2 次関数 6　グラフと 2 次方程式

要点

$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標 $\Leftrightarrow$ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解

解説

x 軸とは直線 $y=0$ のことである。

したがって，$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点とは，

連立方程式 $\begin{cases} y=0 \\ y=ax^2bx+c \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} y=0 \\ 0=ax^2+bx+c \end{cases}$ の解である。

ゆえに，$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は $ax^2+bx+c=0$ の解である。

ということは，

2 次関数のグラフ		2 次方程式の解		判別式
x 軸と異なる 2 点で交わる	$\Leftrightarrow$	**異なる 2 つの実数解をもつ**	$\Leftrightarrow$	$D>0$
x 軸と 1 点で接する	$\Leftrightarrow$	**同じ 2 つの実数解（重解）をもつ**	$\Leftrightarrow$	$D=0$
x 軸と共有点をもたない	$\Leftrightarrow$	**実数解をもたない**	$\Leftrightarrow$	$D<0$

が成り立つ。

実際に確かめてみよう。

$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c \\ &=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

より，$y=ax^2+bx+c$ は $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ を頂点とし，

$a>0$ ならば下に凸，$a<0$ ならば上に凸のグラフである。

下に凸の場合

頂点の y 座標が負，すなわち $-\frac{b^2-4ac}{4a}<0$ ならば x 軸と異なる 2 点で交わる。

これと，下に凸のグラフは $a>0$ であることから，

$-(b^2-4ac)<0$ すなわち $b^2-4ac>0$ である。

b^2-4ac は 2 次方程式の「判別式を $D=b^2-4ac$ とする」の D のことであるから，

$D>0$ ならば異なる x 軸と異なる 2 点で交わる。

逆に，$D=b^2-4ac>0$ ならば x 軸と異なる 2 点で交わる。

頂点の y 座標が 0，すなわち $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0$ ならば x 軸と接する。

