2次関数5　2次方程式

要点

解の公式

$ax^2+bx+c=0$ （a,b,c は定数， $a\neq 0$）

$b^2-4ac\geq 0$ ならば $ax^2+bx+c=0$ は実数解をもち，

その解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b=2b'$ （b が偶数）のとき，すなわち $ax^2+2b'x+c=0$ （a,b',c は定数， $a\neq 0$）のとき，

$b'^2-ac\geq 0$ ならば $ax^2+2b'x+c=0$ は実数解をもち，

その解は $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

解の公式の導き方

$ax^2+bx+c=0$ （a,b,c は定数， $a\neq 0$）

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right\}\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right\}
\end{aligned}$$

より，

$ax^2+bx+c=0$ （a,b,c は定数， $a\neq 0$）ならば $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-b^2+4ac}{4a^2}=0$

すなわち $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

よって， $b^2-4ac\geq 0$ ならば， $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ より， $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b=2b'$（b が偶数）のとき，すなわち $ax^2+2b'x+c=0$（a,b',c は定数，$a\neq 0$）のとき

$ax^2+bx+c=0$ の解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ に $b=2b'$ を代入して整理すると，

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}\\
&=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}\\
&=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}\\
&=\frac{2\left(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}\right)}{2a}\\
&=\frac{-b'^2\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}
\end{aligned}
$$

補足

$2b'=b$ として，$ax^2+bx+c=0$ の解の公式を使ってもよいが，
計算が面倒になるだけなので，避けるべき。

解の個数

$ax^2+bx+c=0$ （a,b,c は定数，$a\neq 0$）の場合

解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ だから、$\sqrt{b^2-4ac}$ について，

$b^2-4ac>0$ のとき

$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となり，異なる 2 つの実数解をもつ。

$b^2-4ac=0$ のとき

$x=\dfrac{-b+0}{2a}$，$\dfrac{-b-0}{2a}$ すなわち 2 つの解がいずれも $-\dfrac{b}{2a}$ となる。

このように 2 つの解が一致する場合，「重解をもつ」という。

補足

3 次方程式では，3 つの解が一致することがあり，この場合「3 重解をもつ」という。

$b^2-4ac<0$ のとき

$\sqrt{p}$ が実数であるための必要十分条件は $p\geq 0$ であることである。

たとえば，$\sqrt{-2}$ は実数ではない。

また，$5+\sqrt{-2}$ のように実数でない数 $\sqrt{-2}$ を含む数も実数ではない。

したがって，$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ は

実数ではない数 $\sqrt{b^2-4ac}$ を含むので実数ではない。

ゆえに，実数解をもたない。

補足

数学Ⅱ 複素数の予習

$\sqrt{-2}$ のような数を虚数という。

$\sqrt{-2}=\sqrt{2\times -1}=\sqrt{2}\times\sqrt{-1}$ と変形し，さらに $\sqrt{-1}$ を記号 i で表し，$\sqrt{2}i$ とする。

すなわち $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$ （i を「虚数単位」という）

$i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$ である。

解の個数のまとめ

b^2-4ac を判別式という。

(一々 b^2-4ac 書くのは面倒なので,）判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，

異なる 2 実数解をもつ $\Leftrightarrow D>0$

同じ 2 つの実数解（重解）をもつ $\Leftrightarrow D=0$

実数解をもたない $\Leftrightarrow D<0$

補足 1

$D=b^2-4ac$ とおくと，

$ax^2+bx+c=0$ （a,b,c は定数，$a\neq 0$）の解は，$\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ とシンプルに表せる。

補足 2

$b=2b'$（b が偶数）のとき，すなわち $ax^2+2b'x+c=0$（a,b',c は定数，$a\neq 0$）のとき，

$D=(2b')^2-4ac=4\left(b'^2-ac\right)$ より，$b'^2-ac=\dfrac{D}{4}$

よって，その解は $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$

176

(1)

$a^2x+1=a(x+1)$ より，$(a-1)(ax-1)=0$

補足

$$
\begin{aligned}
a^2x+1=a(x+1) &\Leftrightarrow a^2x+1=ax+a \\
&\Leftrightarrow a^2x-ax-a+1=0 \\
&\Leftrightarrow a(a-1)x-(a-1)=0 \\
&\Leftrightarrow (a-1)(ax-1)=0
\end{aligned}
$$

$a=1$ のとき

$0\cdot(x-1)=0$ より，解 x は全ての実数

$a=0$ のとき

$-(0\cdot x-1)=0$ を満たす実数 x は存在しないから，解なし

$a\neq 1$ かつ $a\neq 0$ のとき，

$ax-1=0$ であればよいから，これを解くと，$x=\dfrac{1}{a}$

(2)

$ax^2+\left(a^2-1\right)x-a=(ax-1)(x+a)$ より，$(ax-1)(x+a)=0$

$a=0$ のとき

$-x=0$ より，$x=0$

$a\neq 0$ のとき

$x=\dfrac{1}{a},\ -a$

補足

$a=0$ だと $\dfrac{1}{a}$ が定義できない（数値が確定しない）ので，a が 0 か否かで場合分け

177

ポイント：m の消去から始める。

解法 1

共通解を α とすると，

$\alpha^2+2\alpha+m=0$　・・・①

$\alpha^2+3\alpha+2m=0$　・・・②

②－①より，$m+\alpha=0$　すなわち $m=-\alpha$　・・・③

これを①に代入し整理すると，$\alpha^2+\alpha=0$ より，$\alpha(\alpha+1)=0$

(②に代入して整理してもよい。)

これを解いて，$\alpha=0,\ -1$

よって，③より，$\alpha=0$ のとき $m=0$，$\alpha=-1$ のとき $m=1$

ゆえに，$m=0$ で共通解 0，$m=1$ で共通解 -1

補足

α と m の連立方程式を次のようにして解いている。

$$\begin{cases}\alpha^2+2\alpha+m=0\\ \alpha^2+3\alpha+2m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\alpha\\ \alpha^2+2\alpha+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\alpha\\ \alpha(\alpha+1)\end{cases}\quad\therefore(\alpha,\ m)=(0,\ 0),\ (-1,\ 1)$$

解法 2

共通解を α とすると，

$\alpha^2+2\alpha+m=0$　・・・①

$\alpha^2+3\alpha+2m=0$　・・・②

①より，$m=-\alpha^2-2\alpha$　・・・③

これを②に代入し整理すると，$\alpha^2+\alpha=0$ より，$\alpha(\alpha+1)=0$

よって，③より，$\alpha=0$ のとき $m=0$，$\alpha=-1$ のとき $m=1$

ゆえに，$m=0$ で共通解 0，$m=1$ で共通解 -1

補足

α と m の連立方程式を次のようにして解いている。

$$\begin{cases}\alpha^2+2\alpha+m=0\\ \alpha^2+3\alpha+2m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\alpha^2-2\alpha\\ \alpha^2+2\alpha+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\alpha^2-2\alpha\\ \alpha(\alpha+1)=0\end{cases}\quad\therefore(\alpha,\ m)=(0,\ 0),\ (-1,\ 1)$$