2 次関数 3　2 次関数の最大と最小

グラフを描くとわかりやすい。

142

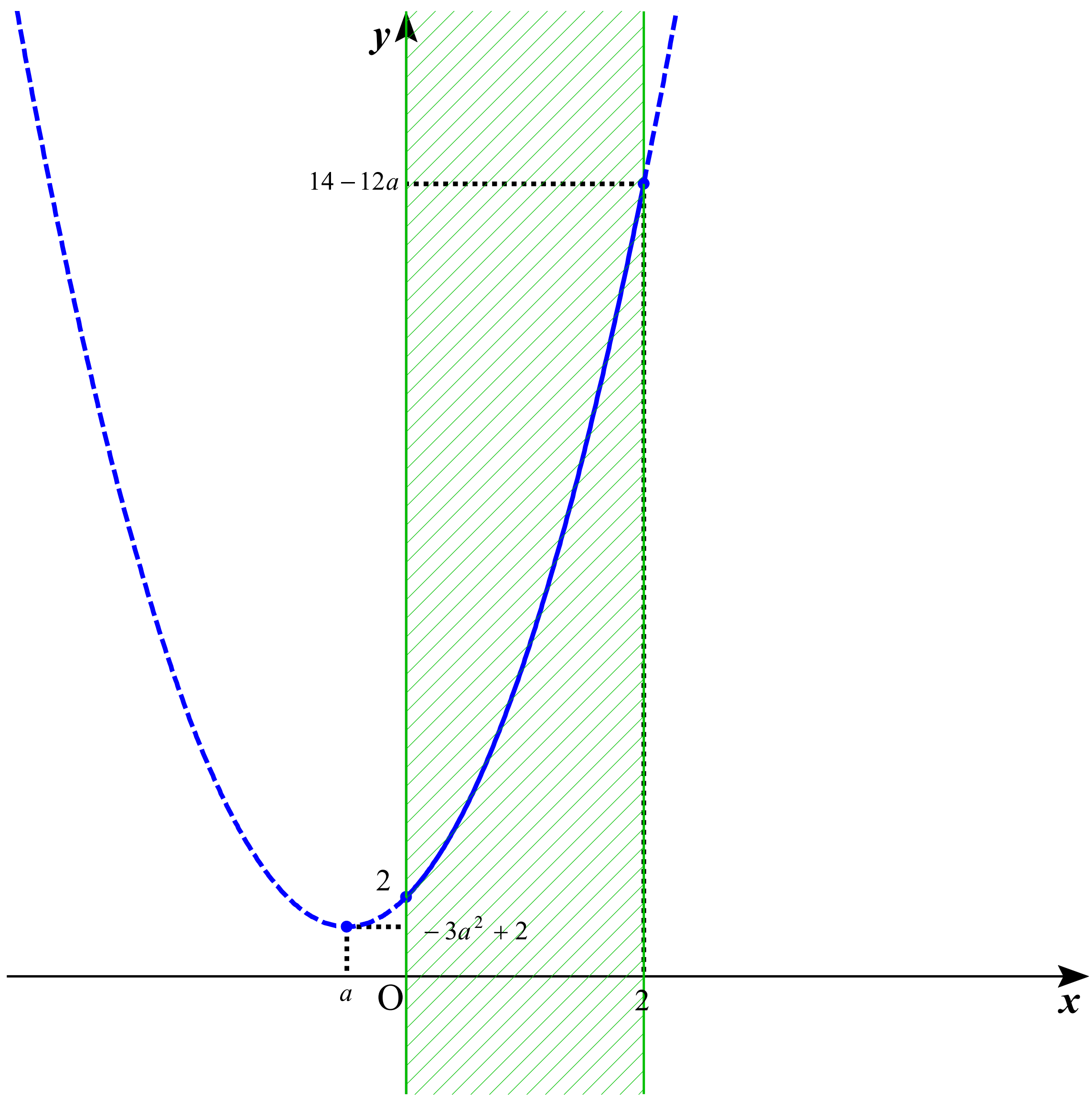
$y=3(x^2-2ax)+2$
$=3\{(x-a)^2-a^2\}+2$
$=3(x-a)^2-3a^2+2$

より，$y=3x^2-6ax+2$ の軸は $x=a$，頂点は $(a,\ -3a^2+2)$ である。

(1)

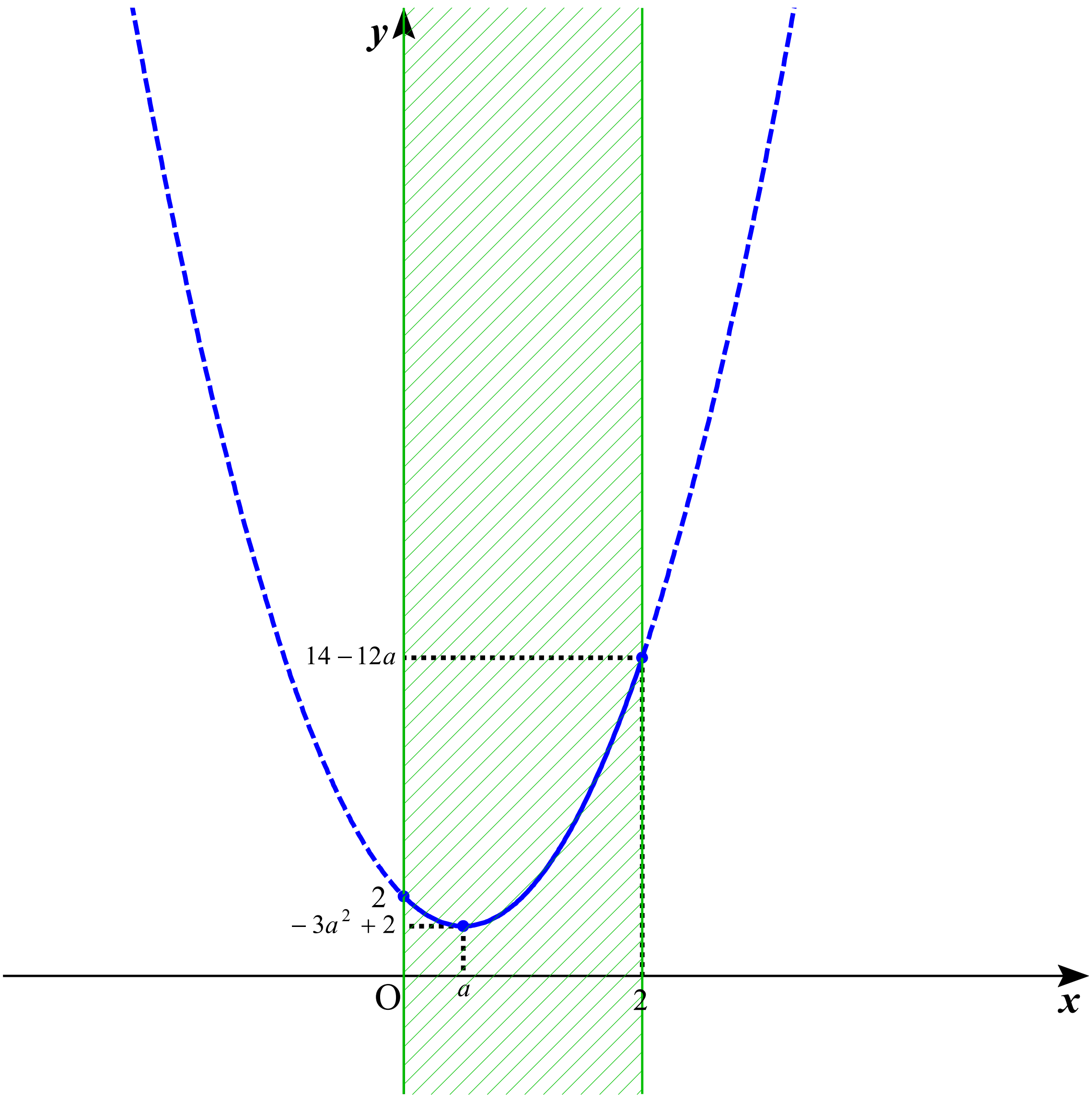
[1]　$a<0$ のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x=0$ で最小値 2 をとる。



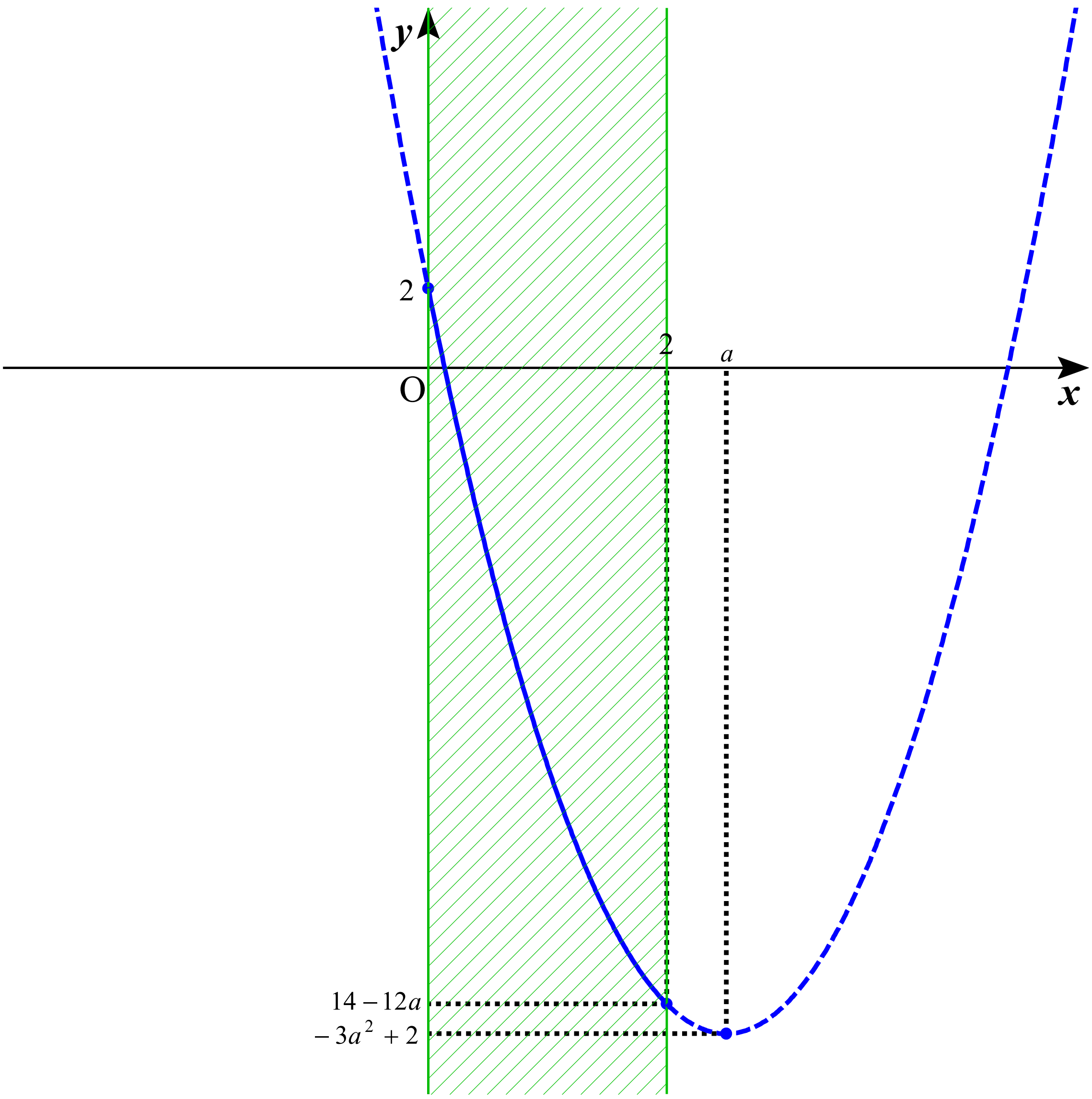
[2]　$0 \leq a \leq 2$ のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x = a$ で最小値 $-3a^2 + 2$ をとる。



[3]　$2 < a$ のとき

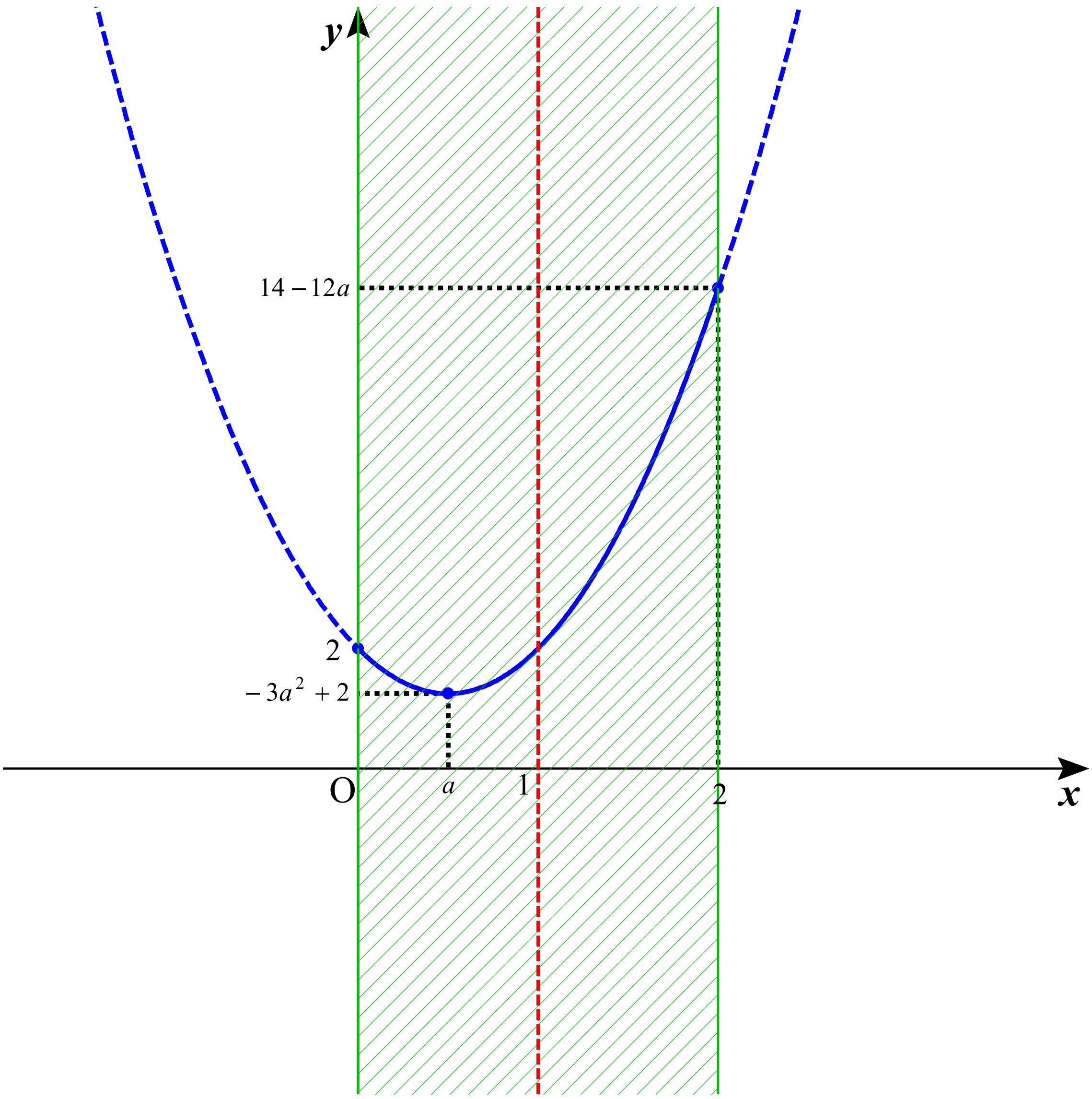
条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x = 2$ で最小値 $14 - 12a$ をとる。



(2)

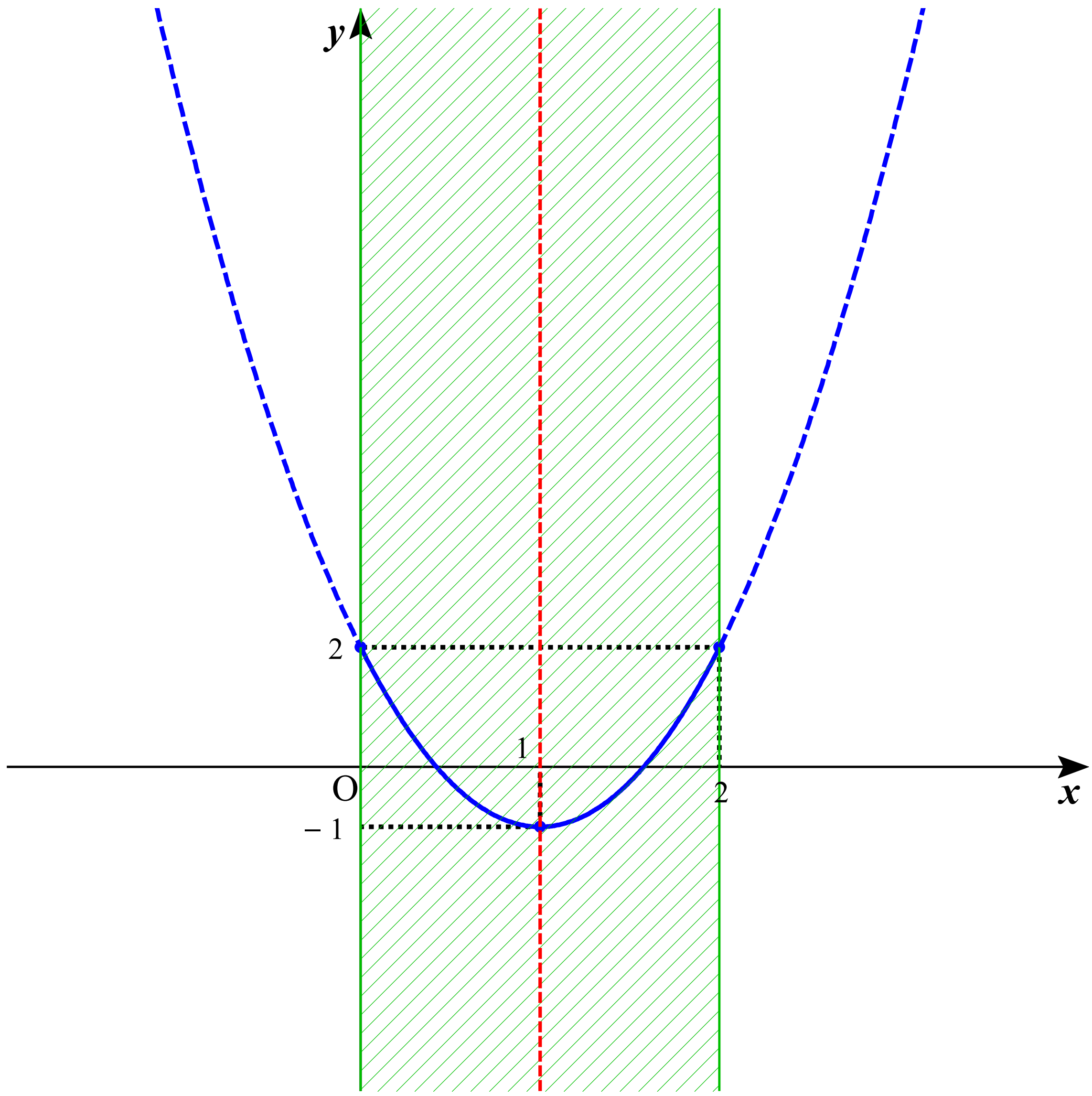
[1]　$a<1$ のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから， $x=2$ で最大値 $14-12a$ をとる。



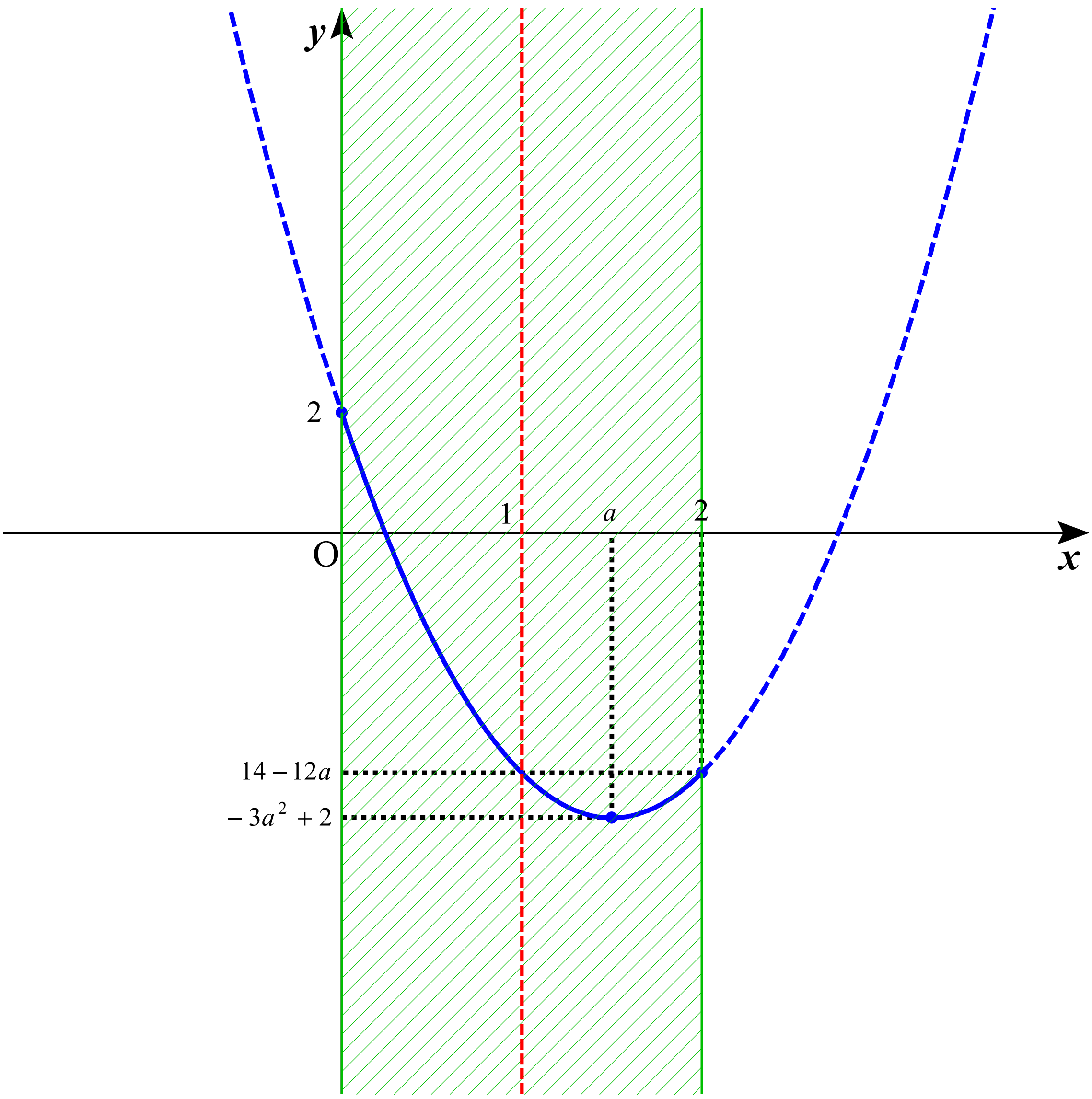
[2]　$a=1$ のとき

$y=3(x-1)^2-1$（$0 \leq x \leq 2$）（下図青色実線）より，$x=0,\ 2$ で最大値 2 をとる。



[3]　$1 < a$ のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x=0$ で最大値 2 をとる。