このとき $b^2-4ac=0$ だから， $D=0$ である。

逆に $D=b^2-4ac=0$ ならば x 軸と接する。

頂点の y 座標が正，すなわち $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$ ならば

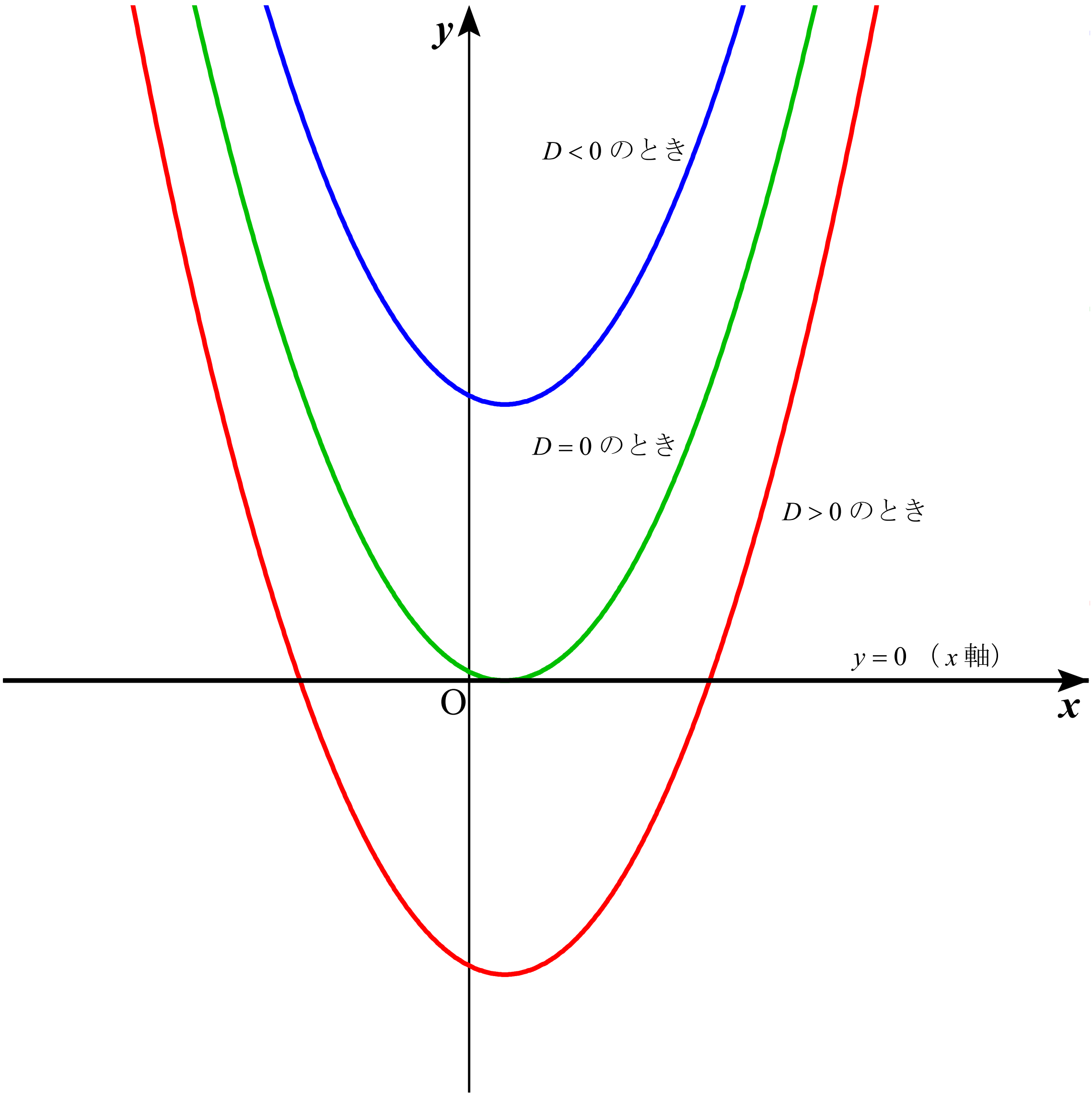
すべての実数 x に対し $y>0$ となるため， x 軸と共有点をもたない。

これと，下に凸のグラフは $a>0$ であることから，

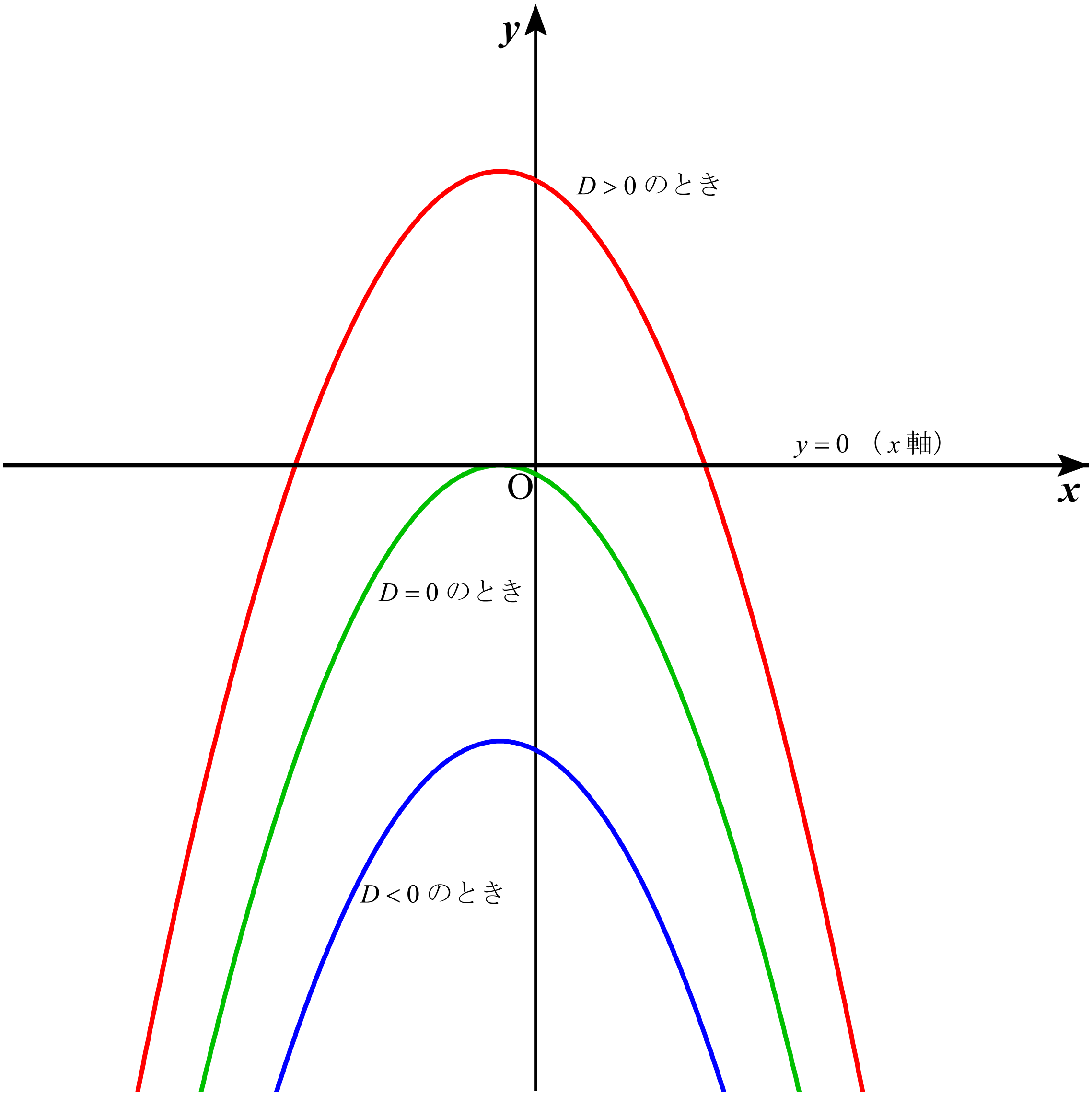
$-(b^2-4ac)>0$ すなわち $b^2-4ac<0$ である。

よって， $D<0$

逆に， $D<0$ ならば x 軸と共有点をもたない。



上に凸の場合も同じである。



182

ポイント

2 次関数のグラフ		2 次方程式の解		判別式
x 軸と異なる 2 点で交わる	$\Leftrightarrow$	異なる 2 つの実数解をもつ	$\Leftrightarrow$	$D>0$
x 軸と 1 点で接する	$\Leftrightarrow$	同じ 2 つの実数解（重解）をもつ	$\Leftrightarrow$	$D=0$
x 軸と共有点をもたない	$\Leftrightarrow$	実数解をもたない	$\Leftrightarrow$	$D<0$

x 軸は直線 $y=0$ のことだから，$y=x^2-4x+2m$ のグラフと x 軸との共有点は

連立方程式 $\begin{cases} y=0 \\ y=x^2-4m+2x \end{cases}$ の実数解である。

y の実数解は 0 だから，x の実数解，すなわちグラフと x 軸の共有点の x 座標は

2 次方程式 $x^2-4x+2m=0$ の実数解である。

したがって，共有点の数は $x^2-4x+2m=0$ が異なる 2 つの実数解をもつならば 2,

重解をもつならば 1，実数解をもたないならば 0 である。

解

グラフと x 軸との共有点において，$\begin{cases} y=0 \\ y=x^2-4m+2x \end{cases}$ が成り立つ。

したがって，共有点の数は 2 次方程式 $x^2-4x+2m=0$ の実数解の数と一致する。

そこで，$x^2-4x+2m=0$ の判別式を D とすると，$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot2m=-8(m-2)$ より，

