$ **(4)** $y=(-x)^2-1$ より, $y=x^2-1$

(5) $y=-2(-x)^2+(-x)$ より, $y=-2x^2-x$ **(6)** $y=(-x)^2-(-x)-6$ より, $y=x^2+x-6$

原点に関して対称移動して得られる方程式

(1) $-y=-(-x)+1$ より, $y=-x-1$ **(2)** $-y=2(-x)-5$ より, $y=2x+5$

(3) $-y=\frac{1}{2}(-x)-3$ より, $y=\frac{1}{2}x+3$ **(4)** $-y=(-x)^2-1$ より, $y=-x^2+1$

(5) $-y=-2(-x)^2+(-x)$ より，$y=2x^2+x$ **(6)** $-y=(-x)^2-(-x)-6$ より，$y=-x^2-x+6$

135

逆にたどると，つまり，直線 $y=-x+1$ を x 軸方向に 2， y 軸方向に -3 だけ移す平行移動すると，もとの直線にもどる。

$y=-x+1$ 上の任意の点を $(X,\ Y)$，

$(X,\ Y)$ を x 軸方向に 2， y 軸方向に -3 移動した点を $(X',\ Y')$ とすると，

$(X',\ Y')=(X+2,\ Y-3)$ $\therefore (X,\ Y)=(X'-2,\ Y'+3)$ ・・・①

$(X,\ Y)$ は $y=-x+1$ 上の点だから， $Y=-X+1$ ・・・②

①を②に代入すると， $Y'+3=-(X'-2)+1$ $\therefore Y'=-X'$

よって，もとの直線の方程式は，$(X',\ Y')$ を $(x,\ y)$ に書き直すことにより， $y=-x$

136

逆にたどると，つまり， $y=x^2-2x+2$ を x 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1， y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，もとの放物線に戻る。

$y=x^2-2x+2$ 上の任意の点を $(X,\ Y)$， $(X,\ Y)$ を x 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1， y 軸方向に 3 だけ平行移動した点を $(X',\ Y')$ とすると，

$(X,\ Y)\xrightarrow{x\text{軸に関して対称移動}}(X,\ -Y)\xrightarrow{x\text{軸方向に1、}y\text{軸方向に3}}(X+1,\ -Y+3)=(X',\ Y')$ より，

$(X,\ Y)=(X'-1,\ -Y'+3)$ ・・・①

$(X,\ Y)$ は $y=x^2-2x+2$ 上の点だから， $Y=X^2-2X+2$ ・・・②

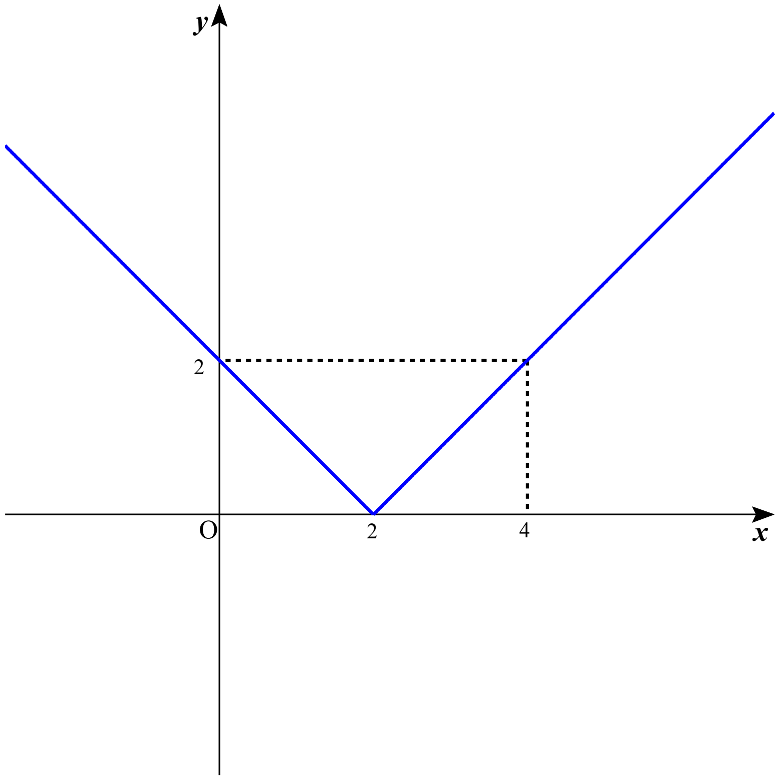
①を②に代入すると， $-Y'+3=(X'-1)^2-2(X'-1)+2$ $\therefore Y'=-X'^2+4X'-2$

よって，もとの放物線の方程式は，$(X',\ Y')$ を $(x,\ y)$ に書き直すことにより，

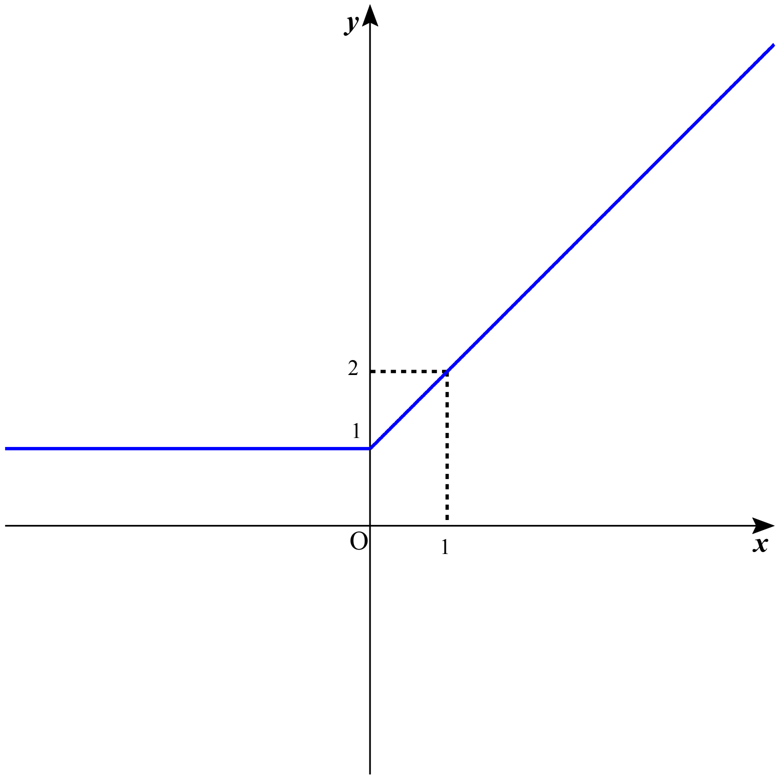
$y=-x^2+4x-2$

137

(1)



(2)



(3)

$$y=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ x & (0\leq x<1) \\ -(x-1)^2+1 & (1\leq x) \end{cases}$$

より，