143

グラフが上に凸の場合は例題 16 と逆の対応になる。

つまり，最大値については軸が定義域の左外，定義域内，定義域の右外で場合分け，

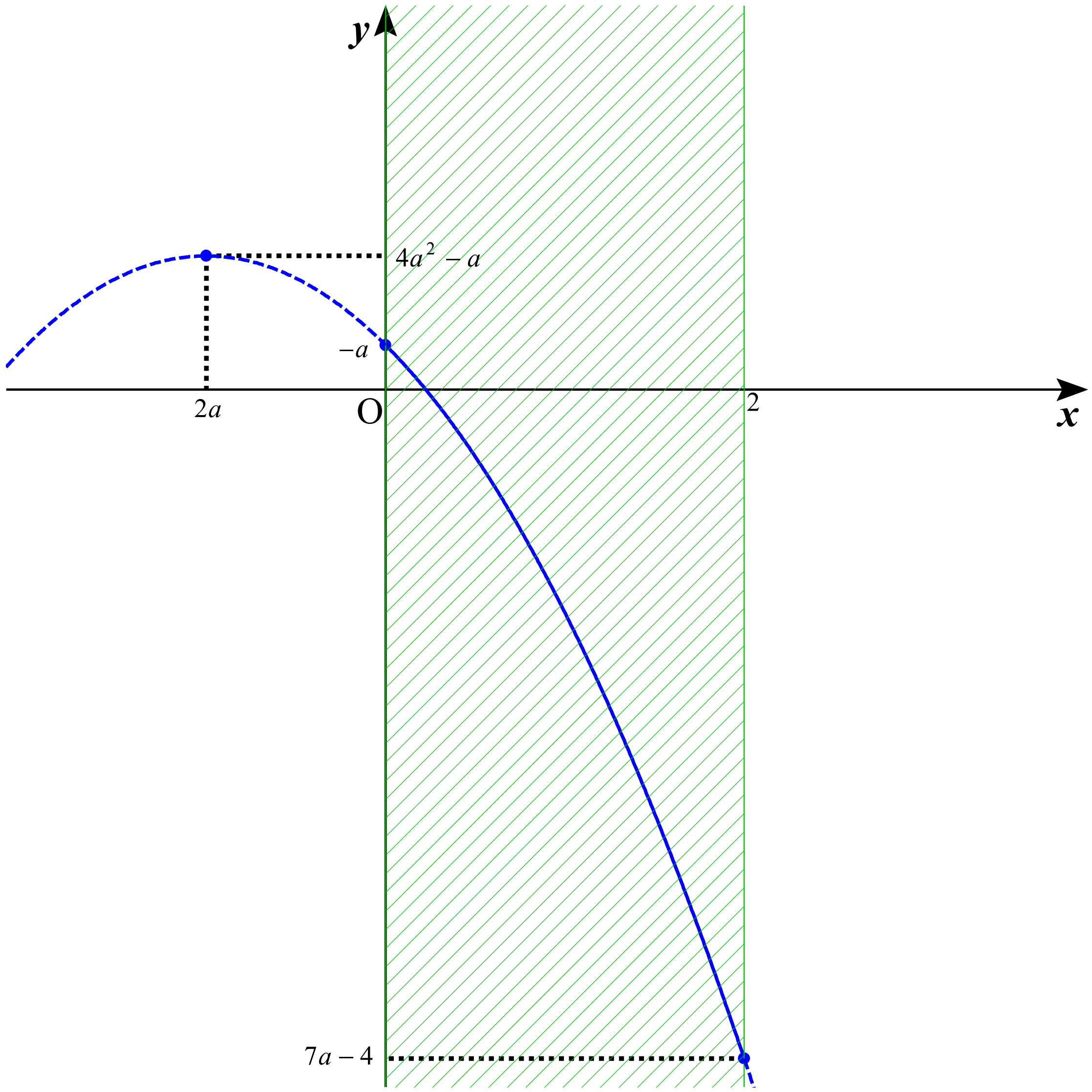
最小値については軸が定義域の中央より左，定義域の中央，定義域の中央より右で場合分け

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4ax - a \\ &= -(x^2 - 4ax) - a \\ &= -\{(x-2a)^2 - 4a^2\} - a \\ &= -(x-2a)^2 + 4a^2 - a \end{aligned}$$

(1)

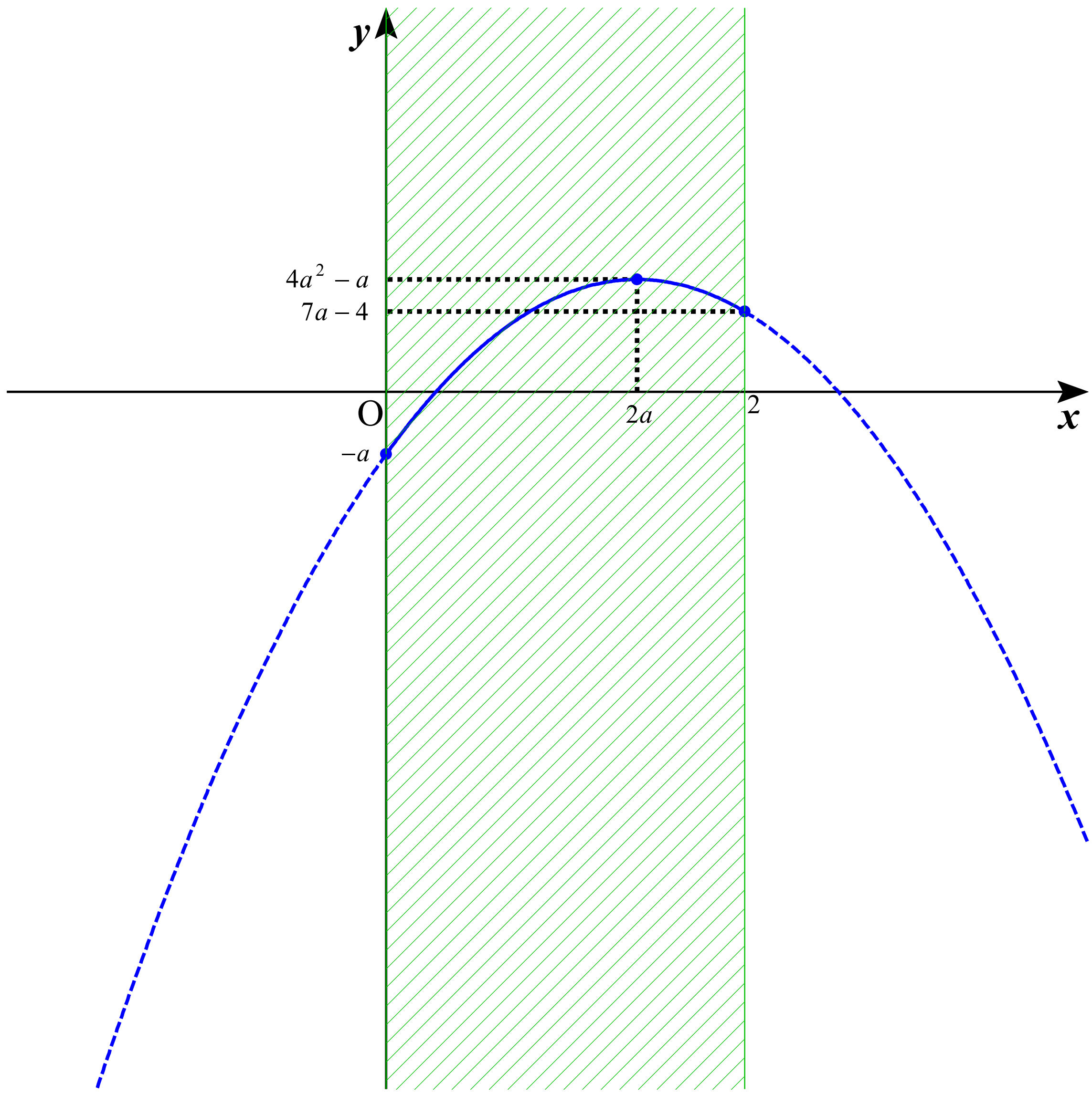
[1] $2a < 0$，すなわち $a < 0$ のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x = 0$ で最大値 $-a$ をとる。



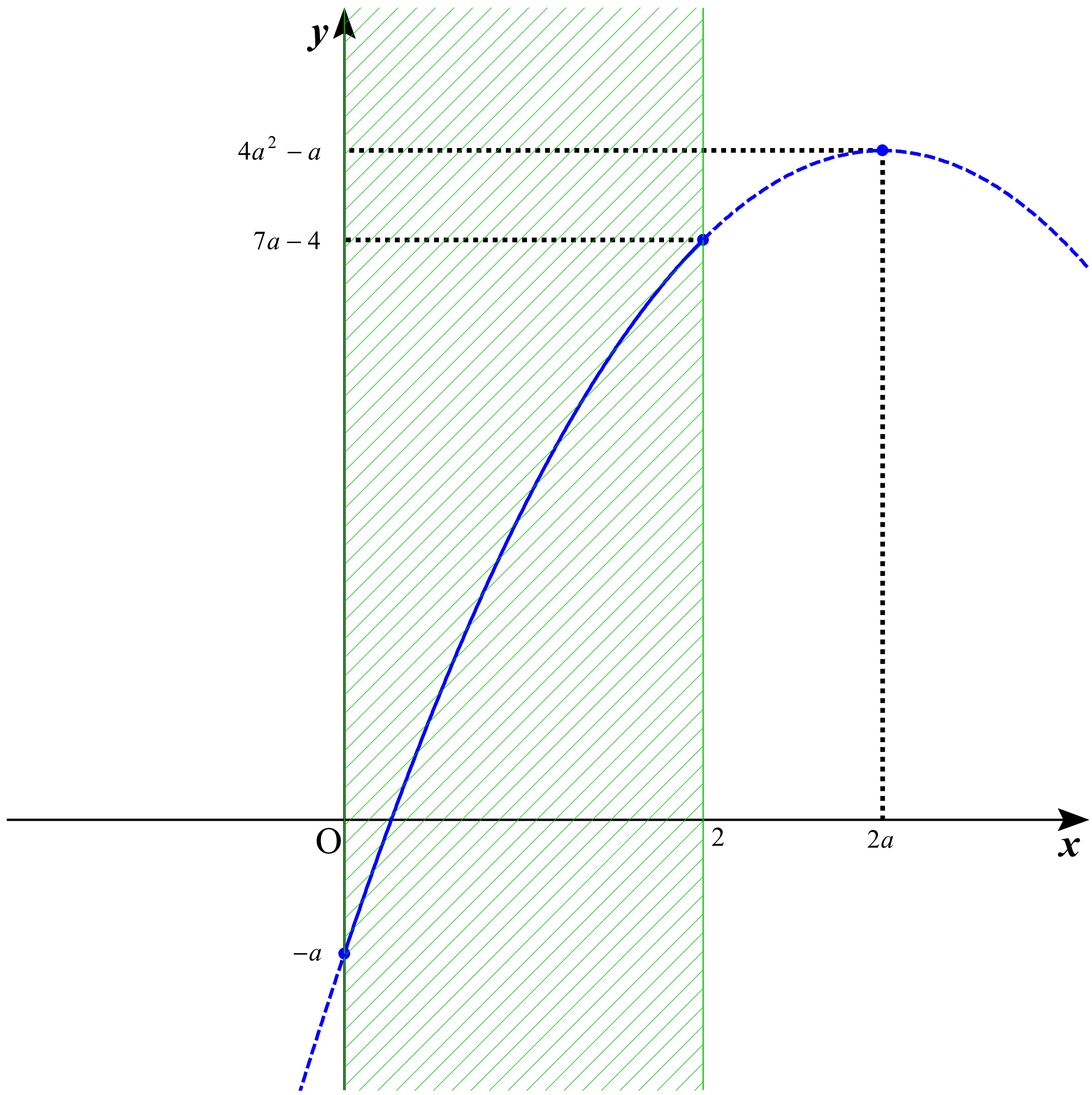
[2]　$0 \leq 2a \leq 2$，すなわち$0 \leq a \leq 1$のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x = 2a$で最大値$4a^2 - a$をとる。



[3]　$2<2a$，すなわち$1<a$のとき

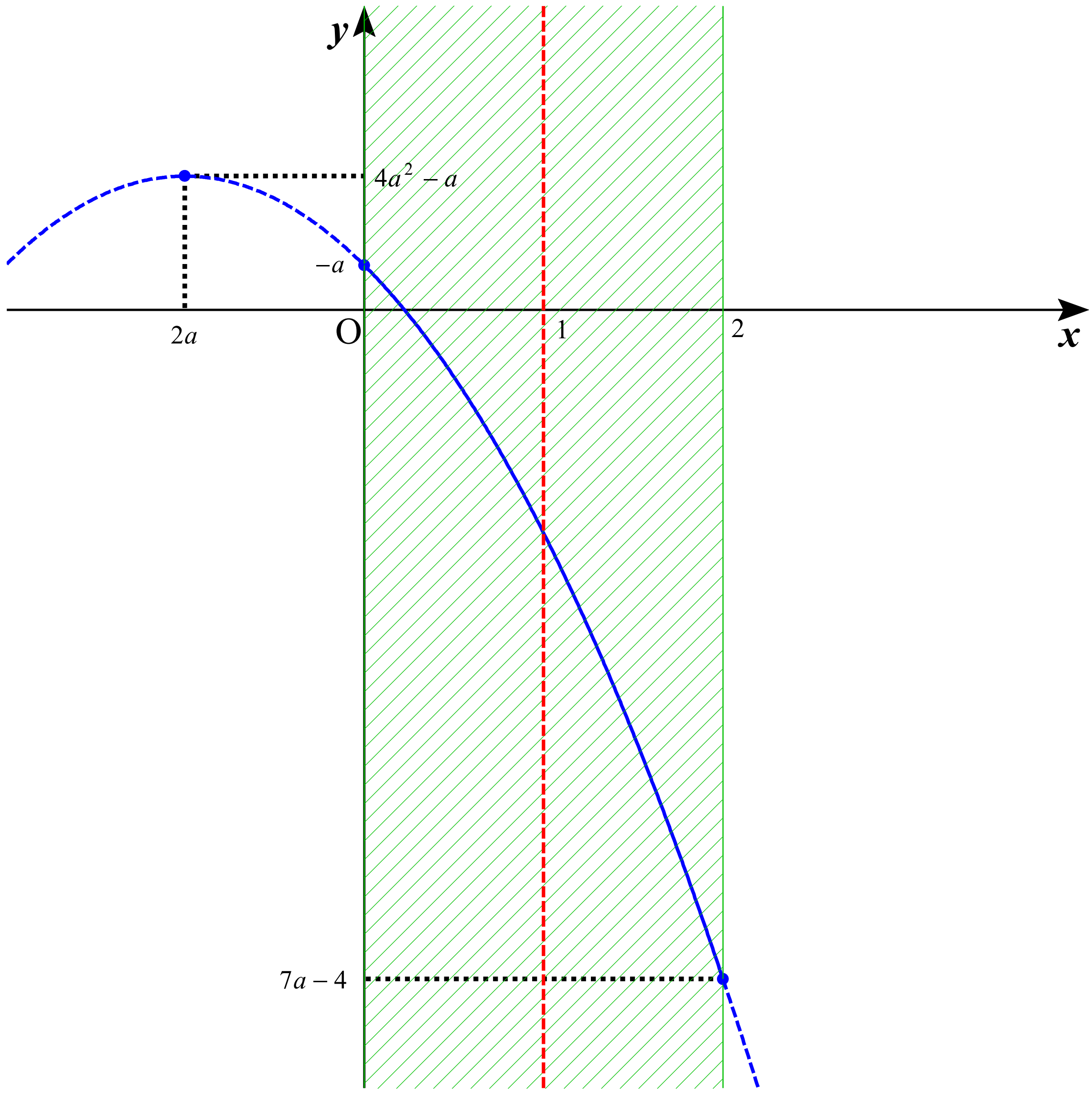
条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x=2$で最大値$7a-4$をとる。



(2)

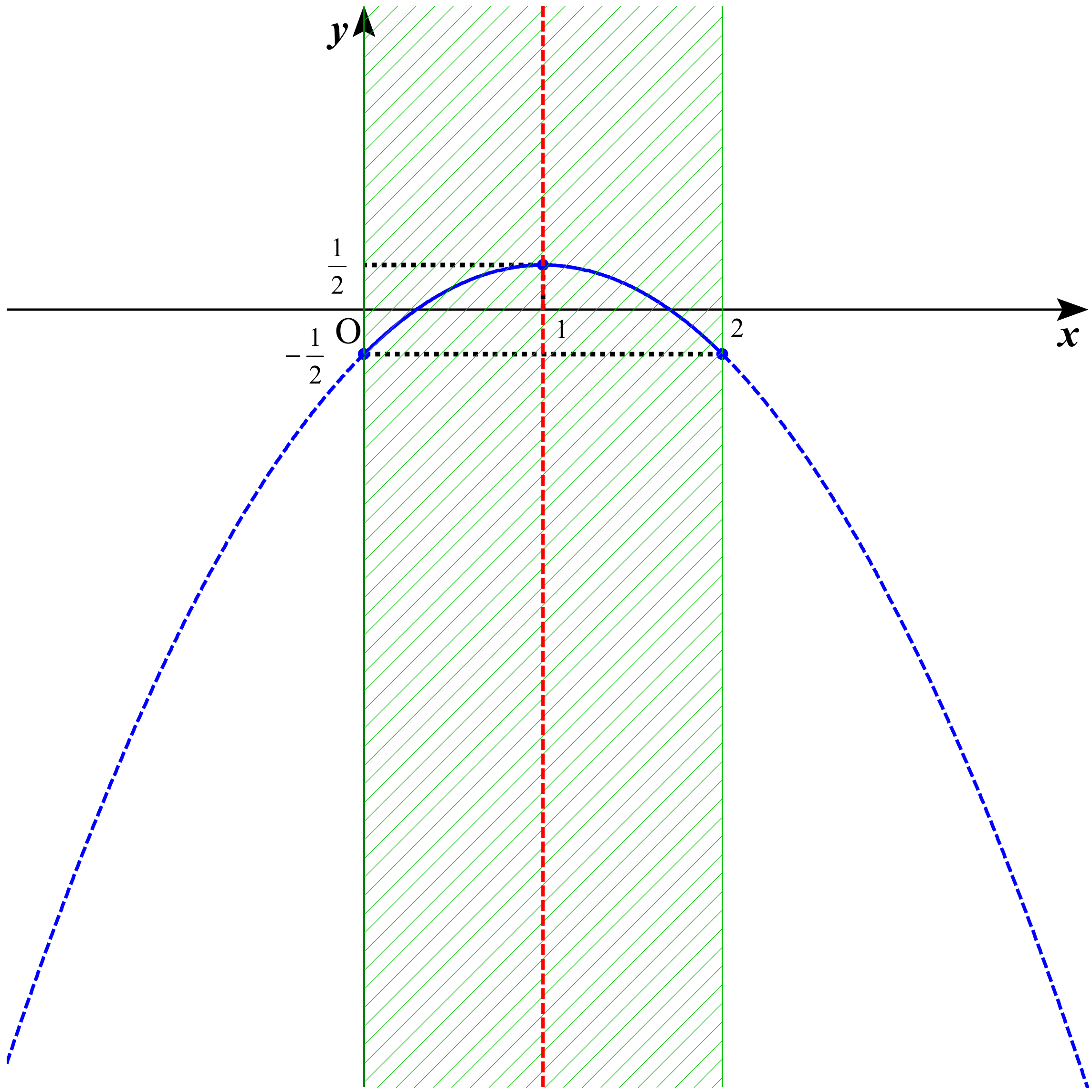
[1]　$2a<1$，すなわち$a<\frac{1}{2}$のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x=2$ で最小値$7a-4$をとる。



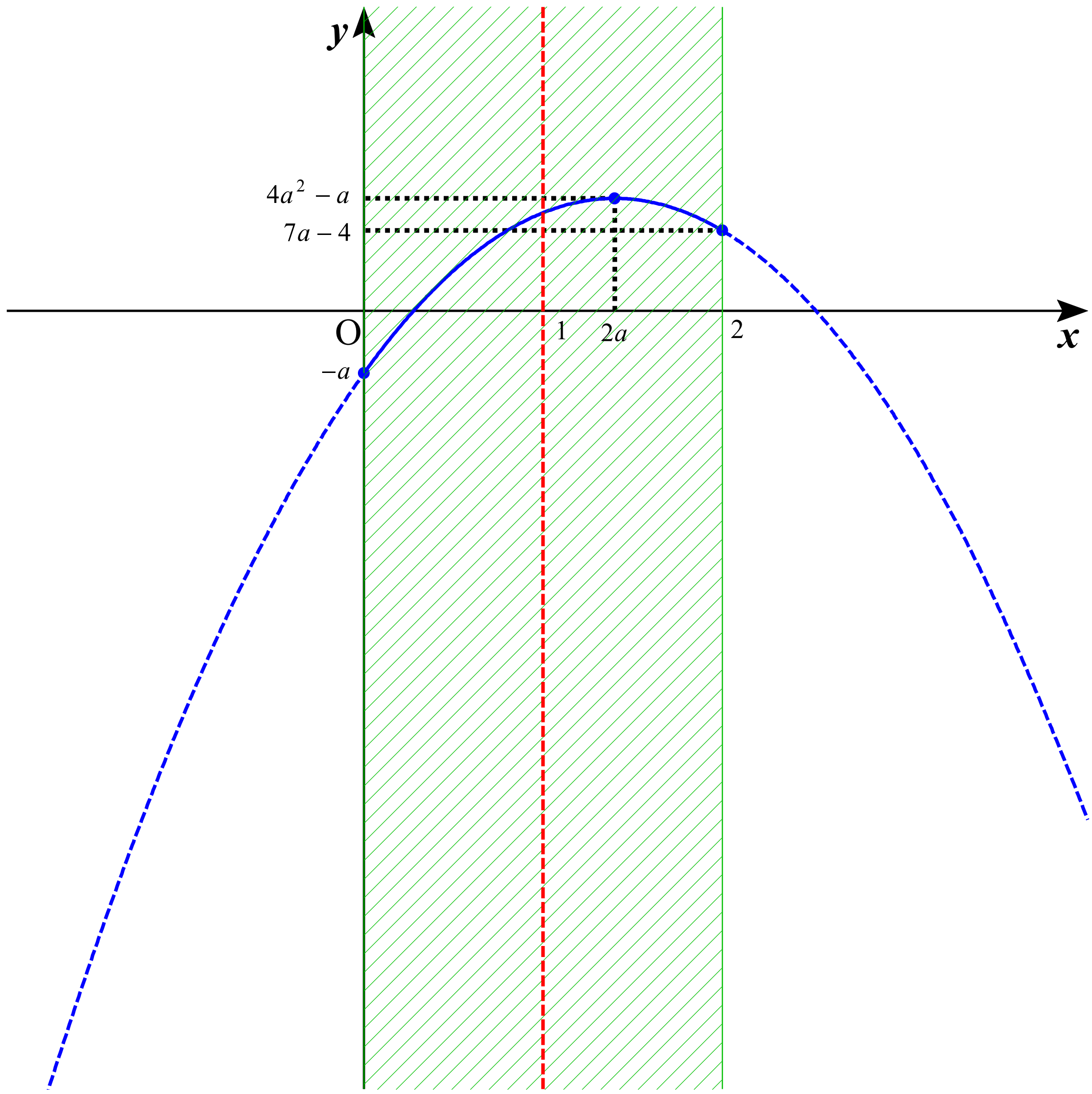
[2]　$2a=1$，すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき

$y=-(x-1)^2+\frac{1}{2}$（$0\leq x\leq 2$）（グラフ青色実線部）より，$x=0,\ 2$ で最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる。



[3]　$1<2a$，すなわち$\frac{1}{2}<a$のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x=0$ で最小値$-a$をとる。