$D>0$ のときすなわち $m<2$ のとき $x^2-4x+2m=0$ は異なる 2 つの実数解をもつから，

共有点の数は 2

$D=0$ のときすなわち $m=2$ のとき $x^2-4x+2m=0$ は重解をもつから，

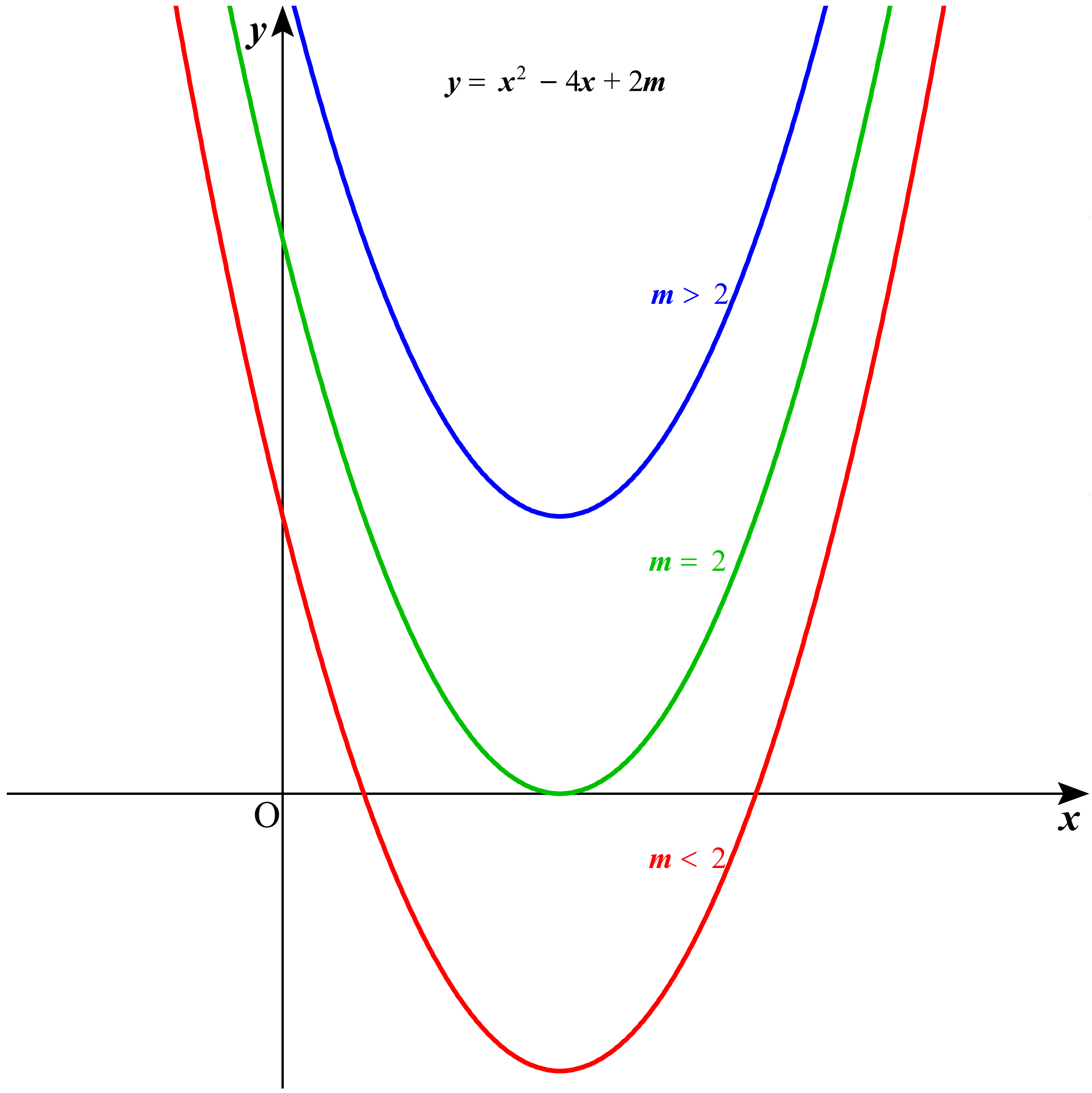
共有点の数は 1

$D<0$ のときすなわち $m>2$ のとき $x^2-4x+2m=0$ は実数解をもたないから，

共有点の数は 0

補足：判別式の扱いについて

$ax^2+2b'x+c=0$ の場合 $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ だから，$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot2m=-2(m-2)$ としてもよい。


y
y = x^2 − 4x + 2m
m > 2
m = 2
O
x
m < 2

183

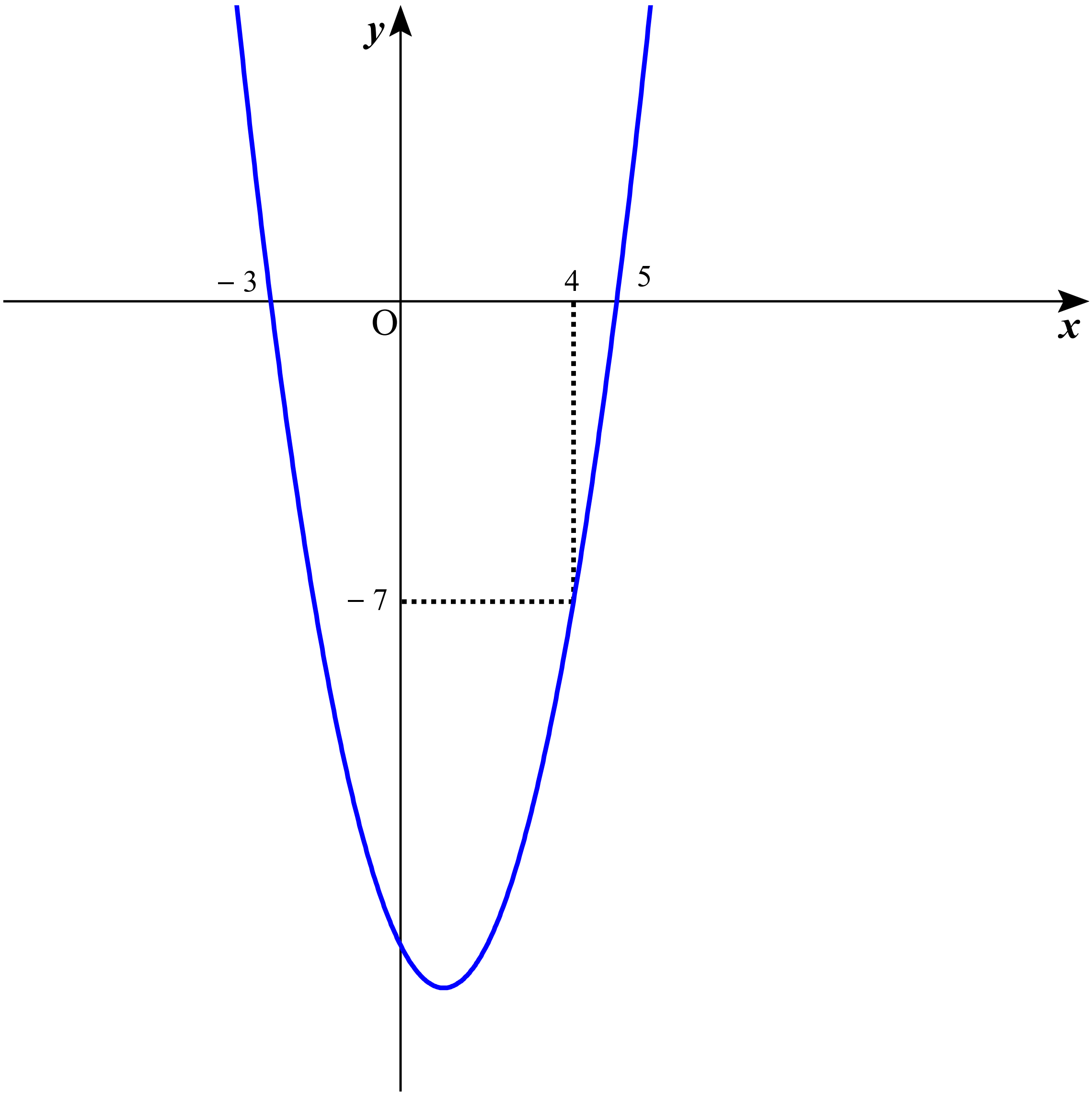
(1)

点$(-3,\ 0)$と点$(5,\ 0)$を通ることから，

放物線の方程式は$y = a(x+3)(x-5)$と表される。

この放物線が点$(4,\ -7)$を通るから，$-7 = a(4+3)(4-5)$　$\therefore a = 1$

ゆえに，求める放物線の方程式は$y = (x+3)(x-5)$　$(y = x^2 - 2x - 15)$

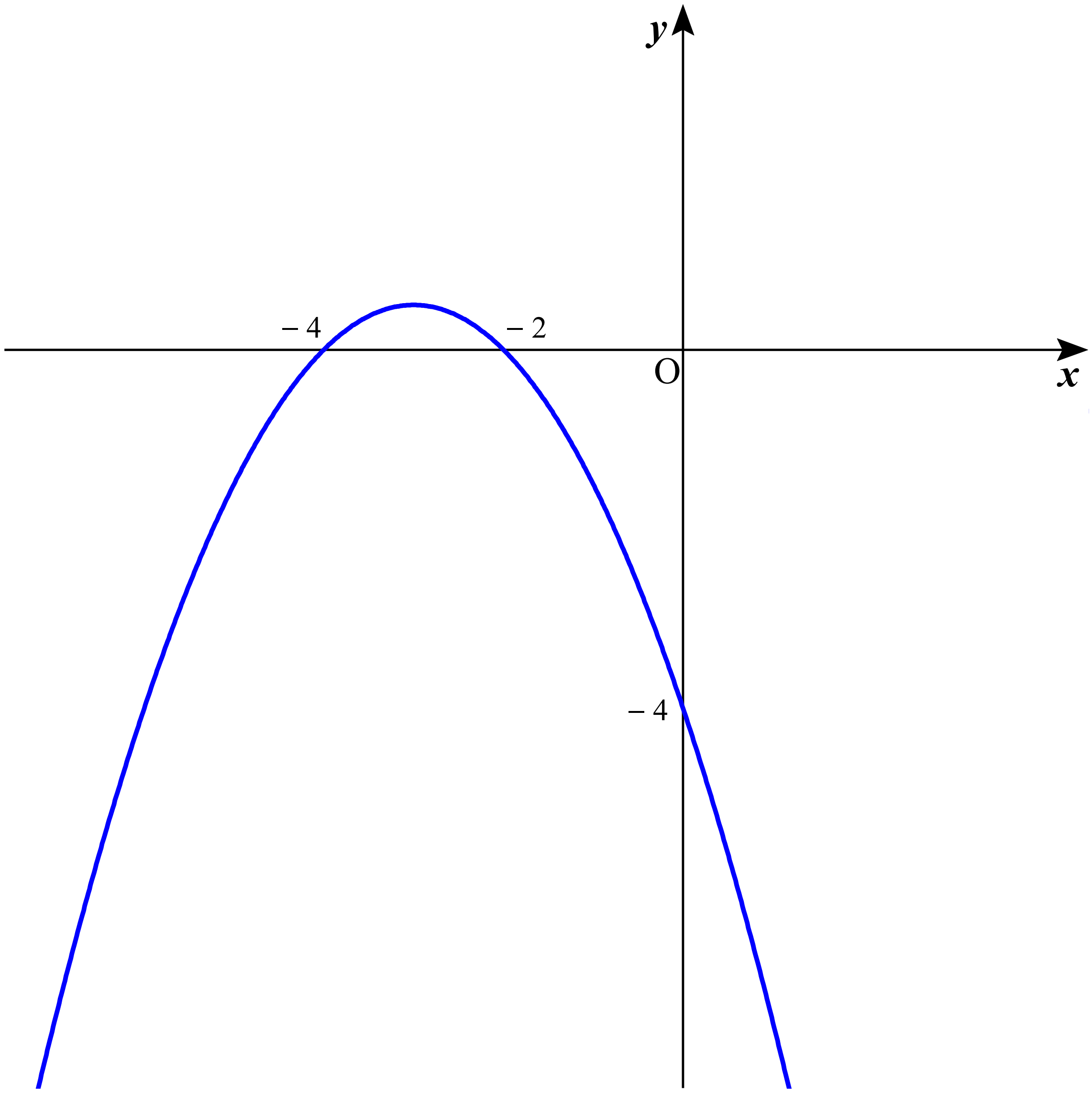


(2)