144

$y=-x^2+2ax$

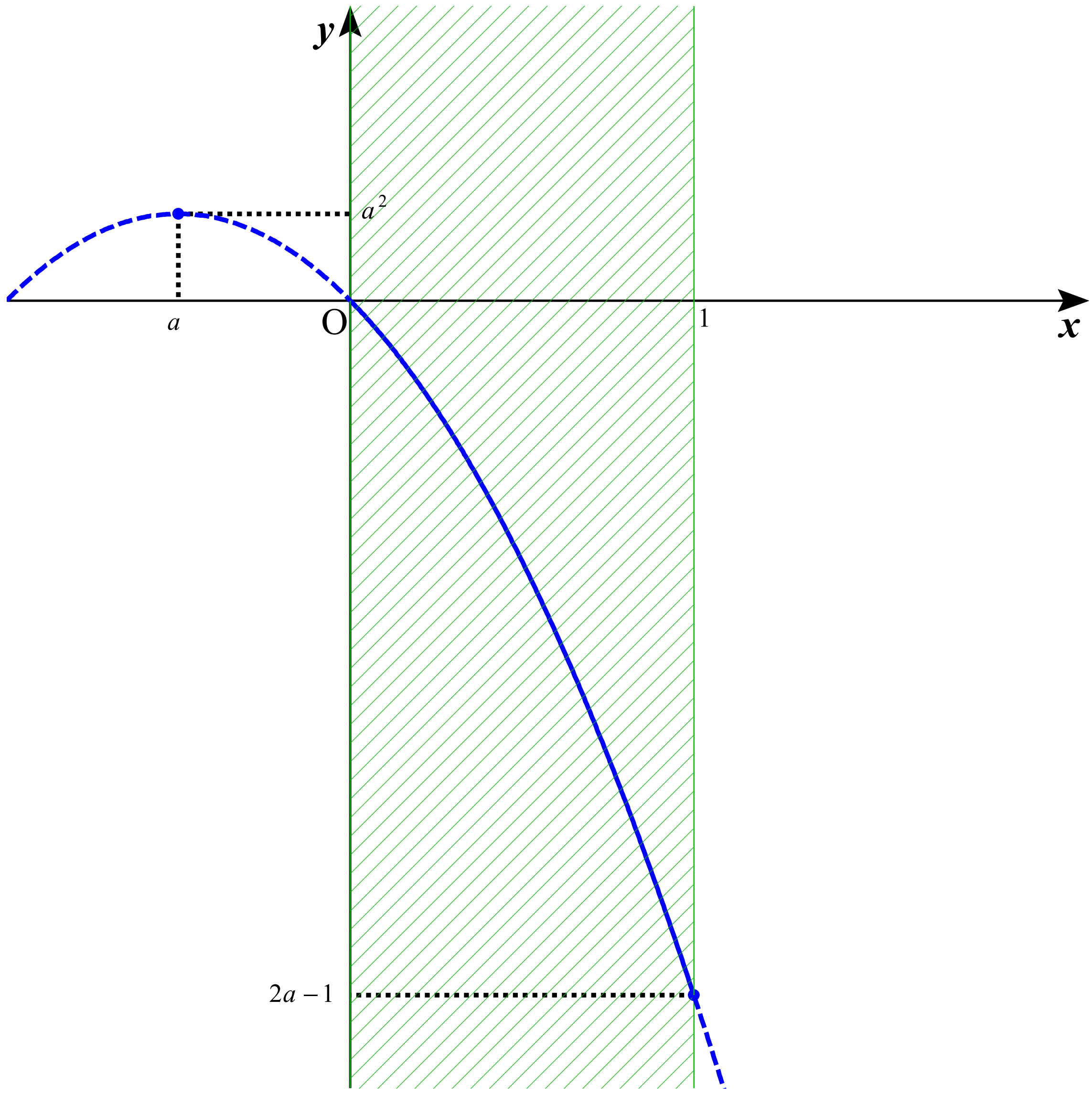
$=-(x-a)^2+a^2$

(1)

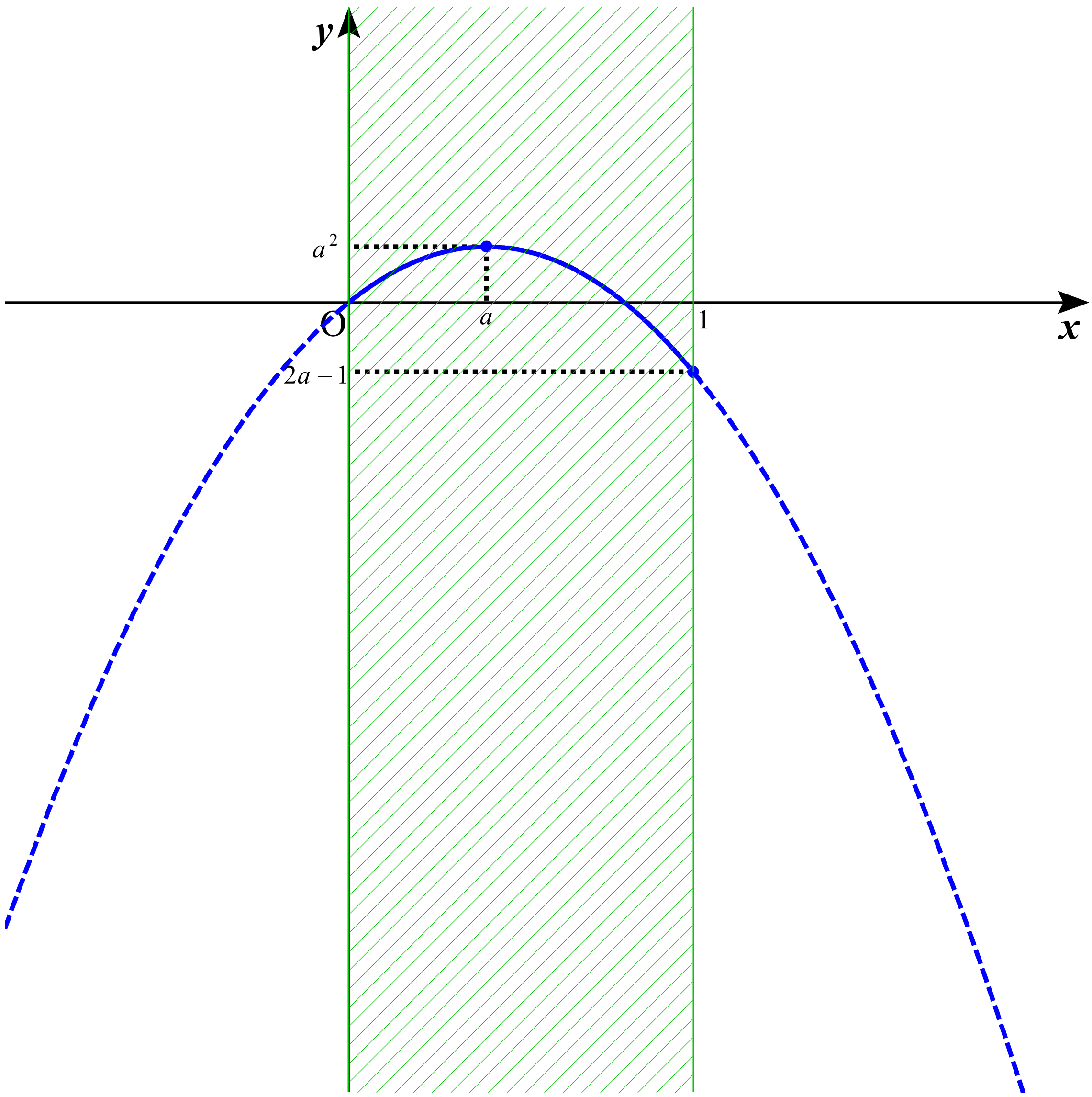
$a<0$ のとき

条件を満たすグラフは下図青色実線だから， $x=0$ で最大値 0 をとる。

よって， $M(a)=0$



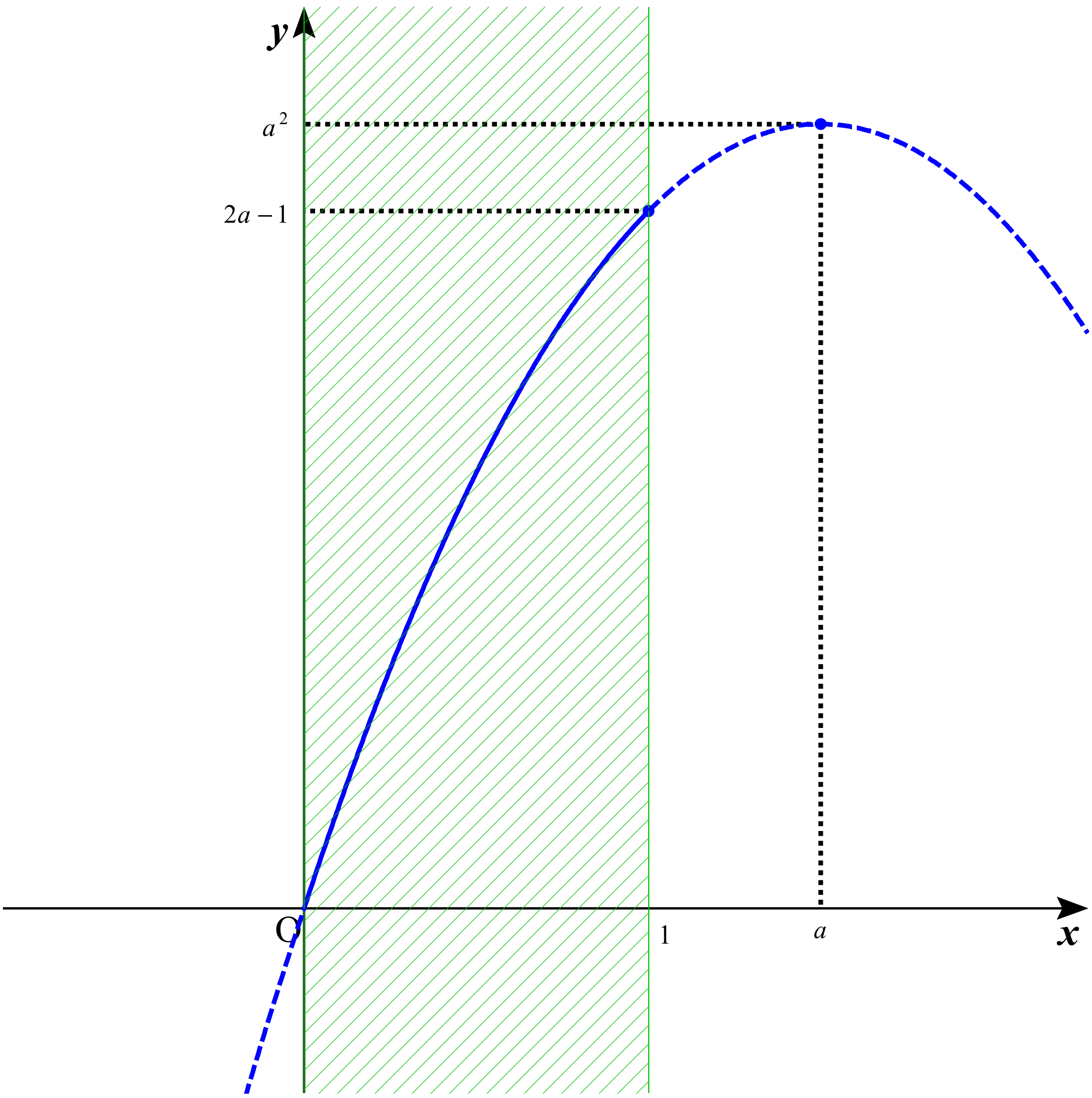
$0 \leq a \leq 1$ のとき
条件を満たすグラフは下図青色実線だから， $x = a$ で最大値 a^2 をとる。
よって， $M(a) = a^2$



$1<a$ のとき

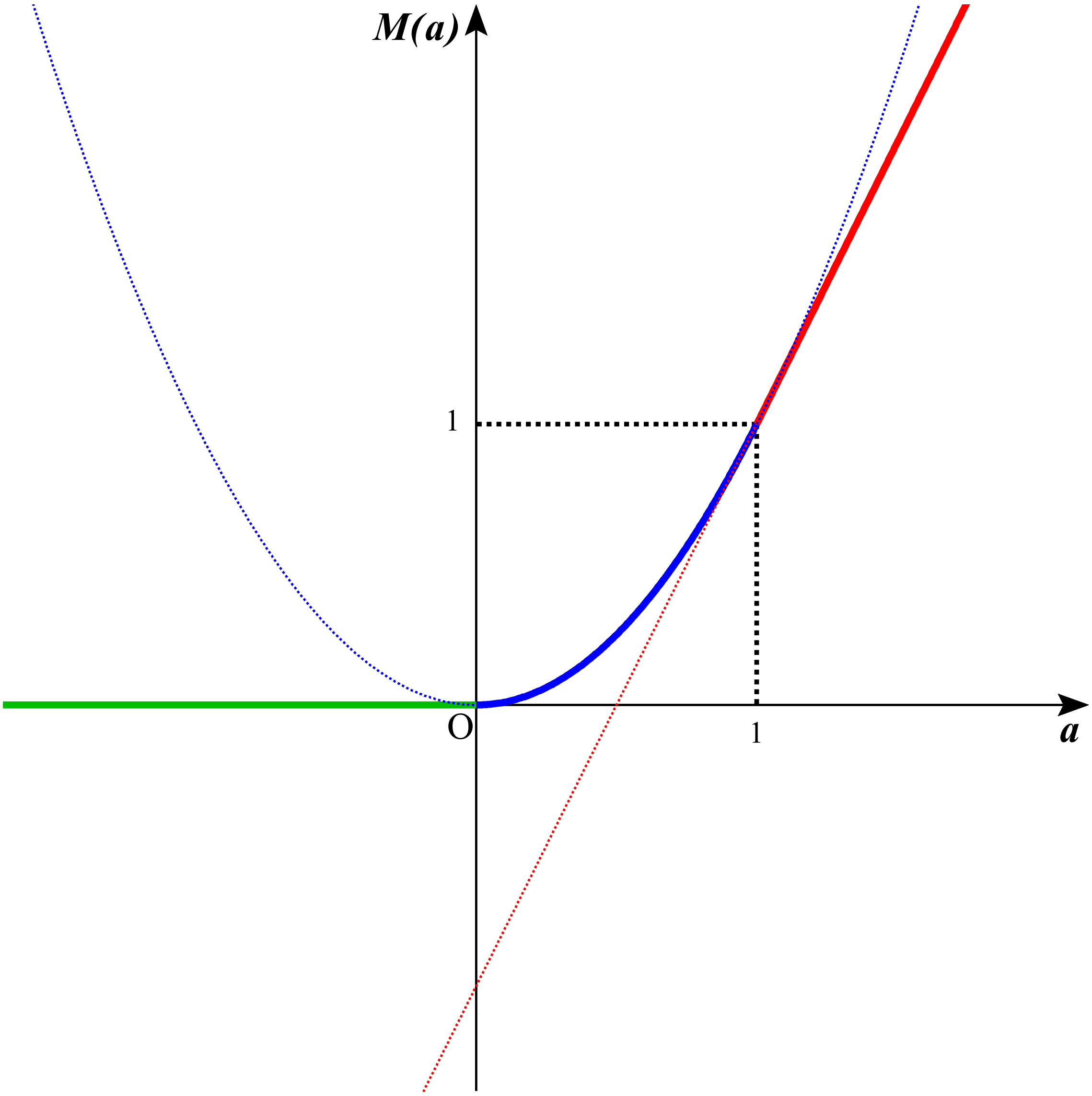
条件を満たすグラフは下図青色実線だから，$x=1$ で最大値 $2a-1$ をとる。

よって，$M(a)=2a-1$



(2)