点$(-4,\ 0)$と点$(-2,\ 0)$を通ることから，
放物線の方程式は$y=a(x+4)(x+2)$と表される。

この放物線が点$(0,\ -4)$を通るから，$-4=a(0+4)(0+2)$　$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，求める放物線の方程式は$y=-\dfrac{1}{2}(x+4)(x+2)$　$\left(y=-\dfrac{1}{2}x^2-3x-4\right)$

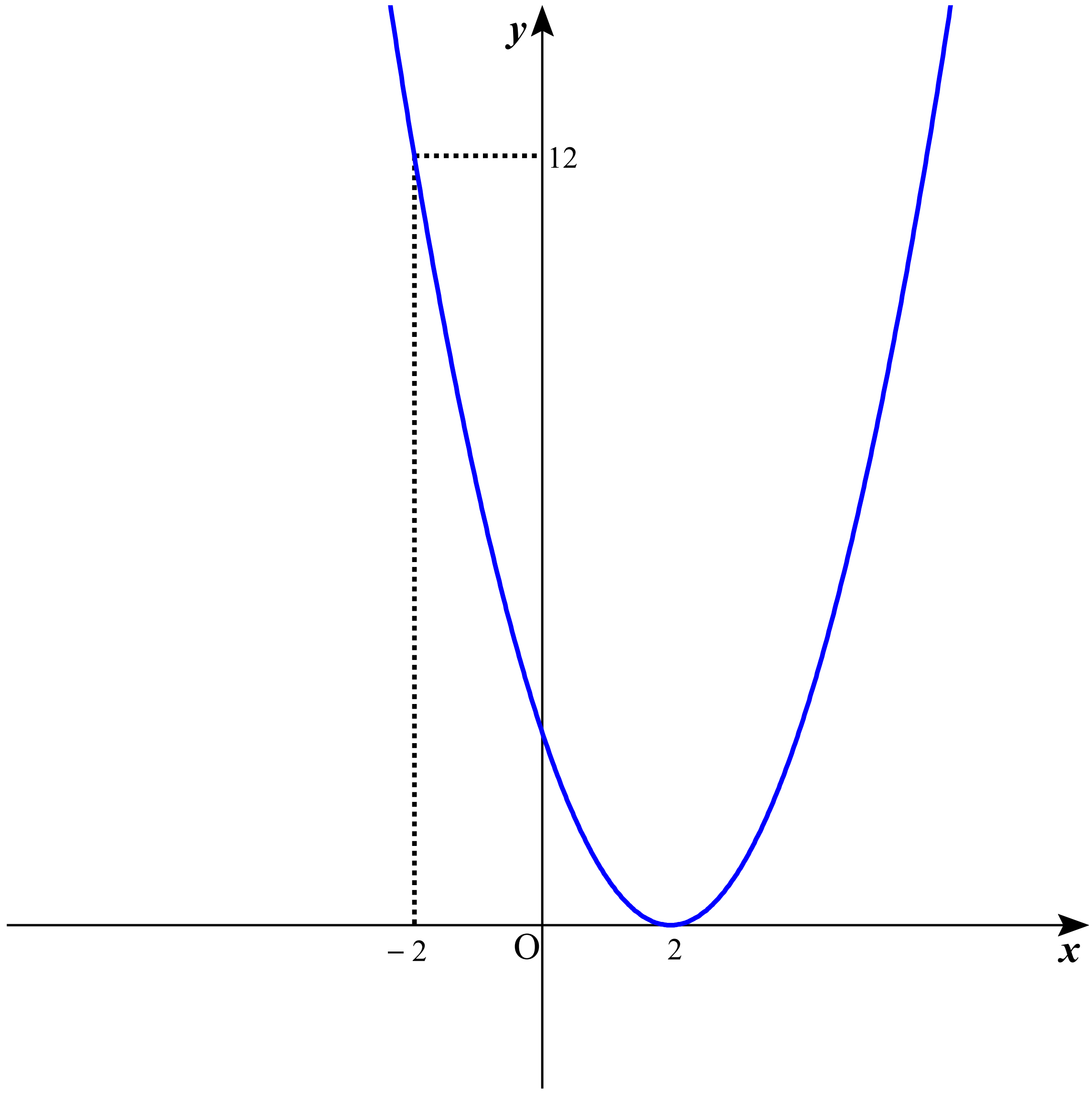


(3)