実線が $M(a)$ のグラフである。



145

$y=-x^2+2ax+3a$

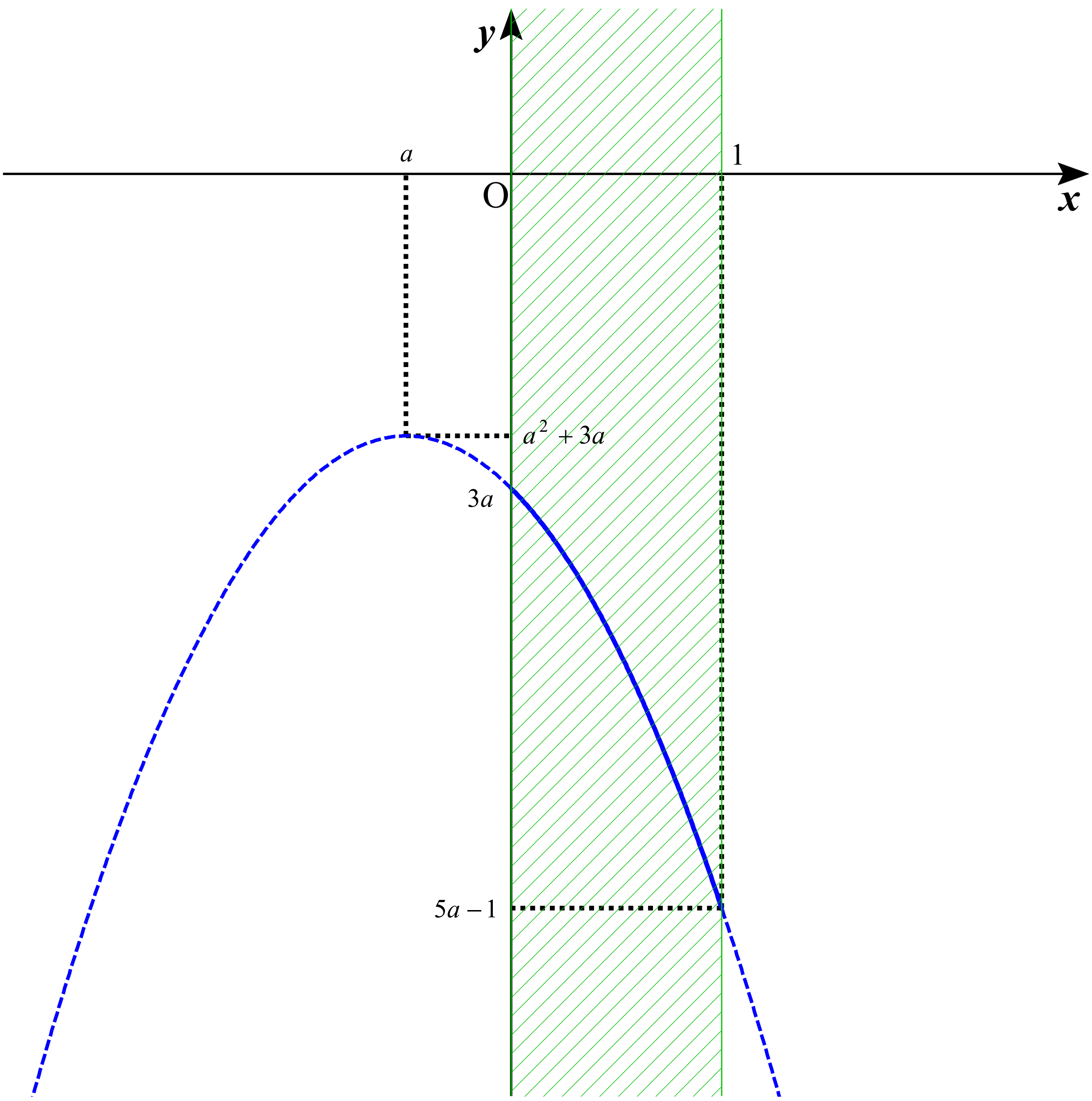
$\quad =-(x-a)^2+a^2+3a$

$a<0$ より，下図青色実線が与えられた関数のグラフである。

よって，この関数は $x=1$ で最小値 $5a-1$ をとる。

したがって，最小値が -11 ならば，$5a-1=-11$ より，$a=-2$

これは $a<0$ を満たす。ゆえに，$a=-2$



146

ポイント

下に凸のグラフの最小値だから，

軸が定義域の左外，定義域内，定義域の右外で場合分け

解

$y = x^2 - 2ax - a$

$= (x-a)^2 - a^2 - a$

より，

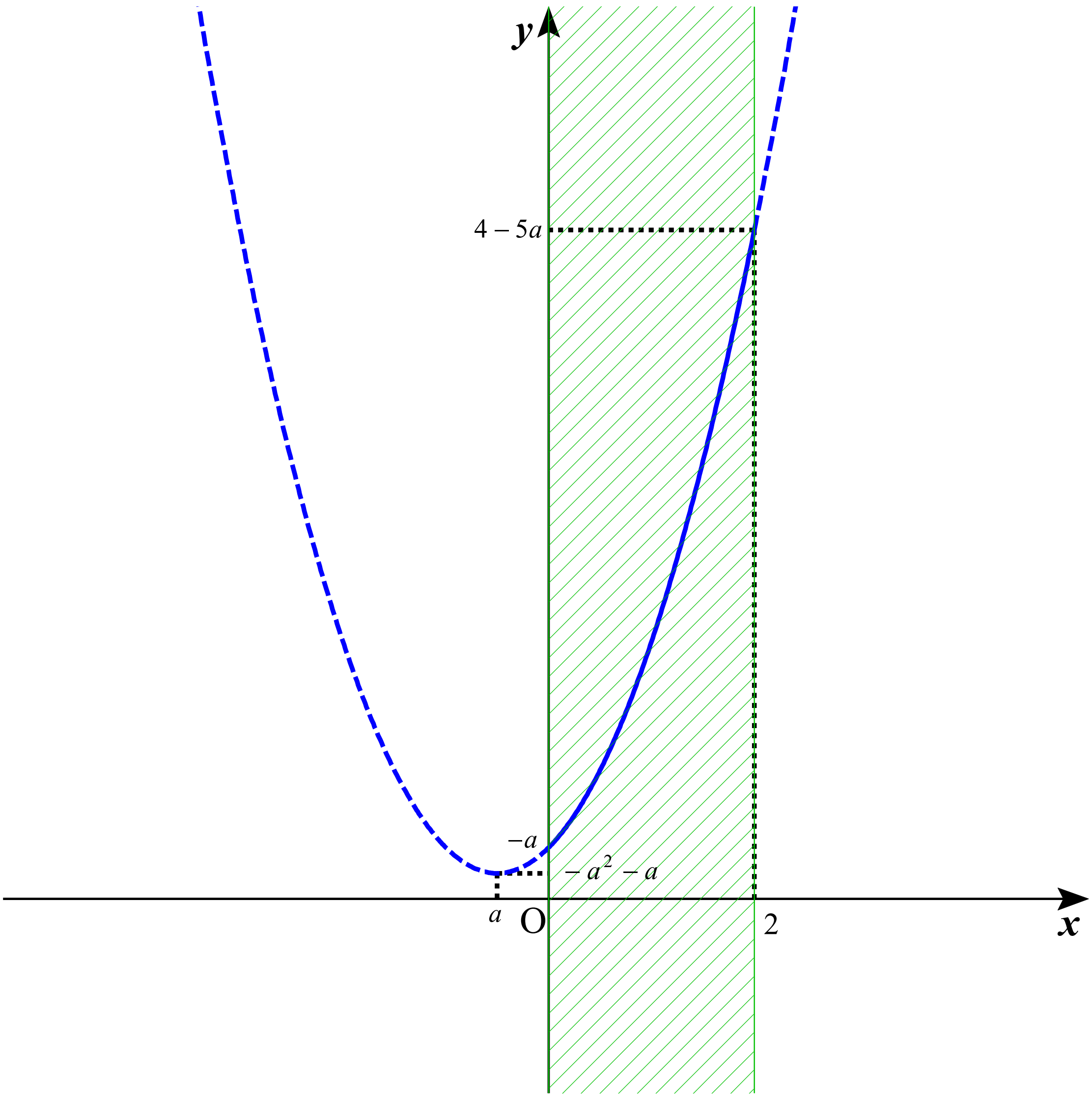
$a < 0$ のとき

与えられた関数のグラフは下図実線部分のようになる。

よって，$x = 0$ で最小値 $-a$ をとる。

したがって，最小値が -2 ならば，$-a = -2$ より，$a = 2$

これは $a < 0$ を満たさない。よって，不適



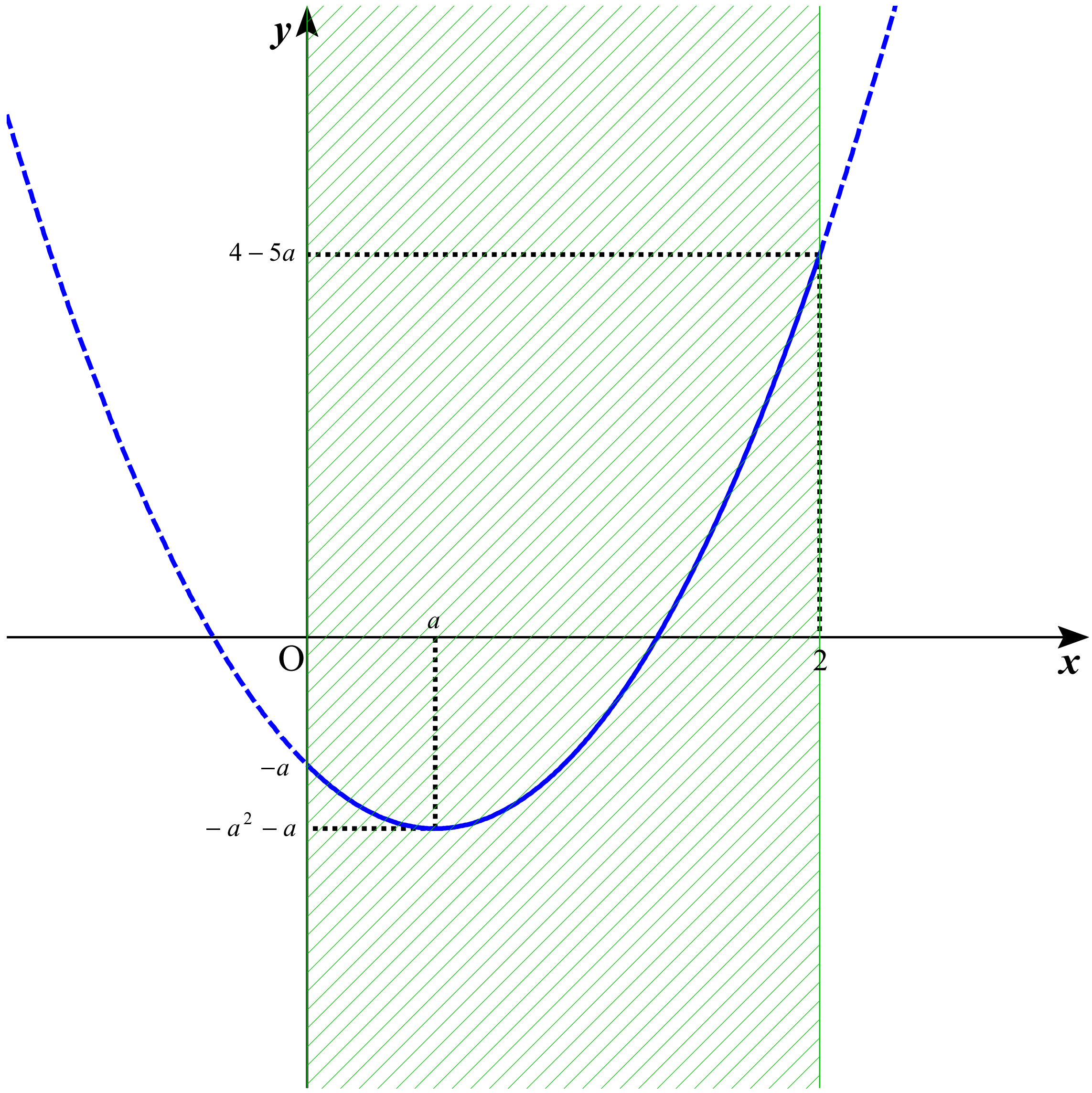
$0 \leq a \leq 2$ のとき

与えられた関数のグラフは下図実線部分のようになる。

よって，$x = a$ で最小値 $-a^2 - a$ をとる。

したがって，最小値が -2 ならば，$-a^2 - a = -2$ より，$(a-1)(a+2) = 0$

これと $0 \leq a \leq 2$ より，$a = 1$



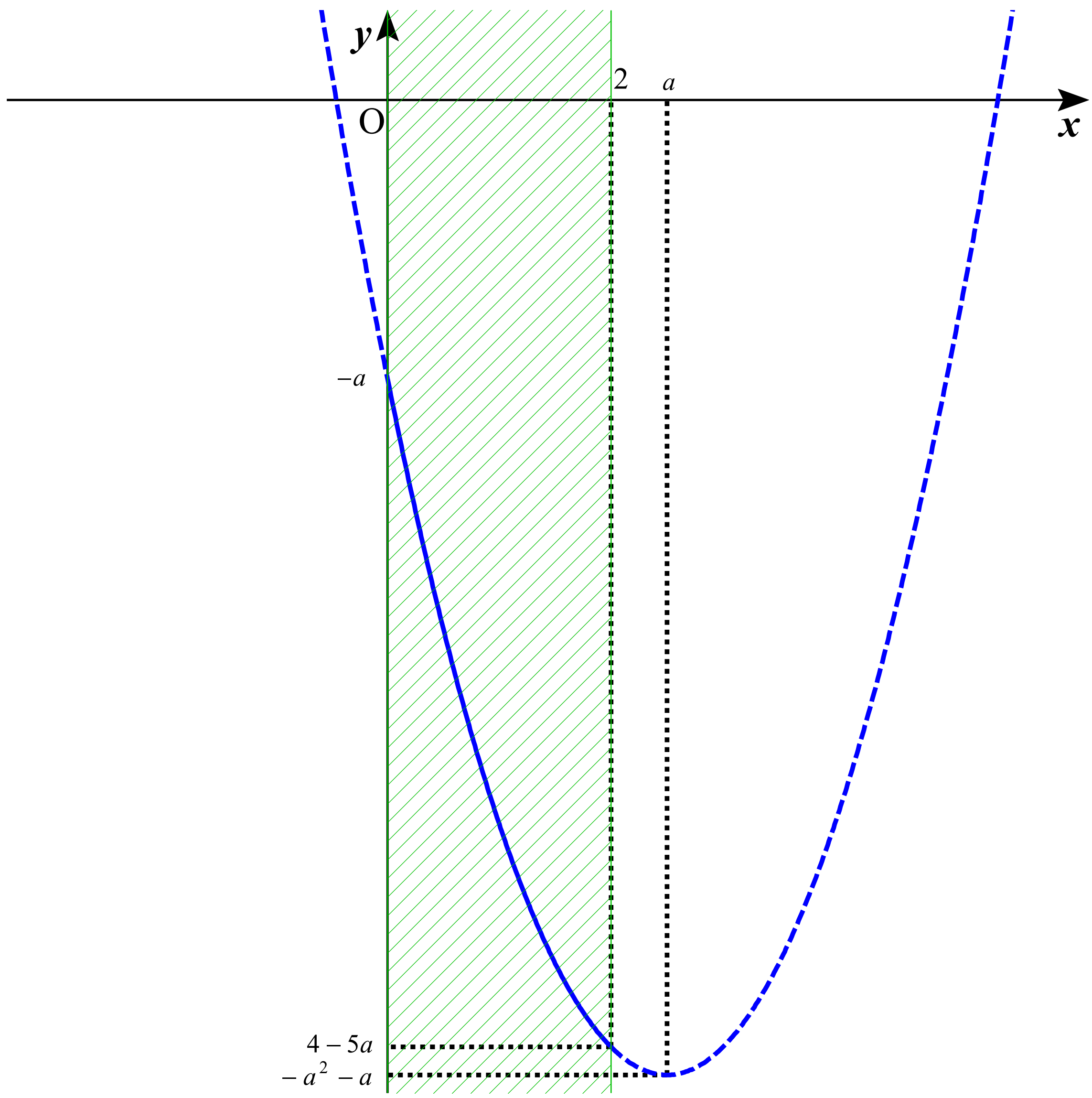
$2 < a$ のとき

与えられた関数のグラフは下図実線部分のようになる。

よって，$x = 2$ で最小値 $4 - 5a$ をとる。

したがって，最小値が -2 ならば，$4 - 5a = -2$ より，$a = \dfrac{6}{5}$

これは $2 < a$ を満たさない。よって，不適



以上より，$a = 1$

147

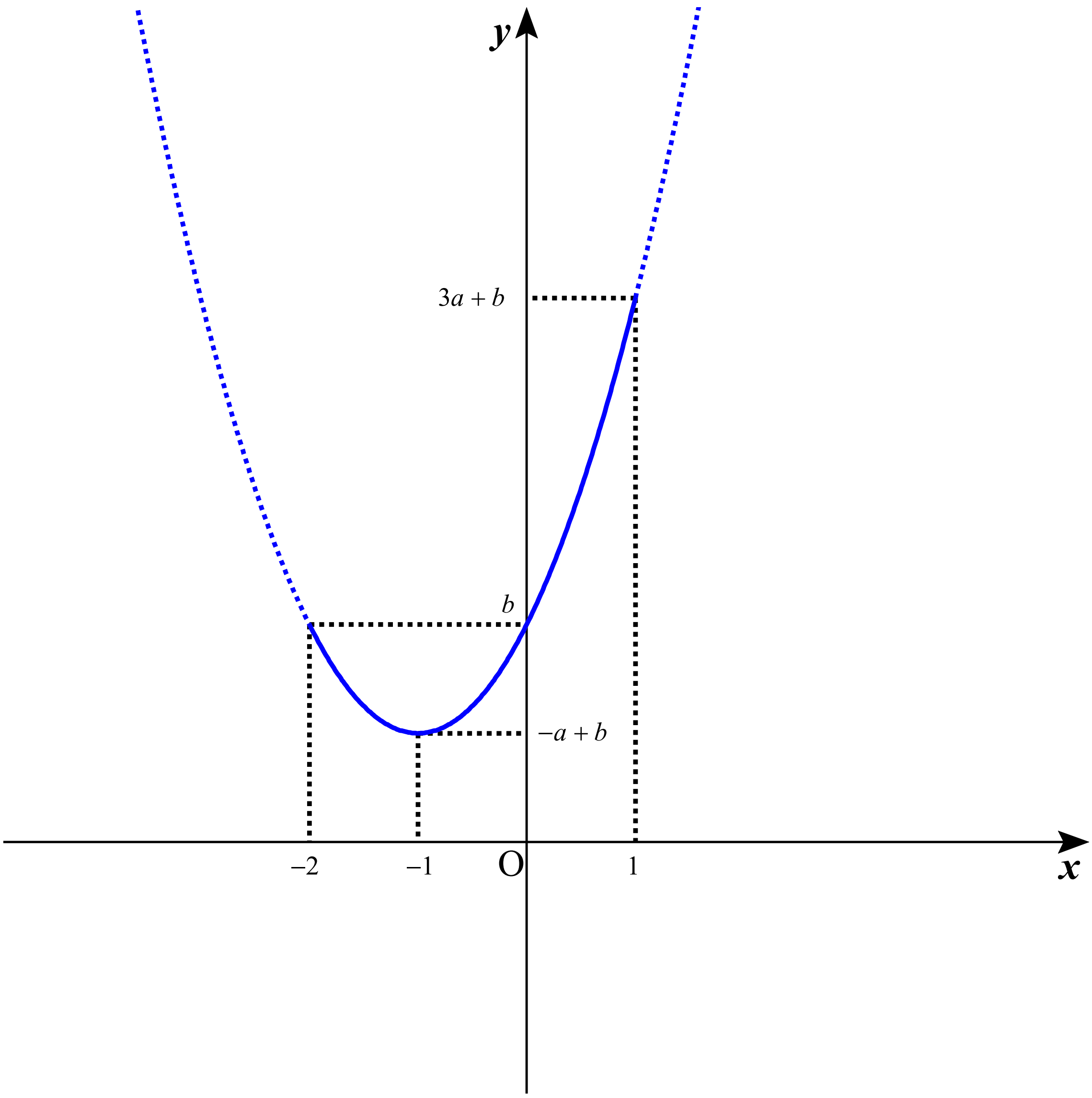
$y = ax^2 + 2ax + b$
$\quad = a(x^2 + 2x) + b$
$\quad = a\{(x+1)^2 - 1\} + b$
$\quad = a(x+1)^2 - a + b$

および$a > 0$より，

$y = ax^2 + 2ax + b$ （$-2 \leq x \leq 1$）のグラフは下図青色実線部分のようになる。

よって， $x = 1$で最大値$3a + b$， $x = -1$で最小値$-a + b$をとる。

これと条件より， $\begin{cases} 3a + b = 6 \\ -a + b = 3 \end{cases}$ $\quad \therefore a = \dfrac{3}{4},\ b = \dfrac{15}{4}$



148

(1)

$y = x^2 + 2kx + k$

$\quad = (x+k)^2 - k^2 + k$

ここで，$(x+k)^2 \geq 0$ より，$(x+k)^2 - k^2 + k \geq -k^2 + k$ （等号は $x = -k$ のとき成り立つ）

よって，$y = x^2 + 2kx + k \geq -k^2 + k$

ゆえに，$m = -k^2 + k$

(2)

$m = -k^2 + k$

$\quad = -\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$

ここで，$-\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ より，$-\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{4}$ （等号は $k = \dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ）

よって，$m \leq \dfrac{1}{4}$

ゆえに，$k = \dfrac{1}{2}$ のとき m は最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

149

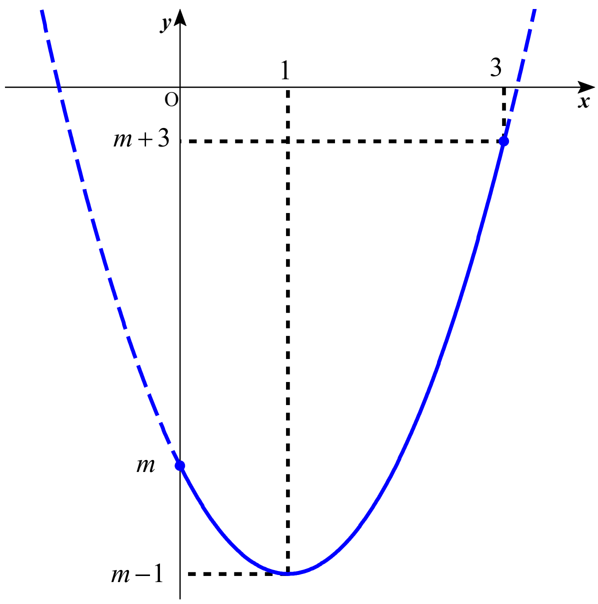
$y = x^2 - 2x + m$

$\quad = (x-1)^2 + m - 1$

より，$y = x^2 - 2x + m$ （$0 \leq x \leq 3$）のグラフは下図青色実線である。

よって，$x = 3$ で最大値 $m+3$ をとる。

したがって，必要十分条件は $m + 3 < 0$ すなわち $m < -3$



150

$y = x^2 - 2x + 1$

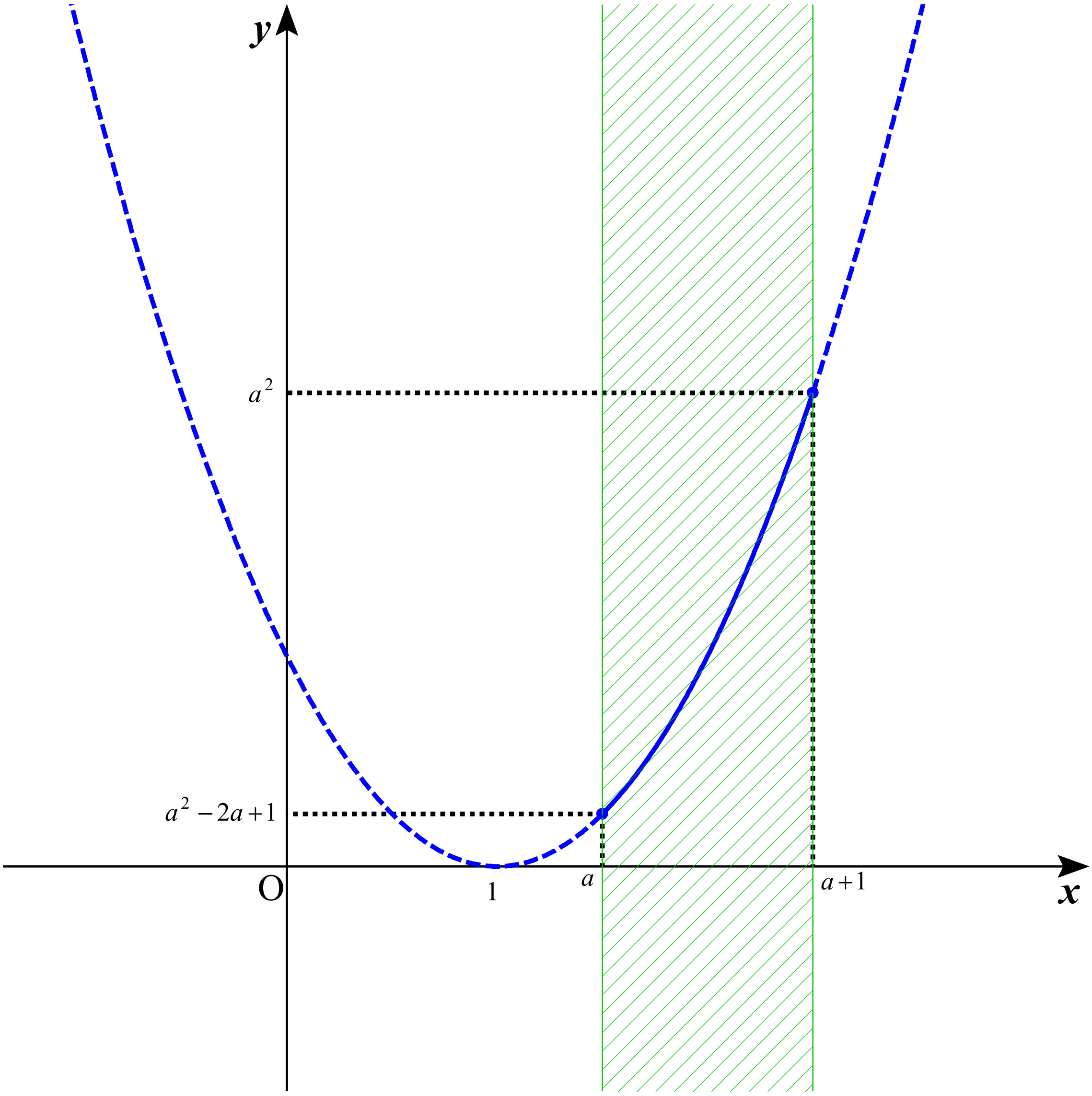
$= (x-1)^2$

(1)

$a > 1$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

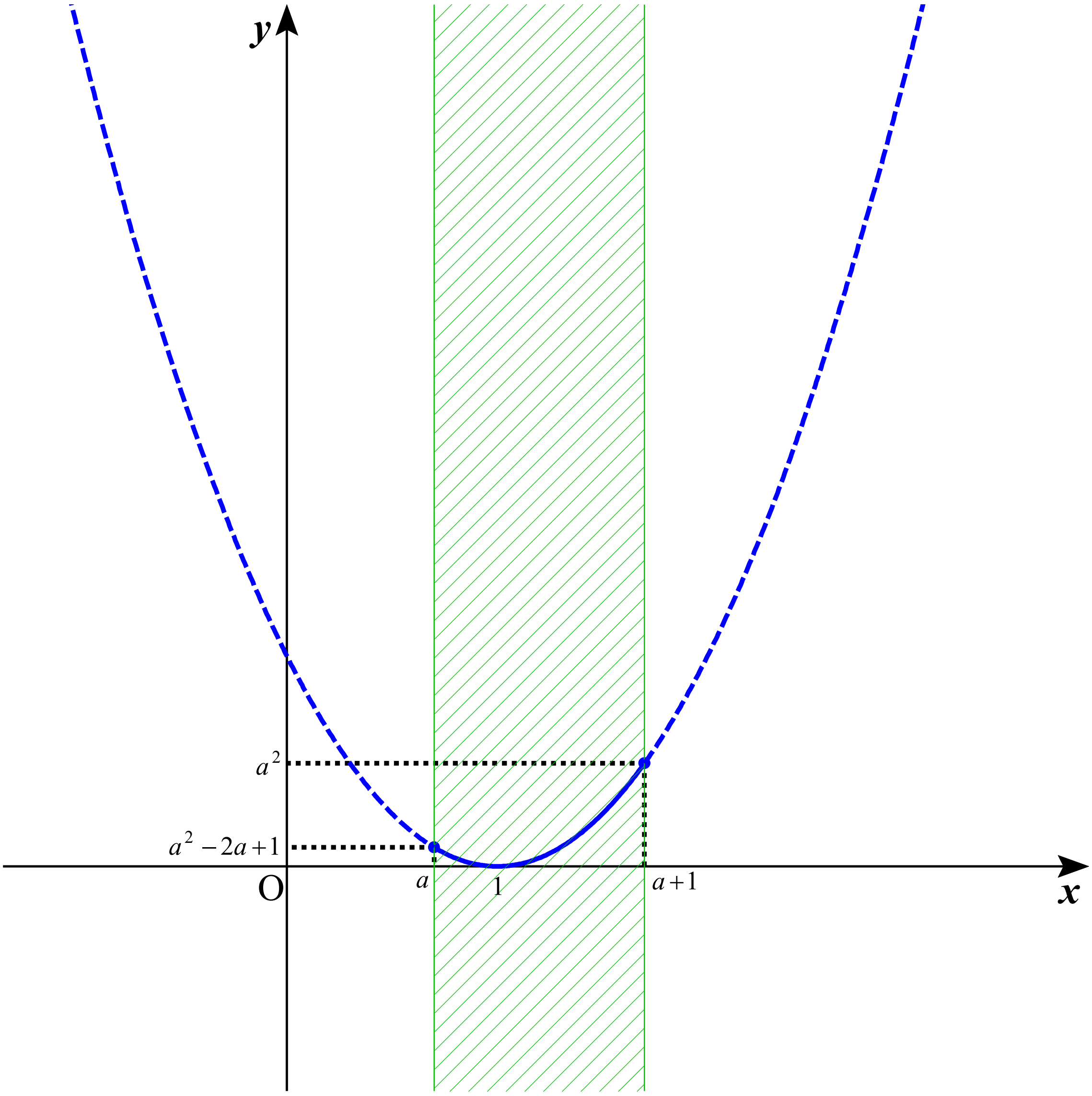
よって，$x = a$ で最小値 $a^2 - 2a + 1$ をとる。



$a \leq 1 \leq a+1$ のとき，すなわち $0 \leq a \leq 1$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

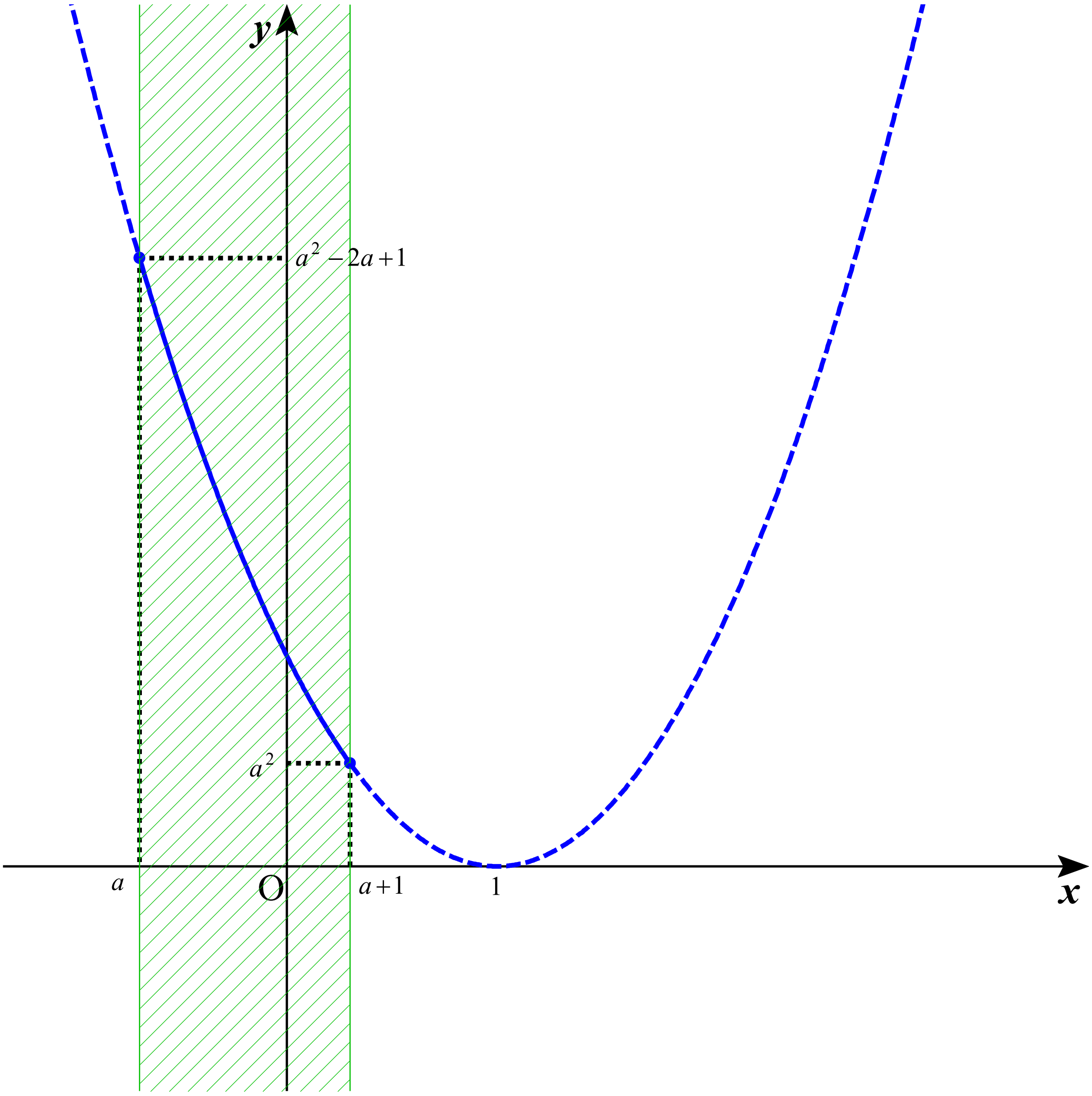
よって，$x=1$ で最小値 0 をとる。



$a+1<1$ のとき，すなわち $a<0$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

よって， $x=a+1$ で最小値 a^2 をとる。



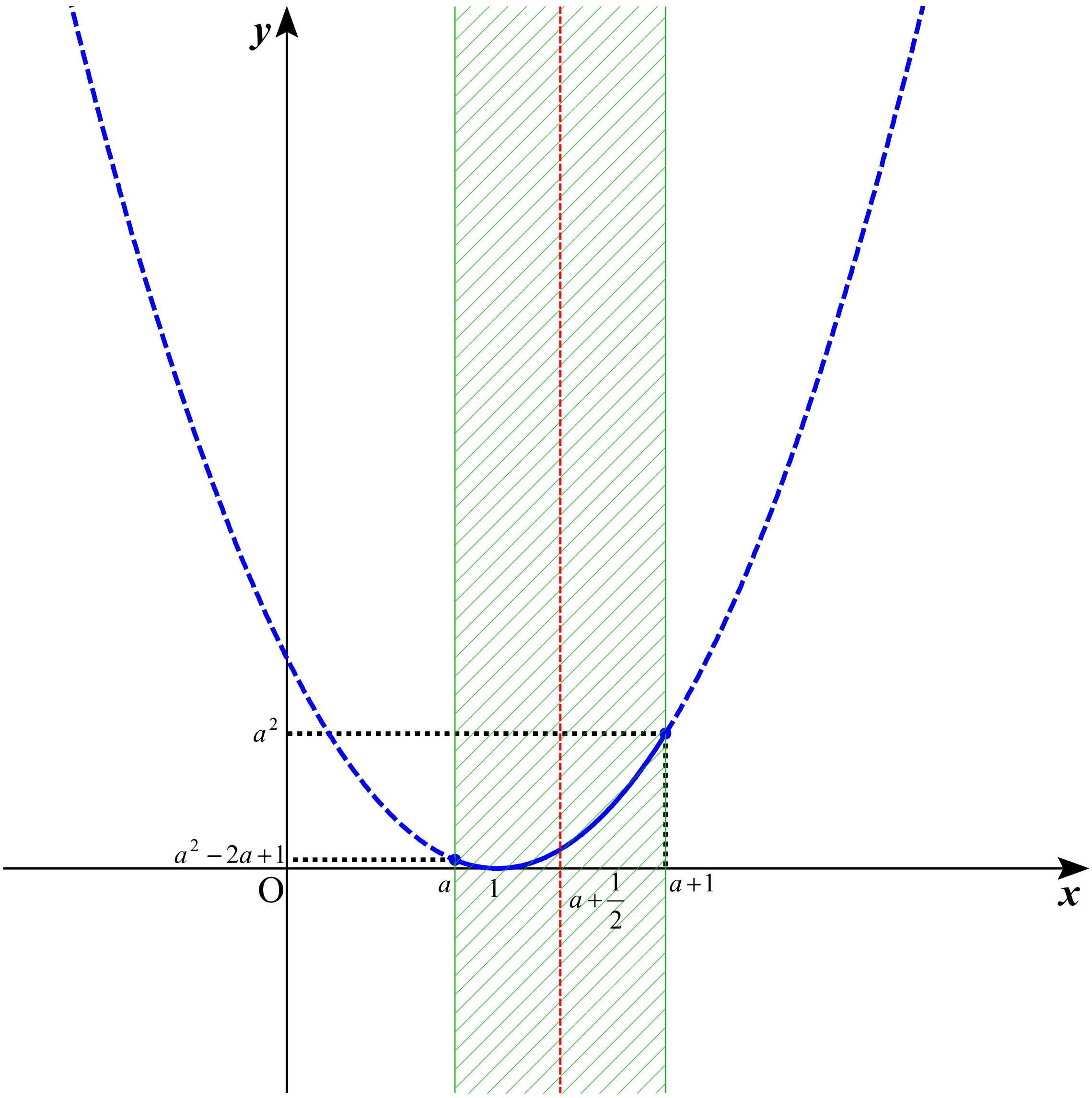
(2)

定義域の中央値は$\dfrac{a+(a+1)}{2}=a+\dfrac{1}{2}$だから，

$a+\dfrac{1}{2}>1$のとき，すなわち$a>\dfrac{1}{2}$のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

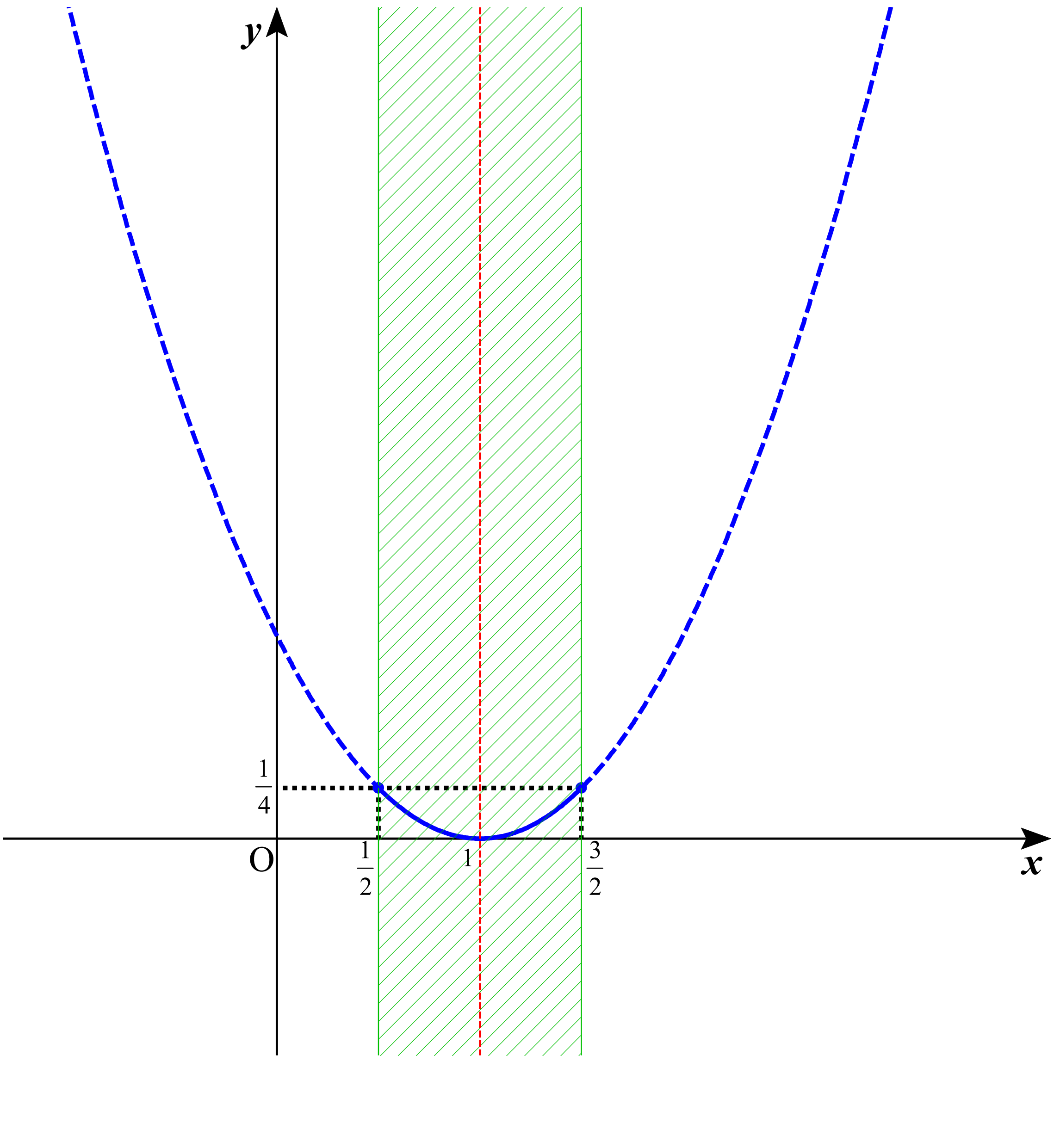
よって，$x=a+1$で最大値a^2をとる。



$a+\frac{1}{2}=1$ のとき，すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき

$y=x^2-2x+1\left(\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\right)$ より，グラフは下図青色実線

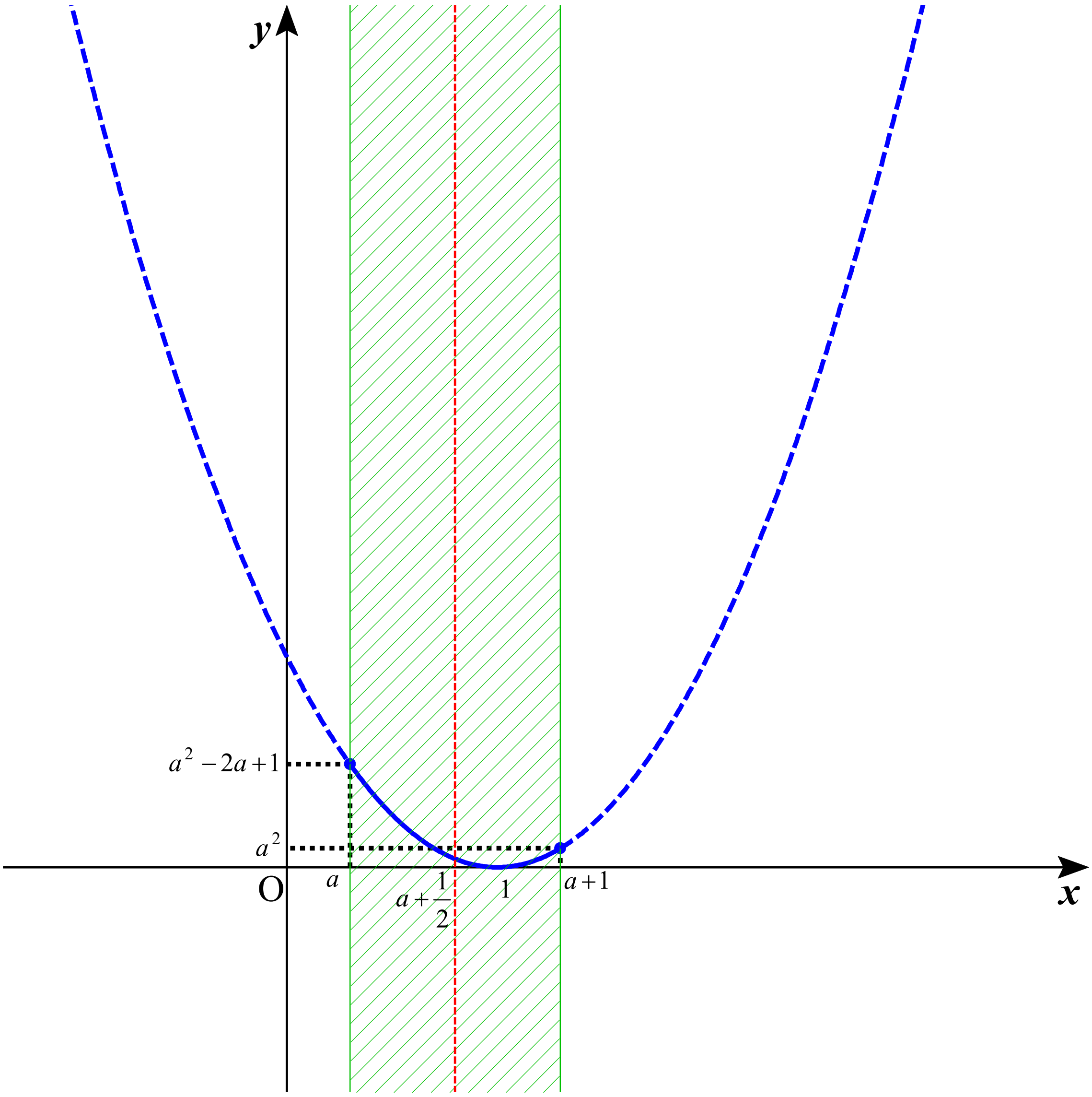
よって，$x=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。



$a+\dfrac{1}{2}<1$ のとき，すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

よって， $x=a$ で最大値 a^2-2a+1 をとる。



151

$y = x^2 - 2x - 1$

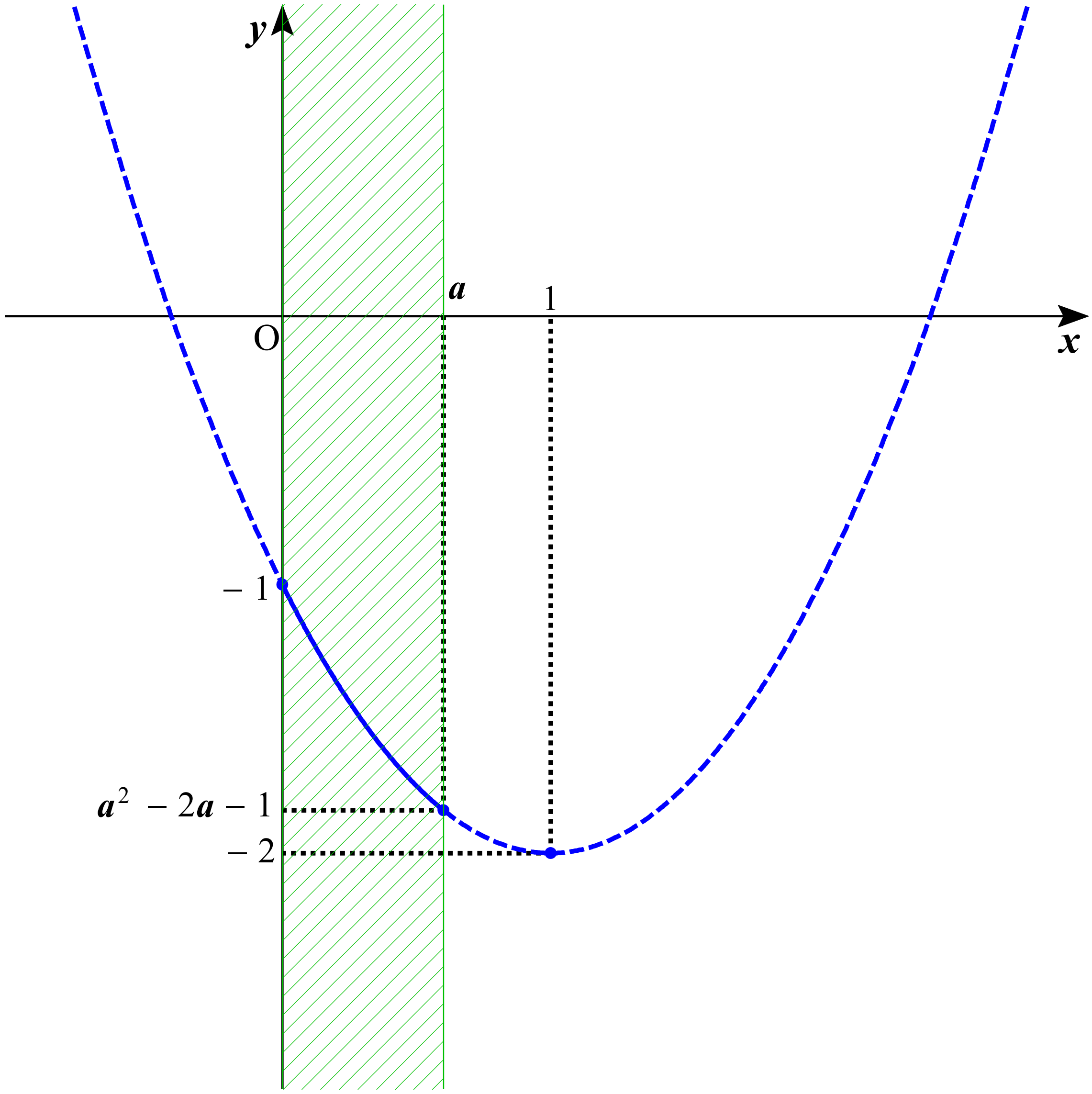
$\quad = (x-1)^2 - 2$

(1)

$0 < a < 1$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

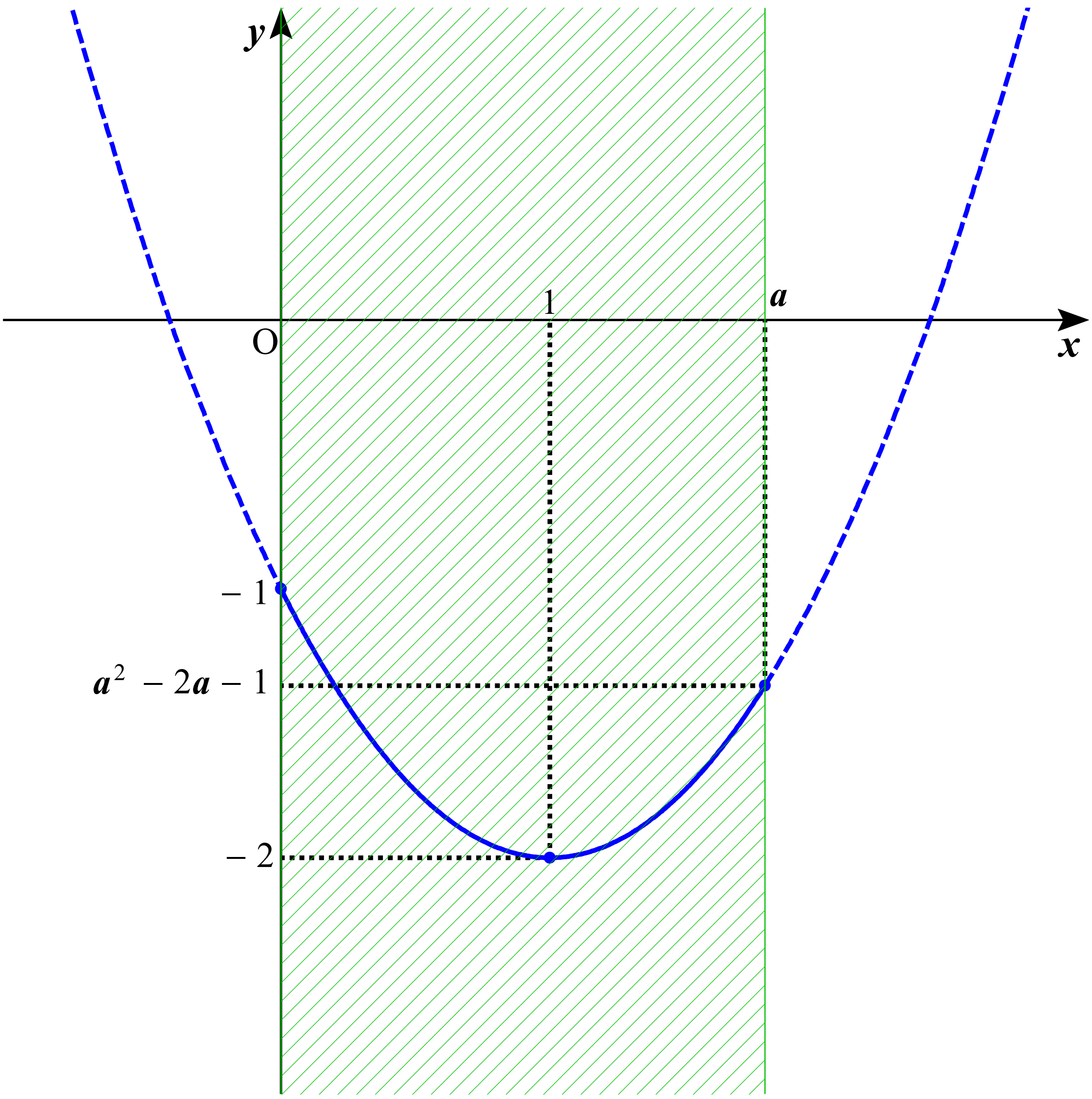
よって， $x = a$ で最小値 $a^2 - 2a - 1$ をとる。



$1 \leq a$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

よって， $x=1$ で最小値 -2 をとる。



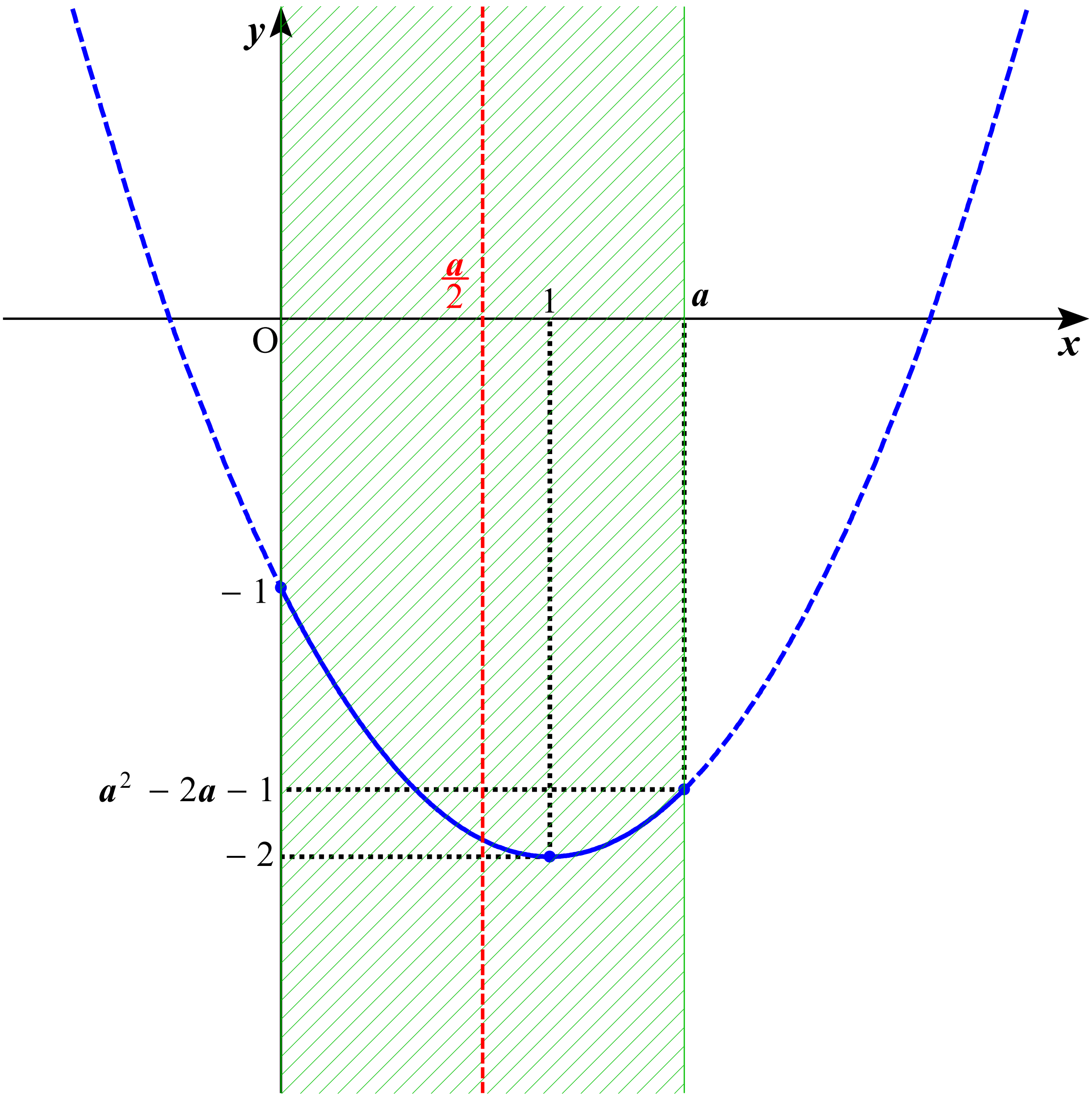
(2)