点$(2,\ 0)$でx軸と接することから，放物線の方程式は$y=a(x-2)^2$と表される。

この放物線が点$(-2,\ 12)$を通るから，$12=a(-2-2)^2$　$\therefore a=\dfrac{3}{4}$

ゆえに，求める放物線の方程式は$y=\dfrac{3}{4}(x-2)^2$　$\left(y=\dfrac{3}{4}x^2-3x+3\right)$



184

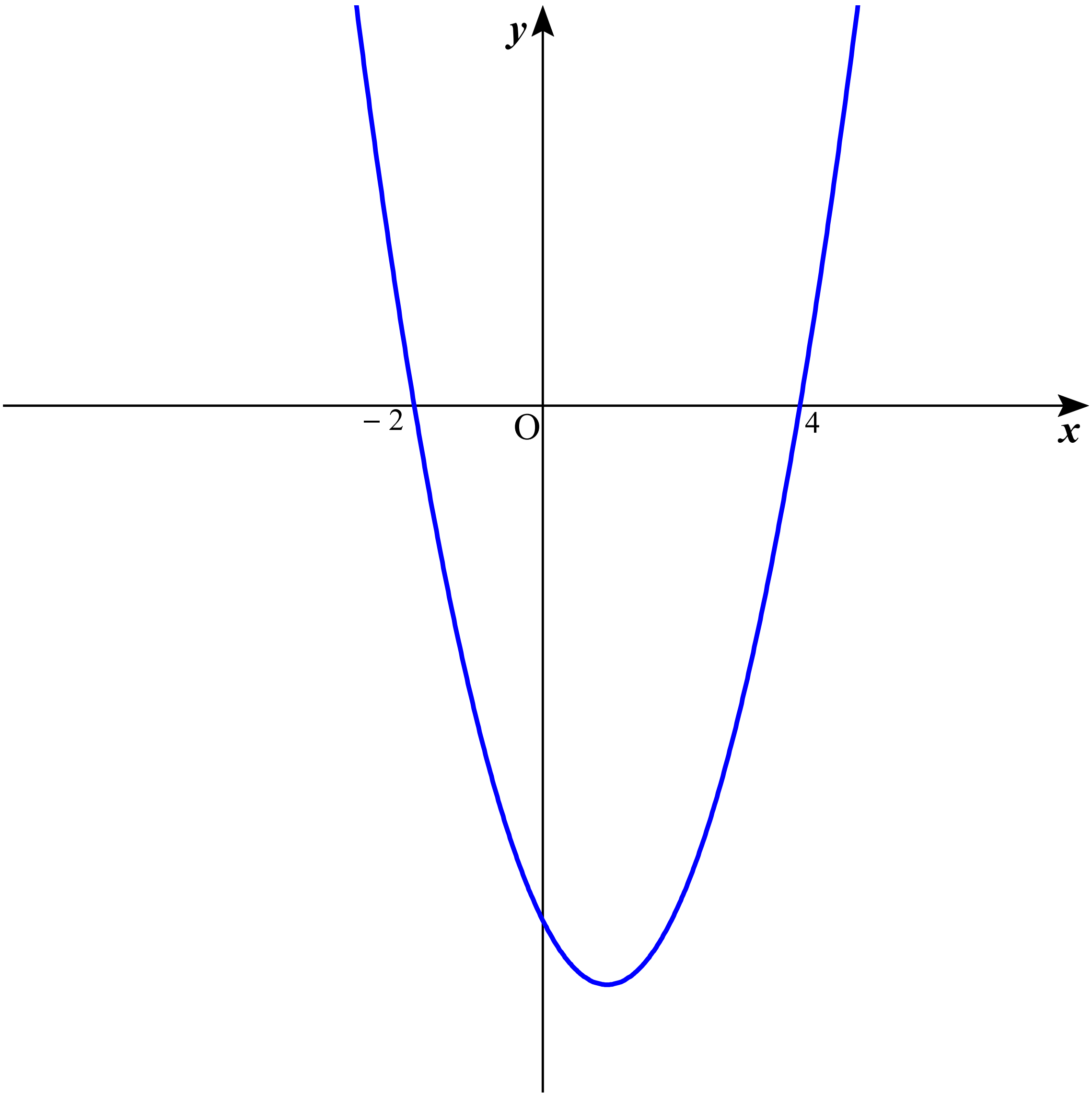
(1)