定義域の中央値は $\frac{0+a}{2}=\frac{a}{2}$ だから，

$0<\frac{a}{2}<1$ のとき，すなわち $0<a<2$ のとき

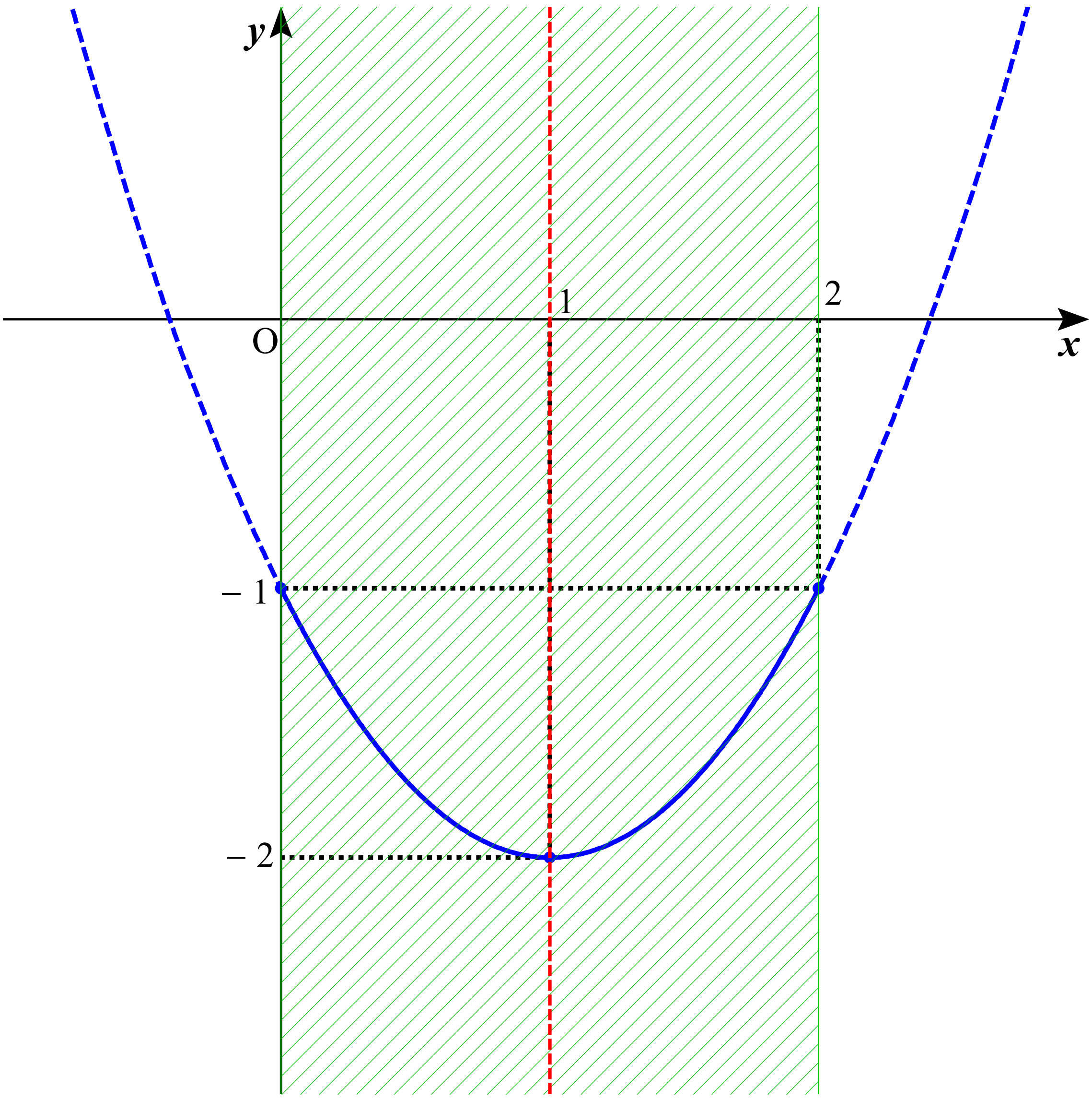
与えられた関数のグラフは下図青色実線

よって，$x=0$ で最大値 -1 をとる。



$\dfrac{a}{2}=1$ のとき，すなわち $a=2$ のとき

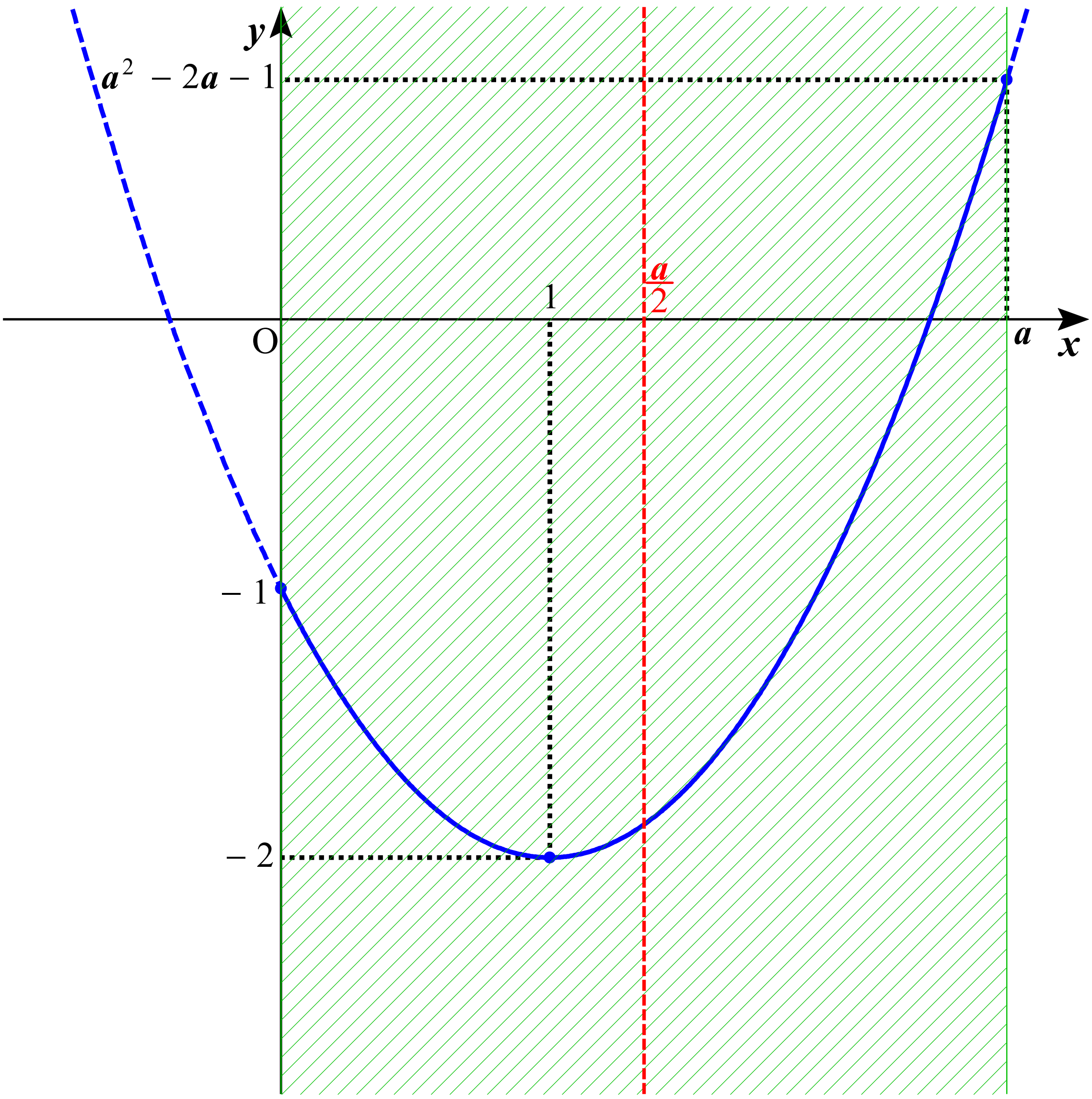
$y=x^2-2x-1\ (0\leq x\leq 2)$ より，グラフは下図青色実線
よって， $x=0,\ 2$ で最大値 -1 をとる。



$1<\dfrac{a}{2}$ のとき，すなわち $2<a$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

よって， $x=a$ で最大値 a^2-2a-1 をとる。



152

$f(x) = -x^2 + 2x + 2$

$\quad = -(x-1)^2 + 3$

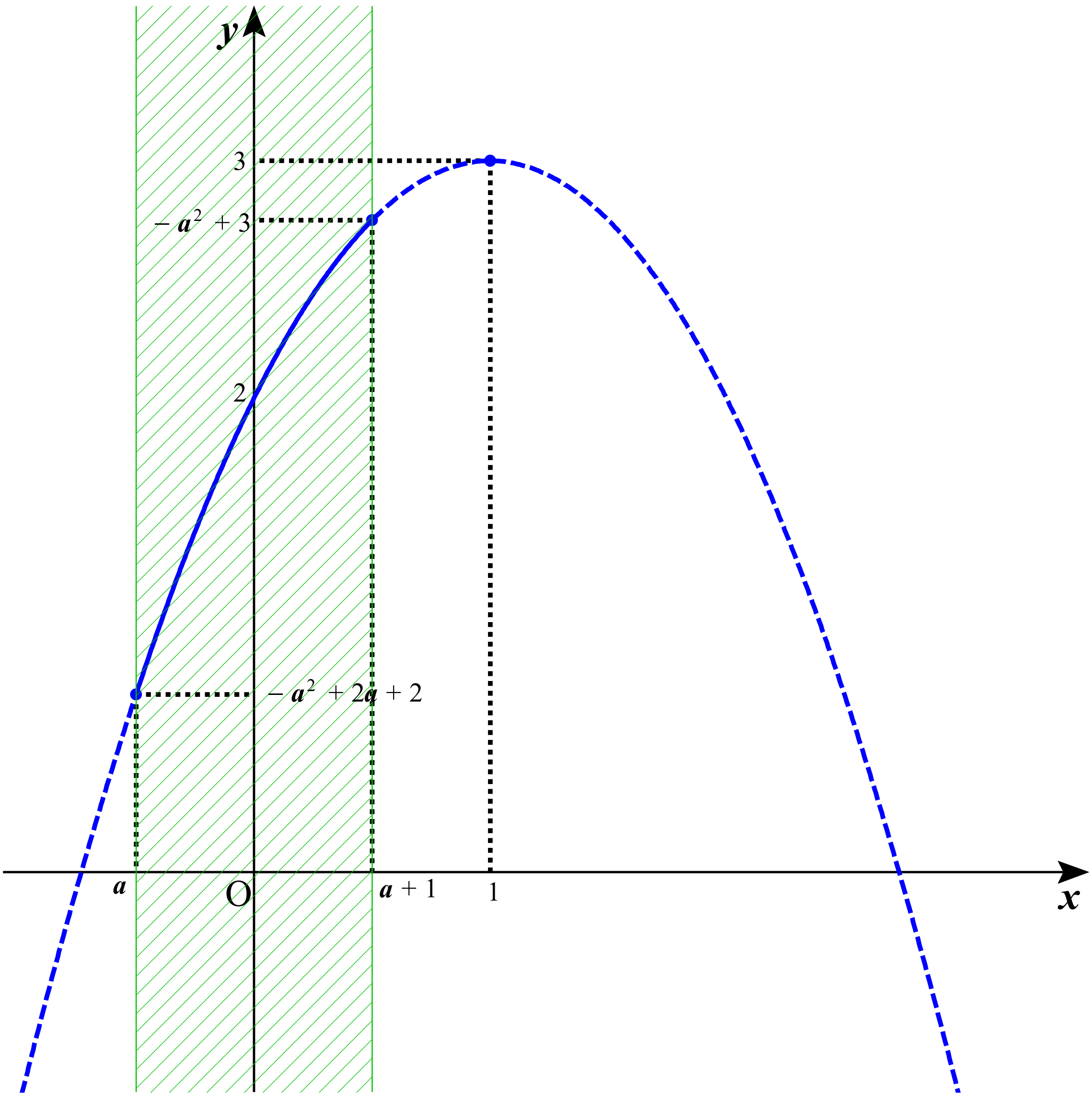
より，$y = f(x)$ のグラフは軸を $x = 1$，頂点を $(1,\ 3)$ とする上に凸の放物線である。

$M(a)$ のグラフについて

$a + 1 < 1$ のとき，すなわち $a < 0$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

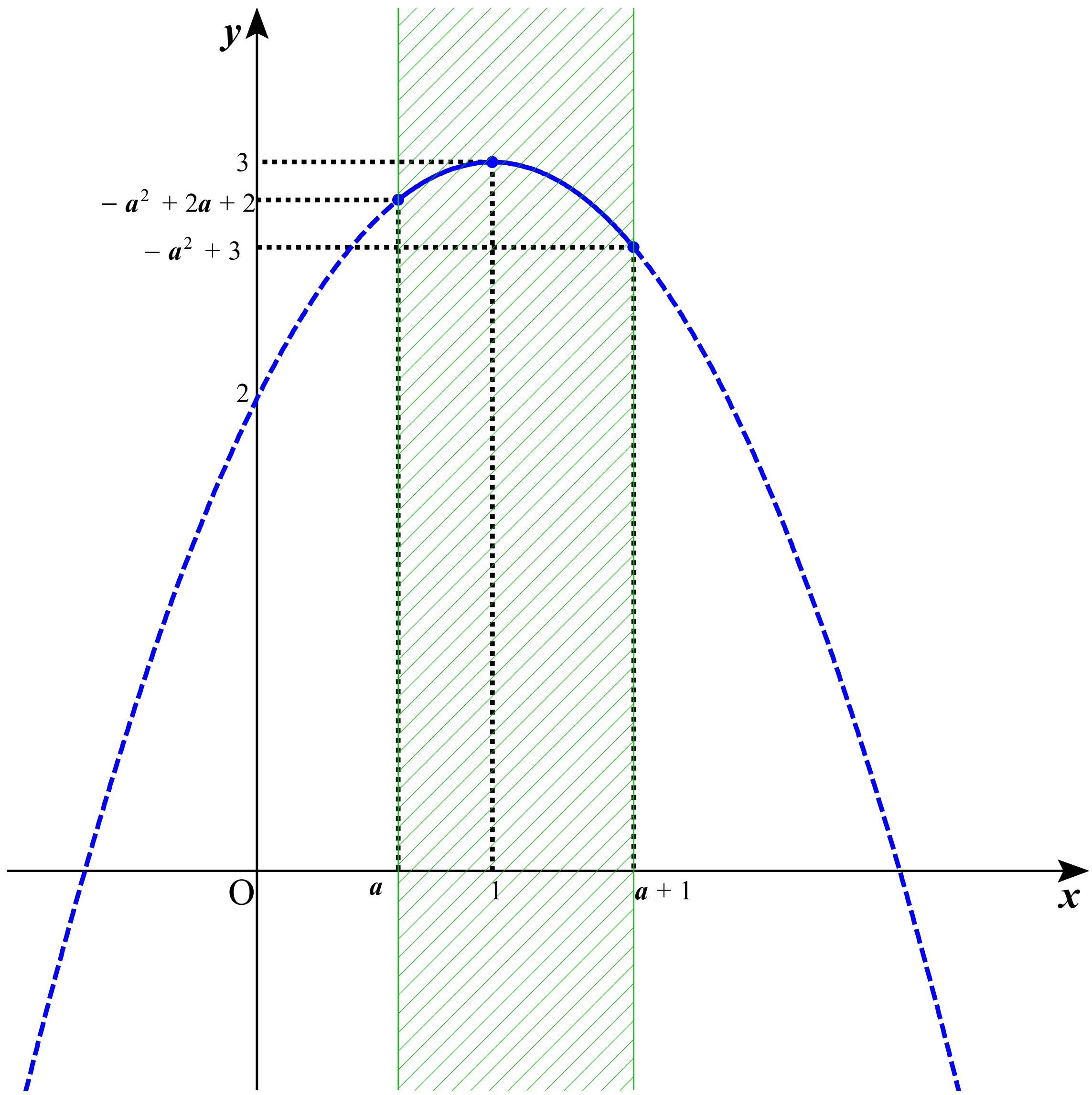
よって，最大値は $f(a+1) = -a^2 + 3$ $\quad \therefore M(a) = -a^2 + 3$



$a \leq 1 \leq a+1$ のとき，すなわち $0 \leq a \leq 1$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

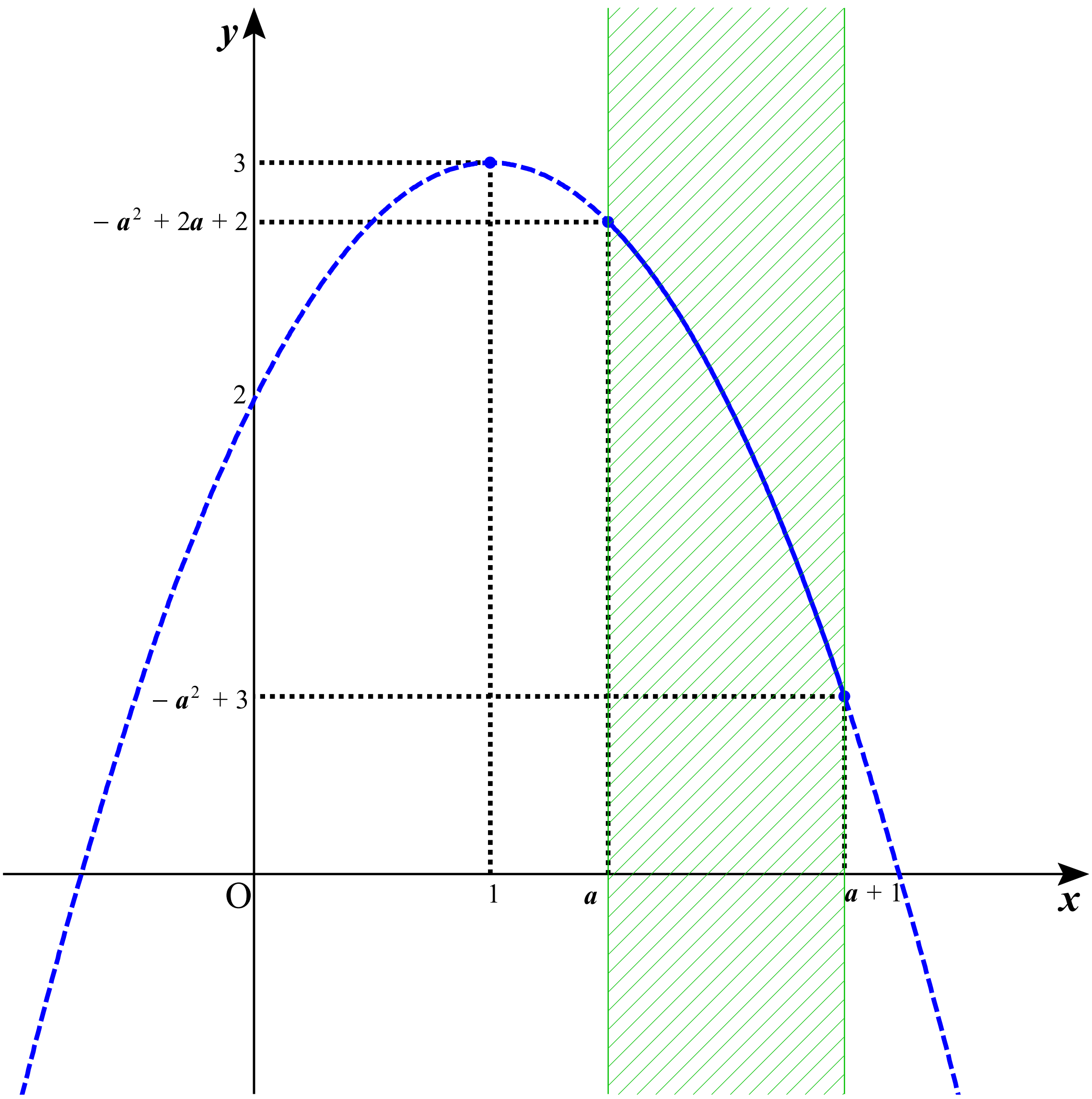
よって，最大値は $f(1)=3$　　$\therefore M(a)=3$



$1 < a$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

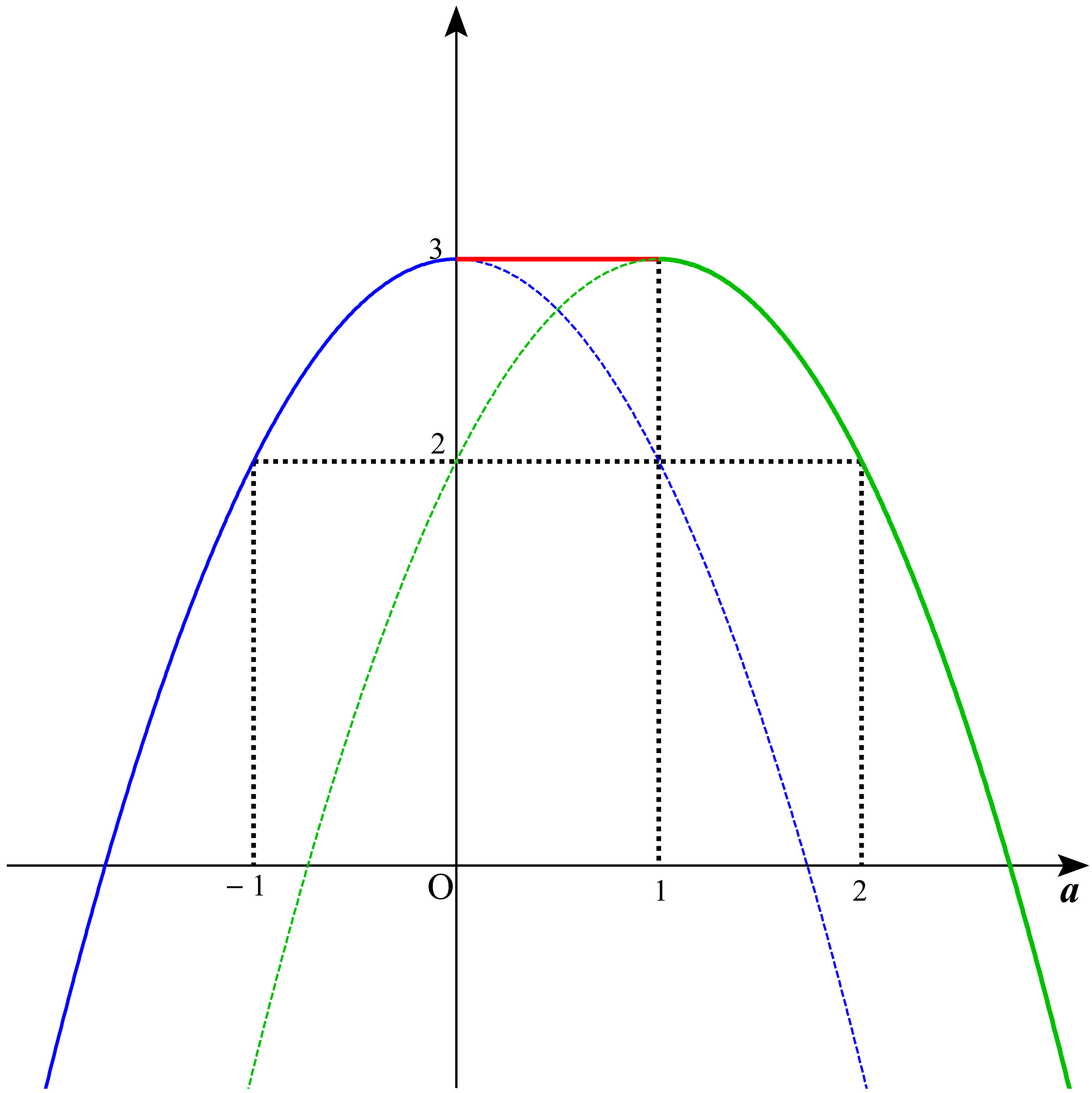
よって，最大値は $f(a) = -a^2 + 2a + 2$　$\therefore M(a) = -a^2 + 2a + 2$



以上より，

$$M(a)=\begin{cases}-a^2+3 & (a<0)\\ 3 & (0\leq a\leq 1)\\ -a^2+2a+2 & (1<a)\end{cases}$$

よって，グラフは下図実線



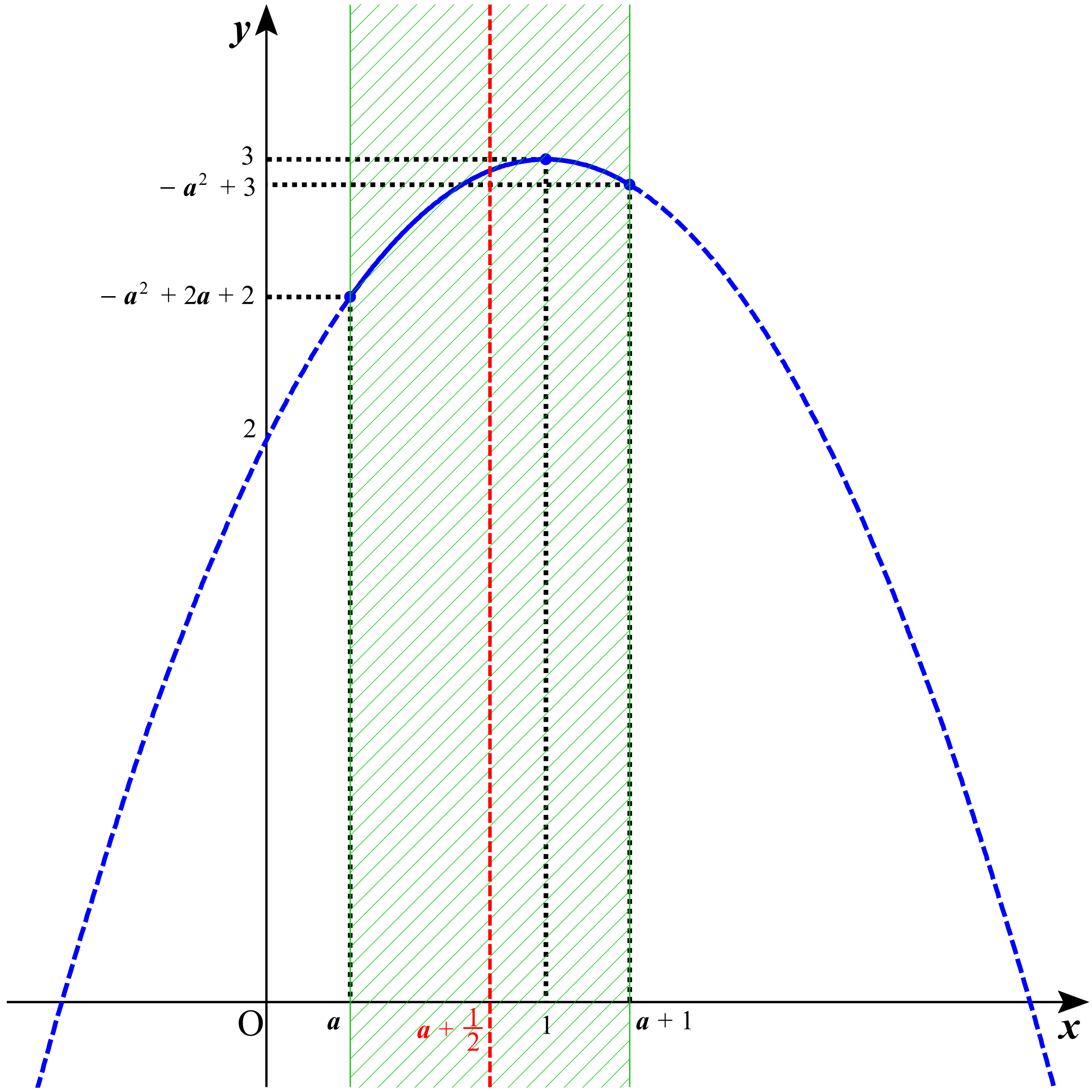
$m(a)$のグラフについて

定義域の中央値が$\dfrac{a+(a+1)}{2}=a+\dfrac{1}{2}$だから，

$a+\dfrac{1}{2}<1$のとき，すなわち$a<\dfrac{1}{2}$のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

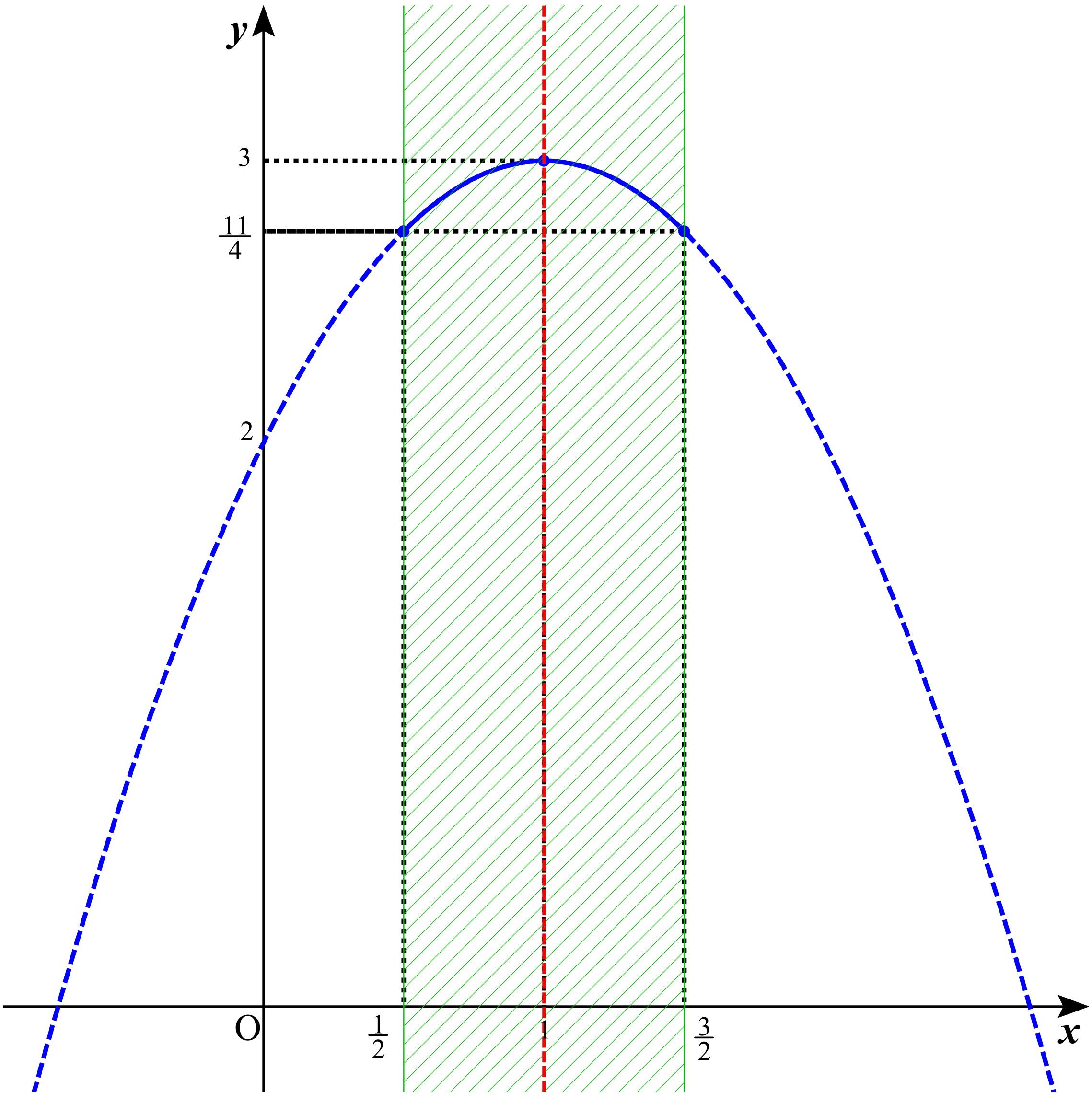
よって，最小値は$f(a)=-a^2+2a+2$　$\therefore m(a)=-a^2+2a+2$



$a+\frac{1}{2}=1$ のとき，すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき

$f(x)=-x^2+2x+2\left(\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\right)$ より，グラフは下図青色実線

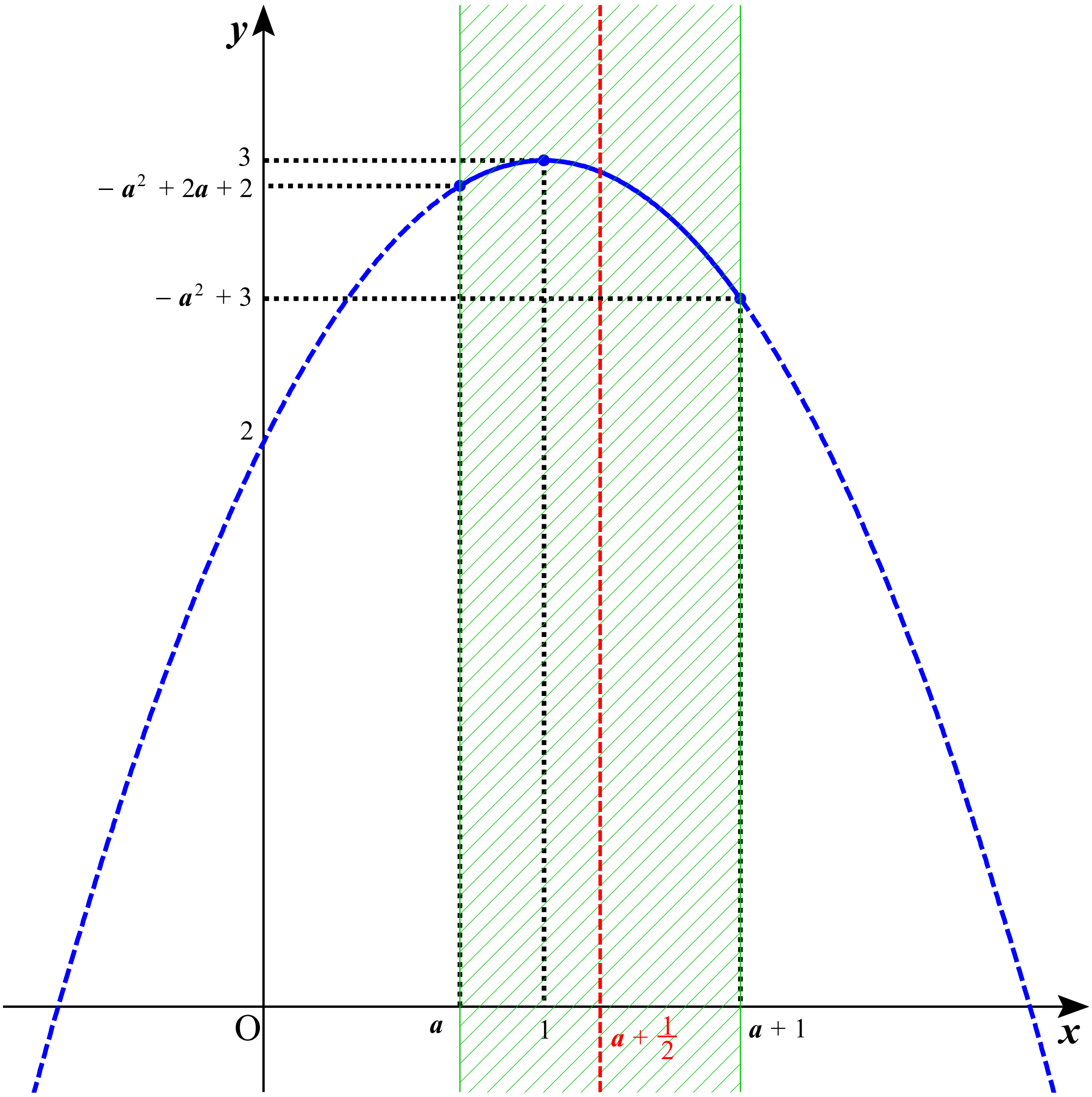
よって，最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{4}$　$\therefore m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}$



$1 < a + \dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $\dfrac{1}{2} < a$ のとき

与えられた関数のグラフは下図青色実線

よって，最小値は $f(a+1) = -a^2 + 3 \quad \therefore m(a) = -a^2 + 3$



以上より，$m(a)=\begin{cases} -a^2+2a+2 & \left(a<\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{11}{4} & \left(a=\dfrac{1}{2}\right) \\ -a^2+3 & \left(\dfrac{1}{2}<a\right) \end{cases}$ となるが，

$m(a)$のグラフは連続なので，

$m(a)=\dfrac{11}{4}\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ と $m(a)=-a^2+3\left(\dfrac{1}{2}<a\right)$ をまとめて $m(a)=-a^2+3\left(\dfrac{1}{2}\leq a\right)$

または

$m(a)=\dfrac{11}{4}\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ と $m(a)=-a^2+2a+2\left(a<\dfrac{1}{2}\right)$ をまとめて $m(a)=-a^2+2a+2\left(a\leq\dfrac{1}{2}\right)$

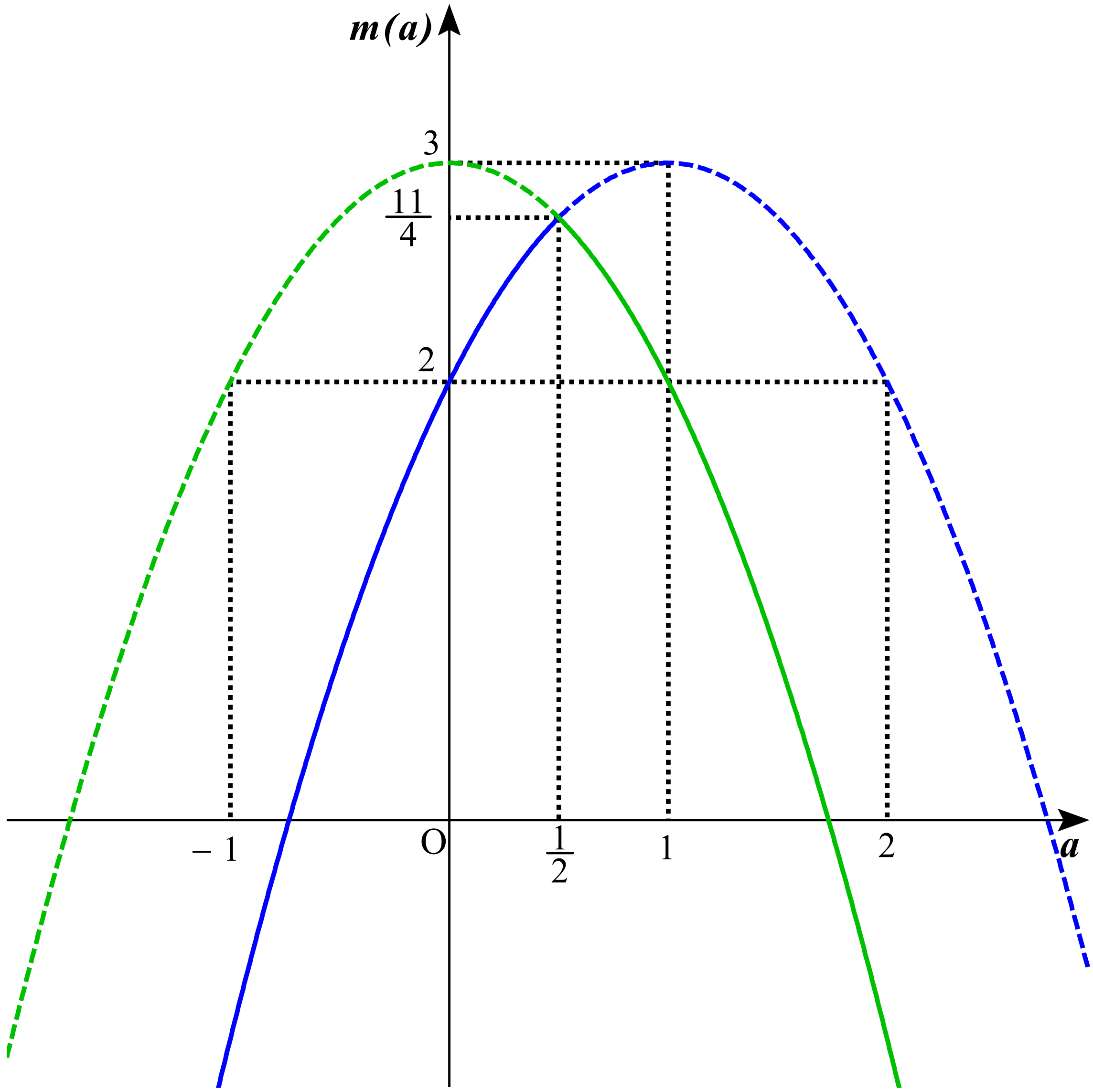
とすることにより，

$$m(a)=\begin{cases} -a^2+2a+2 & \left(a<\dfrac{1}{2}\right) \\ -a^2+3 & \left(\dfrac{1}{2}\leq a\right) \end{cases}$$

または

$m(a)=\begin{cases} -a^2+2a+2 & \left(a\leq\dfrac{1}{2}\right) \\ -a^2+3 & \left(\dfrac{1}{2}<a\right) \end{cases}$ と簡潔に表せばよい。

グラフは下図実線



153

(1)

長方形の周囲の長さが 20cm だから，縦の長さ＋横の長さ＝$\frac{20}{2}$＝10cm

したがって，縦の長さを x cm とすると，横の長さは $10-x$ cm

ただし，$x>0$ かつ $10-x>0$ より，$0<x<10$

よって，面積を y cm^2 とすると，$y=x(10-x)$ $(0<x<10)$

これと

$$y=x(10-x)$$
$$=-x^2+10x$$
$$=-(x-5)^2+25$$

より，$x=5$ のとき y は最大値 25 をとる。

よって，長方形の面積の最大値は 25cm^2

また，このとき横の長さも $10-5=5$ cm だから，長方形は正方形の形をとる。

(2)

(1)と同様に，縦の長さを x cm とすると，横の長さは $10-x$ cm だから，

長方形の対角線の長さの 2 乗は，三平方の定理より，

$$x^2+(10-x)^2=2x^2-20x+100$$
$$=2(x^2-10x)+100$$
$$=2(x-5)^2+50$$

長方形の対角線を 1 辺とする正方形の面積＝長方形の対角線の長さの 2 乗　より，

正方形の面積＝$2(x-5)^2+50$

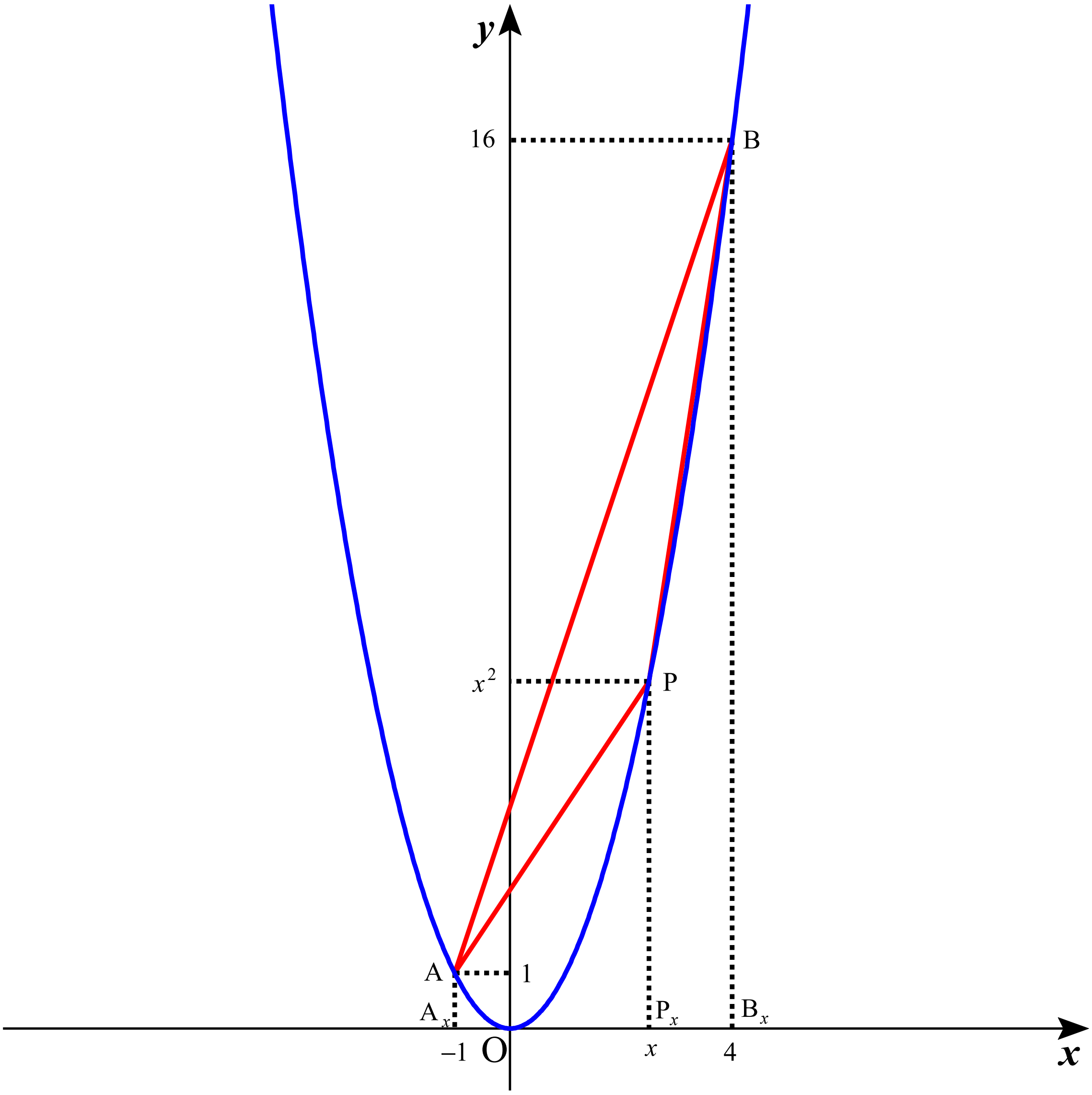
これと $0<x<10$ より，正方形の面積の最小は 50 cm^2

154

A,P,B から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ A_x, P_x, B_x とすると，△APB は台形 AA_xB_xB から台形 AA_xP_xP と台形 PP_xB_xB（三角形は上底と下底のどちらか一方の長さが 0 の台形と見なす）を除いた部分だから，△APB の面積は

$$\frac{1}{2}(1+16)\{4-(-1)\}-\frac{1}{2}\left[(1+x^2)\{x-(-1)\}+\frac{1}{2}(16+x^2)(4-x)\right]=-\frac{5}{2}(x^2-3x-4)$$
$$=-\frac{5}{2}\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right\}$$
$$=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{125}{8}$$

これと $-1<x<4$ より，△APB の面積は $x=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{125}{8}$ をとる。


y
16
B
x^2
P
A
1
A_x
P_x
B_x
−1
O
x
4
x

155

出発してからの時間を t とすると，$\mathrm{CP}=3t$ ・・・① $\mathrm{BQ}=\sqrt{3}t$ ・・・②

三平方の定理より，$\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{CA}^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2-9^2}=3\sqrt{3}$ ・・・③

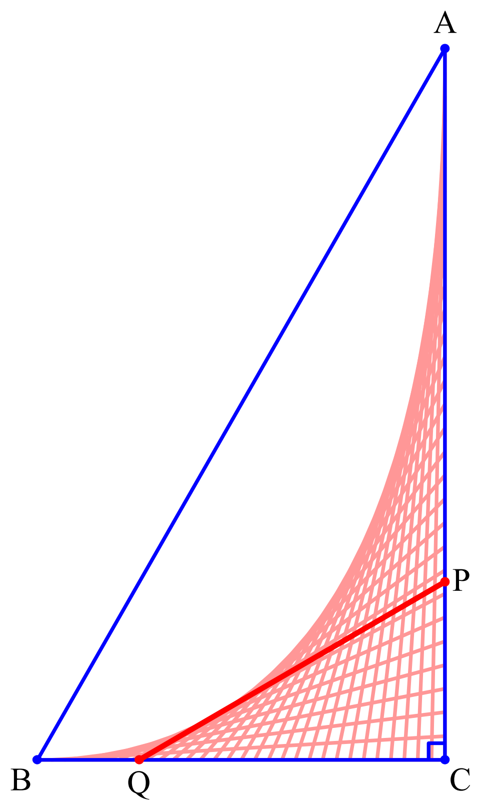
②,③より，$\mathrm{QC}=\mathrm{BC}-\mathrm{BQ}=\sqrt{3}(3-t)$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=\sqrt{\mathrm{CP}^2+\mathrm{QC}^2}\\&=\sqrt{(3t)^2+\left\{\sqrt{3}(3-t)\right\}^2}\\&=\sqrt{12t^2-18t+27}\\&=\sqrt{12\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{81}{4}}\\&=\sqrt{12\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

また，$0\leq\mathrm{CP}\leq\mathrm{CA}$ かつ $0\leq\mathrm{BQ}\leq\mathrm{BC}$ すなわち $0\leq 3t\leq 9$ かつ $0\leq\sqrt{3}t\leq 3\sqrt{3}$ より，$0\leq t\leq 3$

ゆえに，$t=\dfrac{3}{4}$ のとき P,Q 間の距離は最小値 $\sqrt{\left(\dfrac{9}{2}\right)^2}=\dfrac{9}{2}$ をとる。



156

(1)

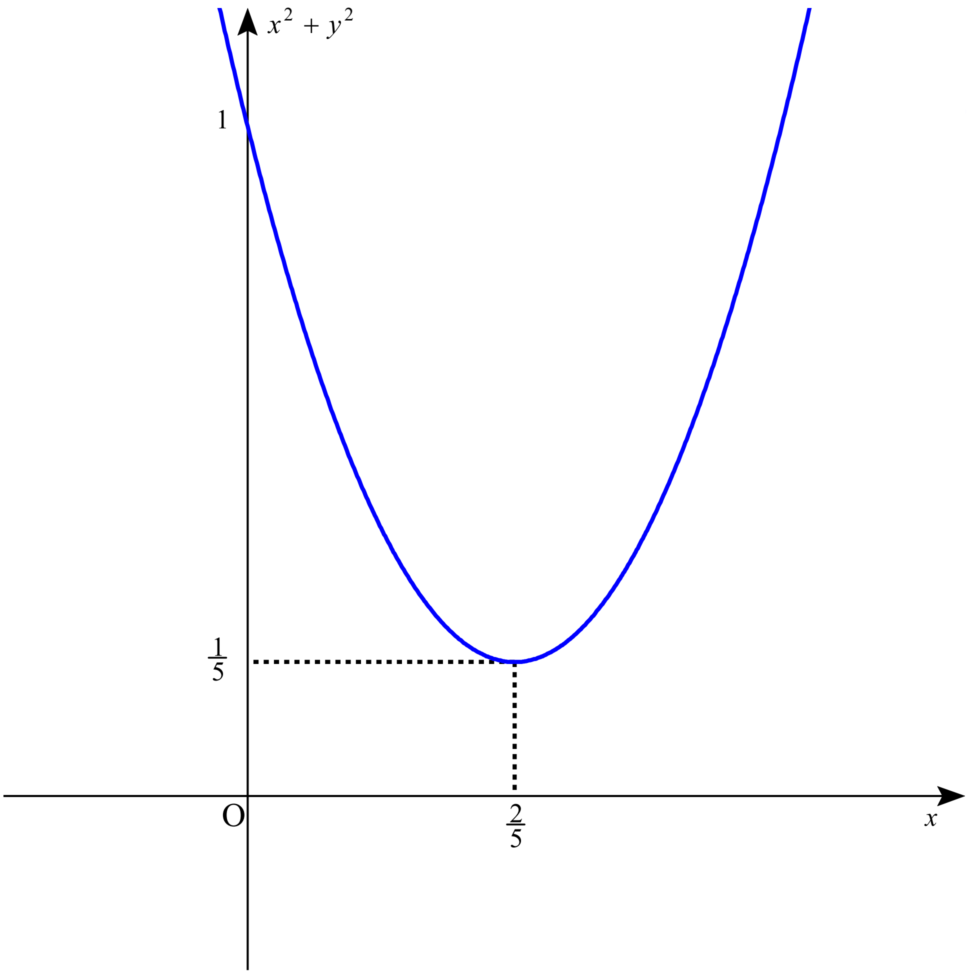
$y=-2x+1$ より，

$$x^2+y^2=x^2+(-2x+1)^2$$
$$=5x^2-4x+1$$
$$=5\left(x^2-\frac{4}{5}x\right)+1$$
$$=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$$

よって，x^2+y^2 は $x=\frac{2}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。

また，$y=-2x+1$ より，このとき $y=\frac{1}{5}$

ゆえに，$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$



(2)

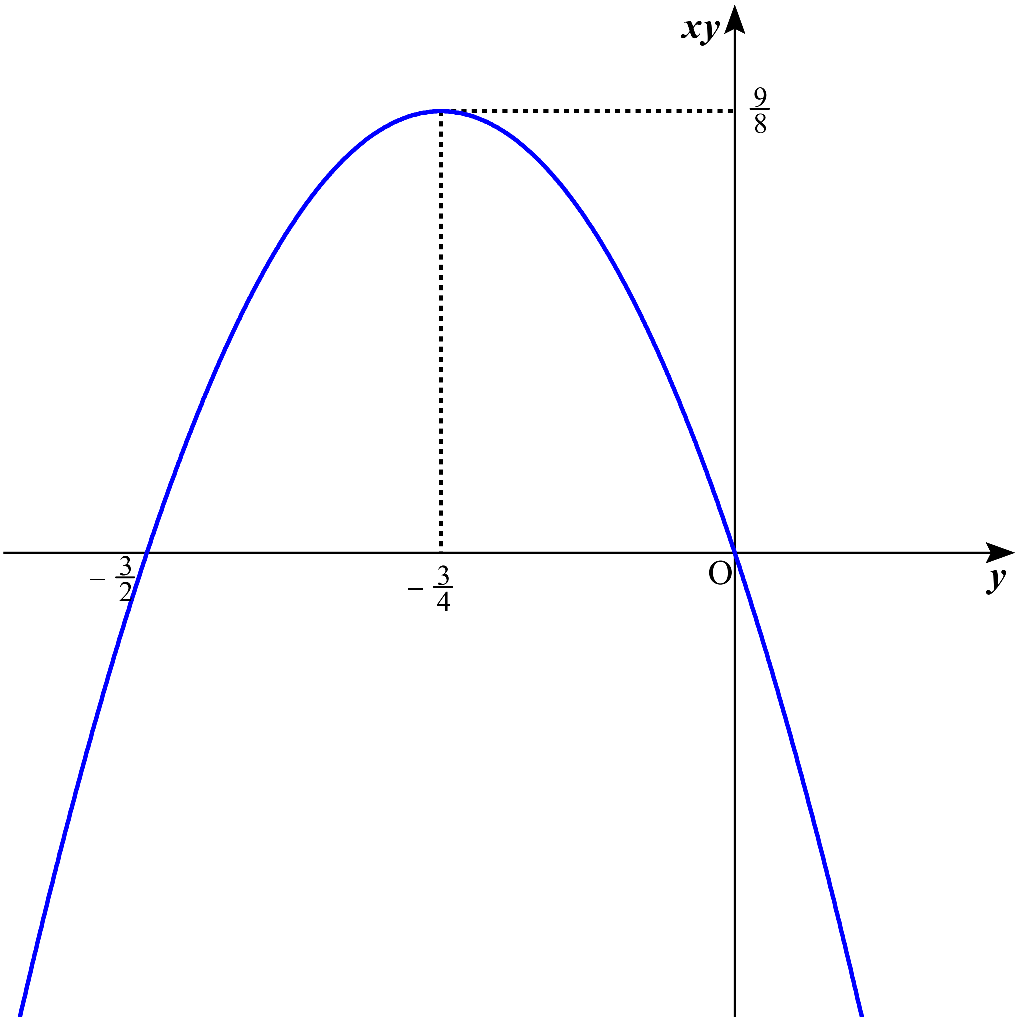
$x=-2y-3$ より，

$$\begin{aligned}xy&=(-2y-3)y\\&=-2y^2-3y\\&=-2\left(y^2+\frac{3}{2}y\right)\\&=-2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\end{aligned}$$

よって， xy は $y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。

また， $x=-2y-3$ より，このとき $x=-\frac{3}{2}$

ゆえに， $x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$



157

$y=-x+4$ より，

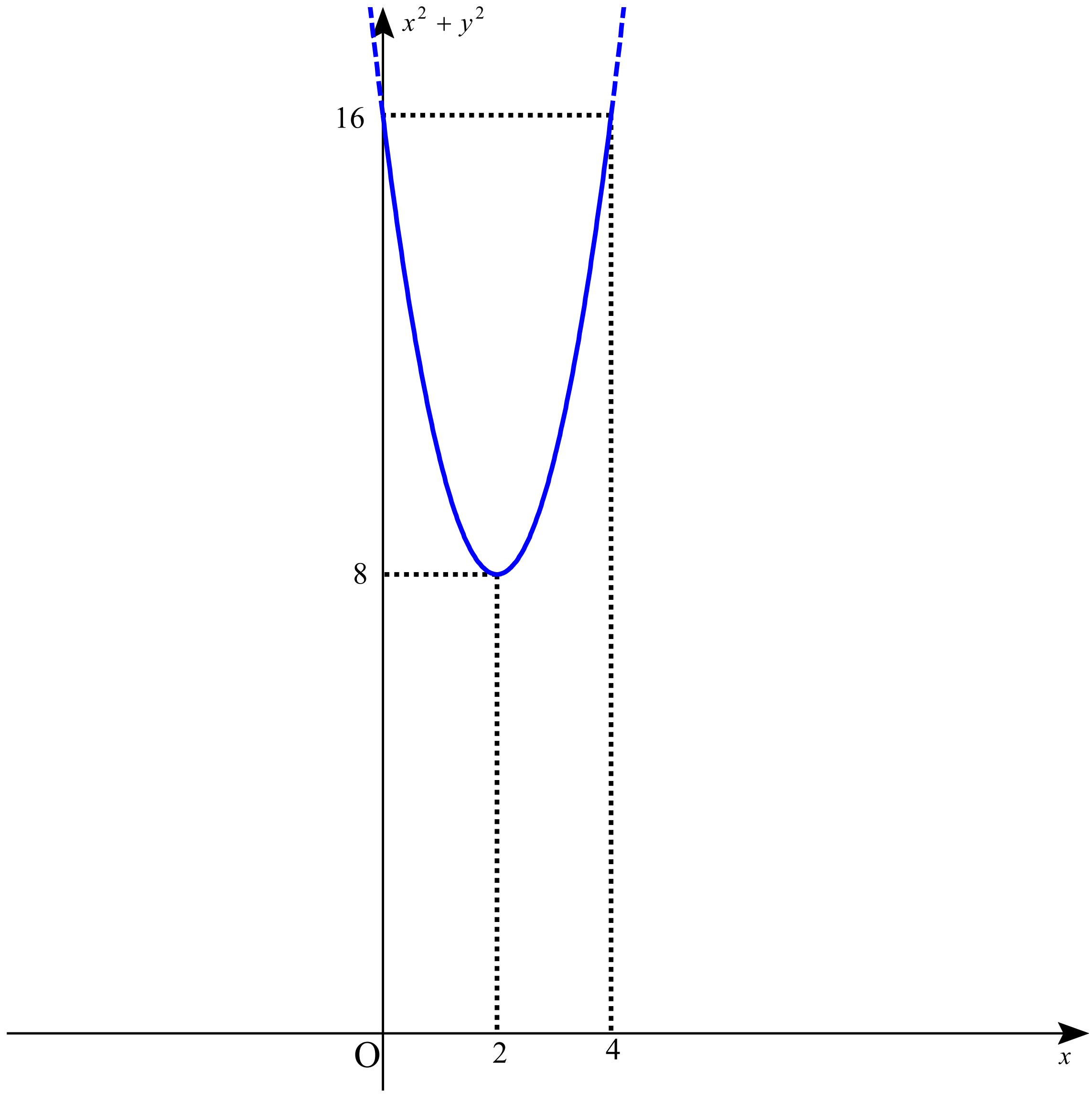
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2&=x^2+(-x+4)^2\\
&=2x^2-8x+16\\
&=2\left(x^2-4x\right)+16\\
&=2(x-2)^2+8
\end{aligned}
$$

ただし，$x\geq 0,\ y=-x+4\geq 0$ より，$0\leq x\leq 4$

よって，x^2+y^2 は $x=2$ で最小値 8 を，$x=0,\ 4$ で最大値 16 をとる。

また，$y=-x+4$ より，$x=2$ のとき $y=2$，$x=0$ のとき $y=4$，$x=4$ のとき $y=0$

ゆえに，$(x,\ y)=(2,\ 2)$ で最小値 8，$(x,\ y)=(0,\ 4),\ (4,\ 0)$ で最大値 16



158

(1)

$x^2 = t$ とおくと，

$y = -2t^2 + 4t + 3$

$= -2(t^2 - 2t) + 3$

$= -2(t-1)^2 + 5$

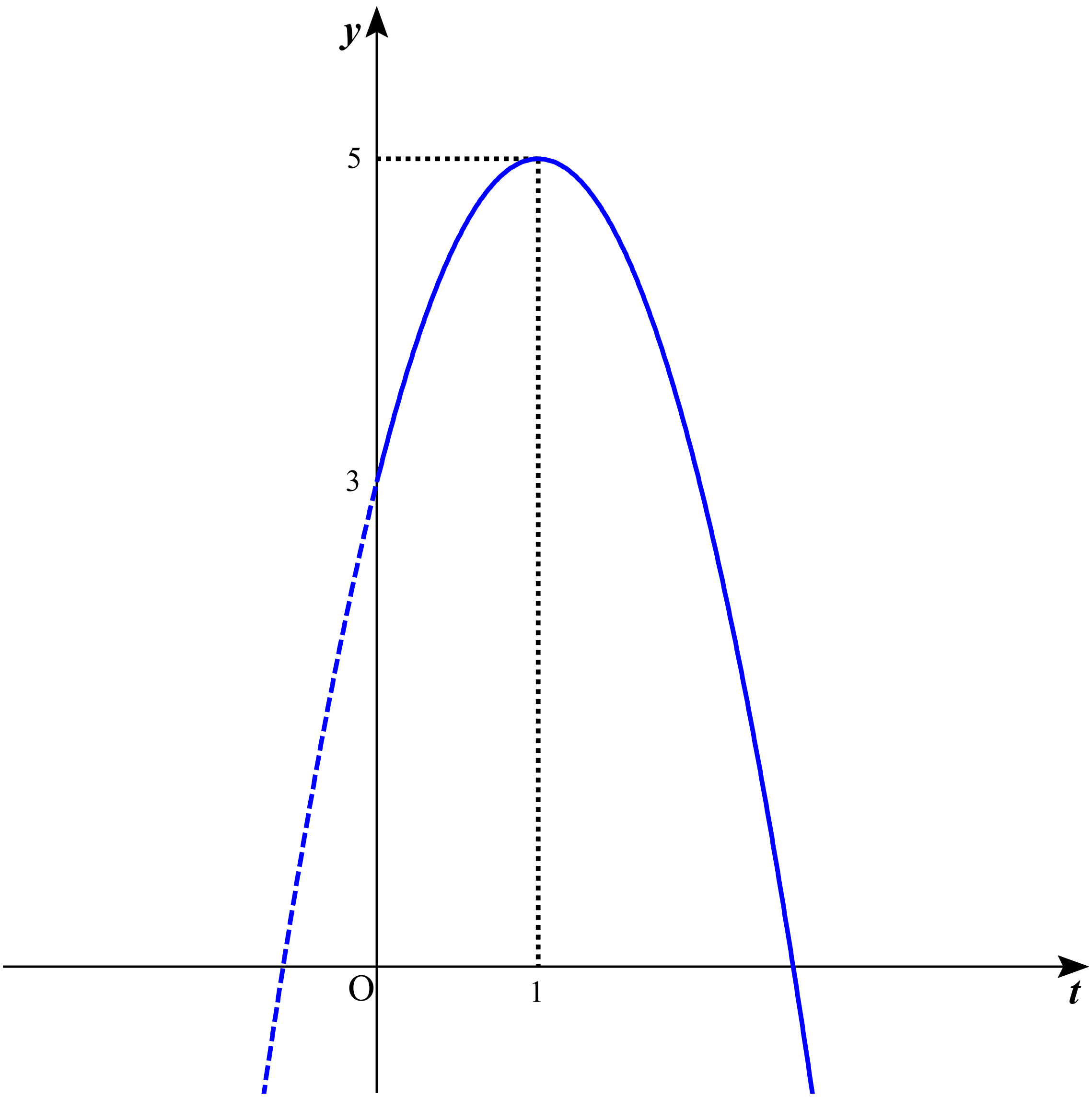
ただし，t の変域は，$x^2 \geq 0$ より，　$t \geq 0$

よって，この方程式のグラフは下図実線であり，これより y は $t = 1$ で最大値 5 をとる。

このとき $x^2 = 1$ より，　$x = \pm 1$

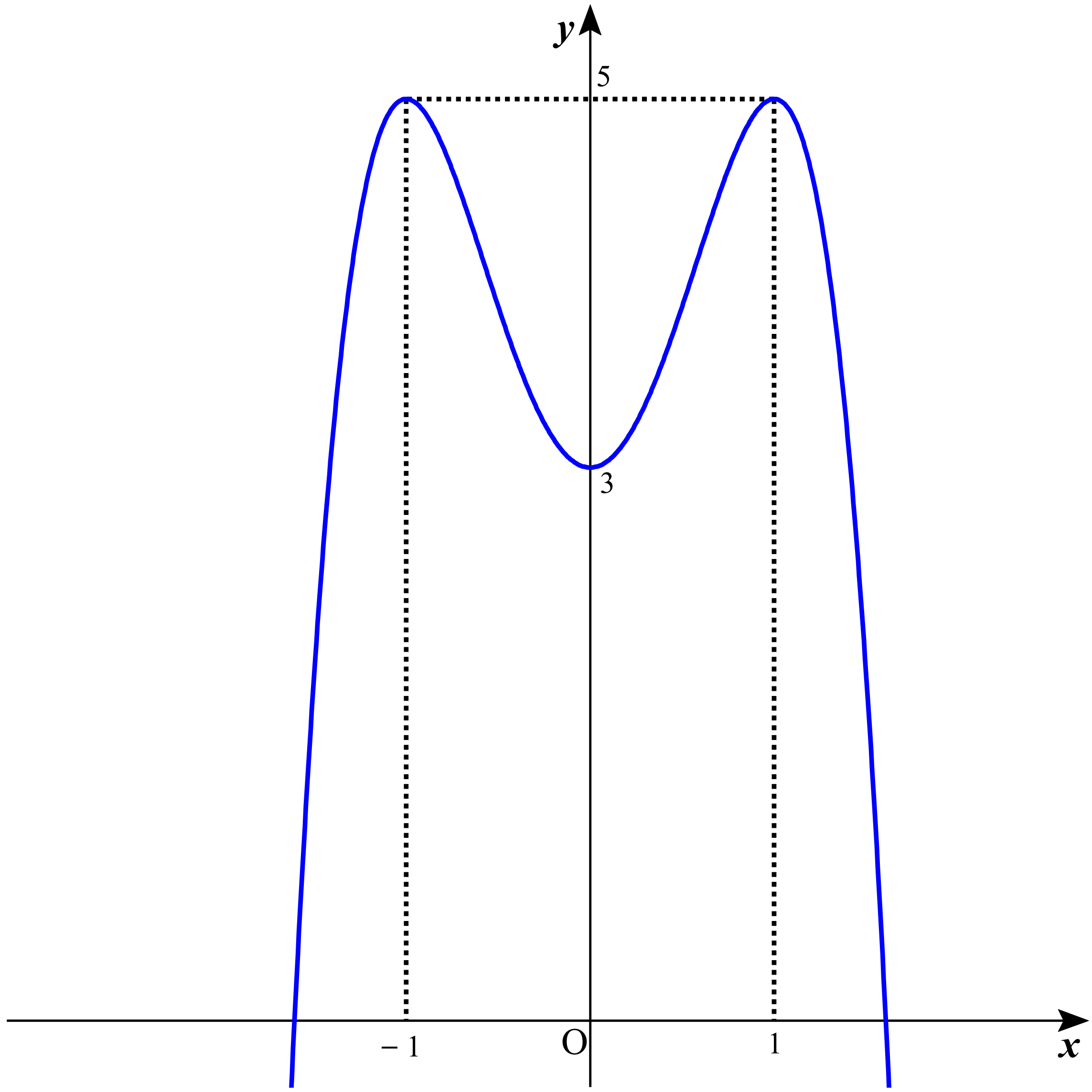
ゆえに、y は $x = \pm 1$ で最大値 5 をとる。

また，y の最小値は存在しない。



補足

$y = -2x^4 + 4x^2 + 3$ のグラフ



(2)

$x^2-2x=t$ とおくと，

$y=t^2+4t-1$

$\quad=(t+2)^2-5$

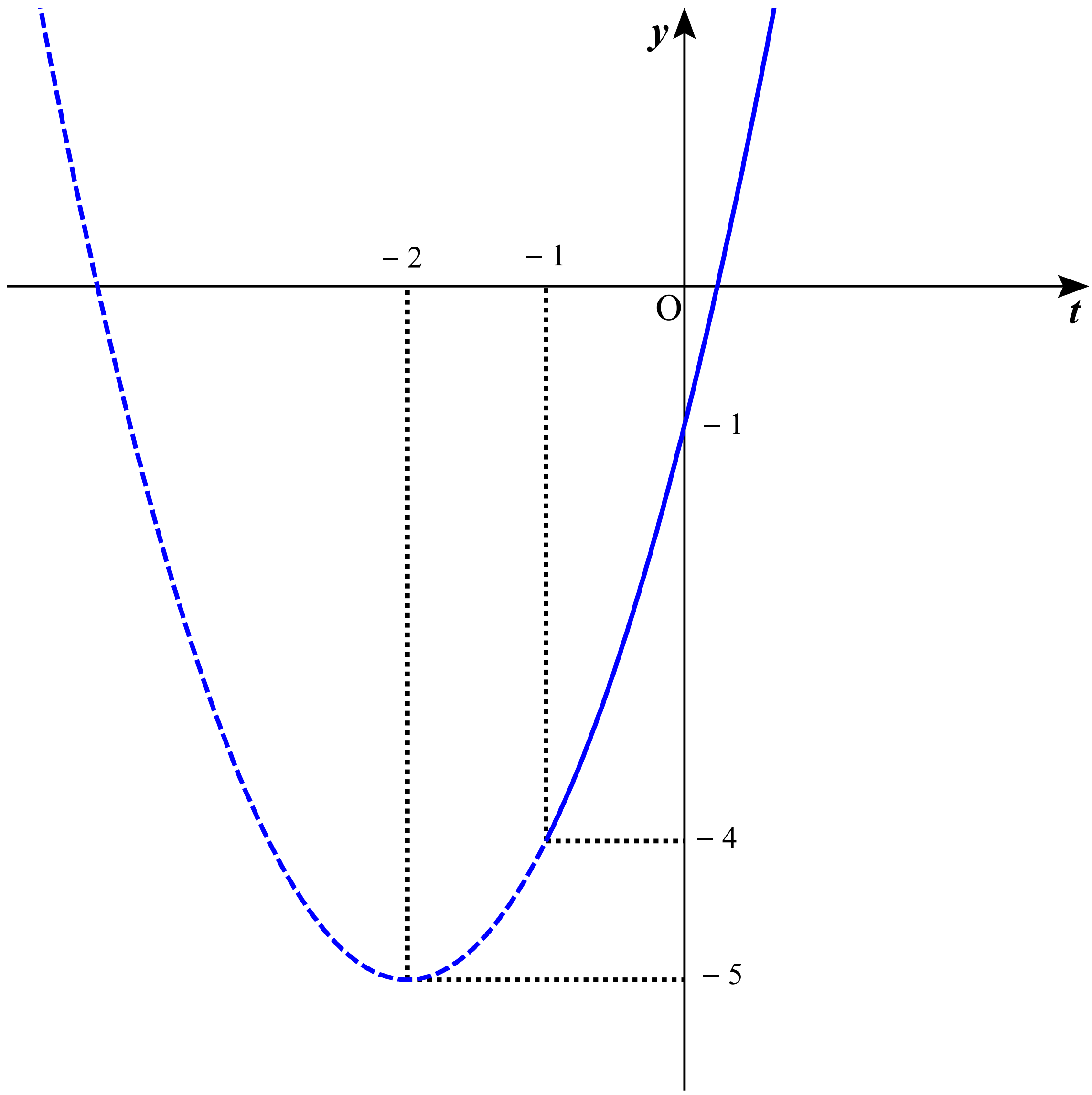
ただし，t の変域は，$x^2-2x=(x-1)^2-1\geq -1$ より，$t\geq -1$

よって，この方程式のグラフは下図実線であり，これより y は $t=-1$ で最小値 -4 をとる。

このとき $x^2-2x=-1$ すなわち $(x-1)^2=0$ より $x=1$

ゆえに，y は $x=1$ で最小値 -4 をとる。

また，最大値は存在しない。



補足

$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$ のグラフ