x 軸はグラフと x 軸の共有点で切断される。

共有点の x 座標は $x^2-2x-8=0$ の実数解であり，

$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$ より， $x=-2,\ 4$

よって，切り取られる線分の長さは $4-(-2)=6$

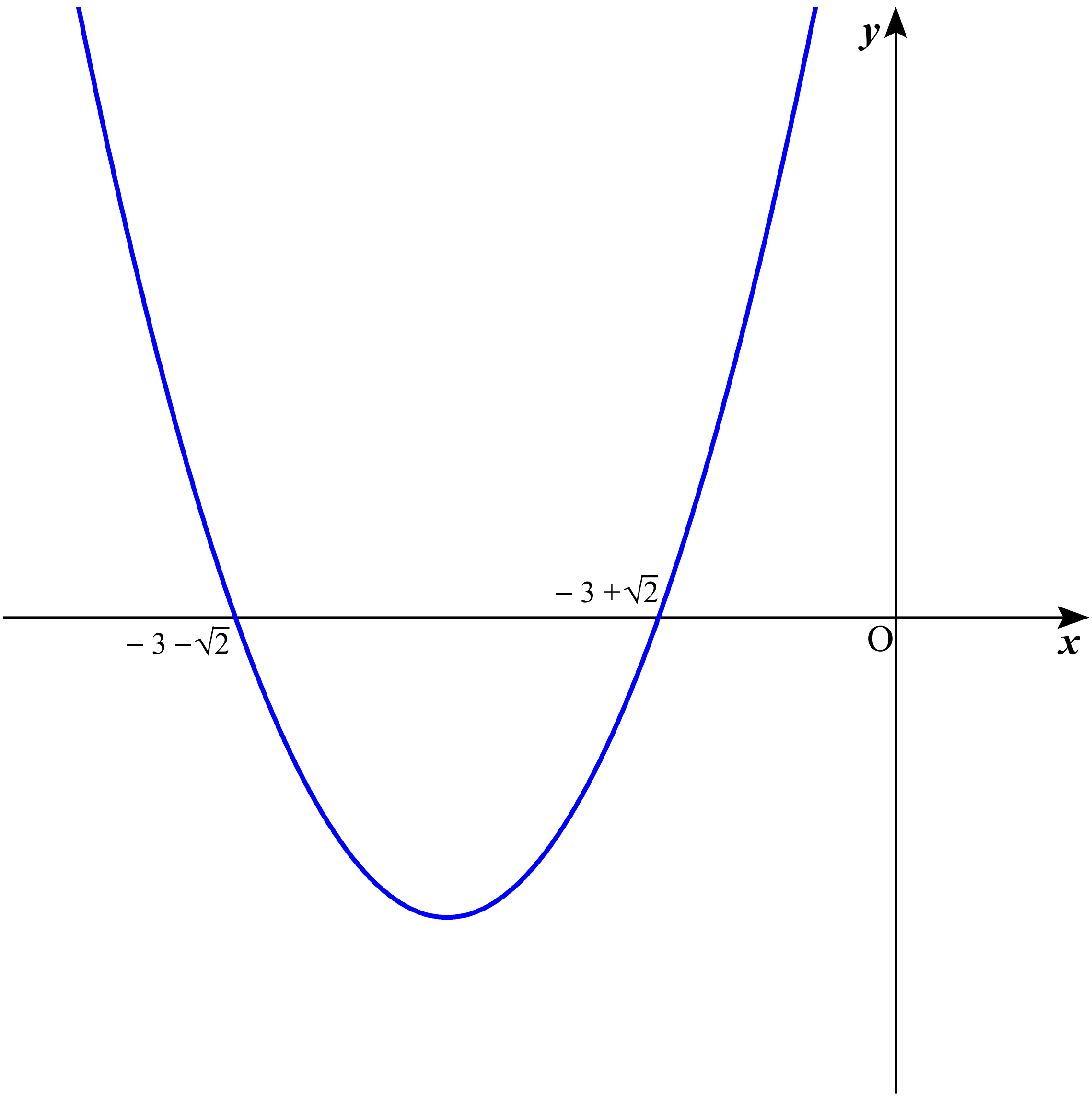


(2)

x 軸はグラフと x 軸の共有点で切断される。

共有点の x 座標は $x^2+6x+7=0$ の実数解であり，解の公式より，$x=-3+\sqrt{2},\ -3-\sqrt{2}$

よって，切り取られる線分の長さは $-3+\sqrt{2}-\left(-3-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$



185

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

より，

$y=ax^2+bx+c$ のグラフの軸は $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(1)

上に凸のグラフだから， $a<0$

グラフの軸が正だから $-\dfrac{b}{2a}>0$

これと $a<0$ より， $b>0$

$x=0$ で $y=c$ であり，グラフより $y<0$ だから， $c<0$

(2)

解法 1

グラフと x 軸すなわち $y=0$ の共有点が 2 個あることから，

$ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 実数解をもつ。

よって， $b^2-4ac>0$

解法 2

グラフから頂点の y 座標は負だから， $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$

これと $a<0$ より， $b^2-4ac>0$

(3)

$y=ax^2+bx+c$ より， $x=1$ のとき $y=a+b+c$

グラフより， $x=1$ のとき $y>0$

よって， $a+b+c>0$

(4)

$y=ax^2+bx+c$ より， $x=-1$ のとき $y=a-b+c$

グラフより， $x=-1$ のとき $y<0$

よって， $a-b+c>0$

(5)

グラフと x 軸の共有点の x 座標は $ax^2+bx+c=0\ \left(b^2-4ac>0\right)$ の実数解であり，

その解は，解の公式より， $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

これと $a<0$ より， $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

よって，大きい方の解は $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

グラフより，大きい方の解は 1 より大きい，すなわち $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>1$

よって， $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1>0$

186

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-0\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+0\right)$$
$$=\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$
$$=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$
$$=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$
$$=\frac{4ac}{4a^2}$$
$$=\frac{c}{a}$$

$$\mathrm{PQ}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

187

(1)

共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} y=x^2 & \cdots① \\ y=x+2 & \cdots② \end{cases}$ の実数解である。

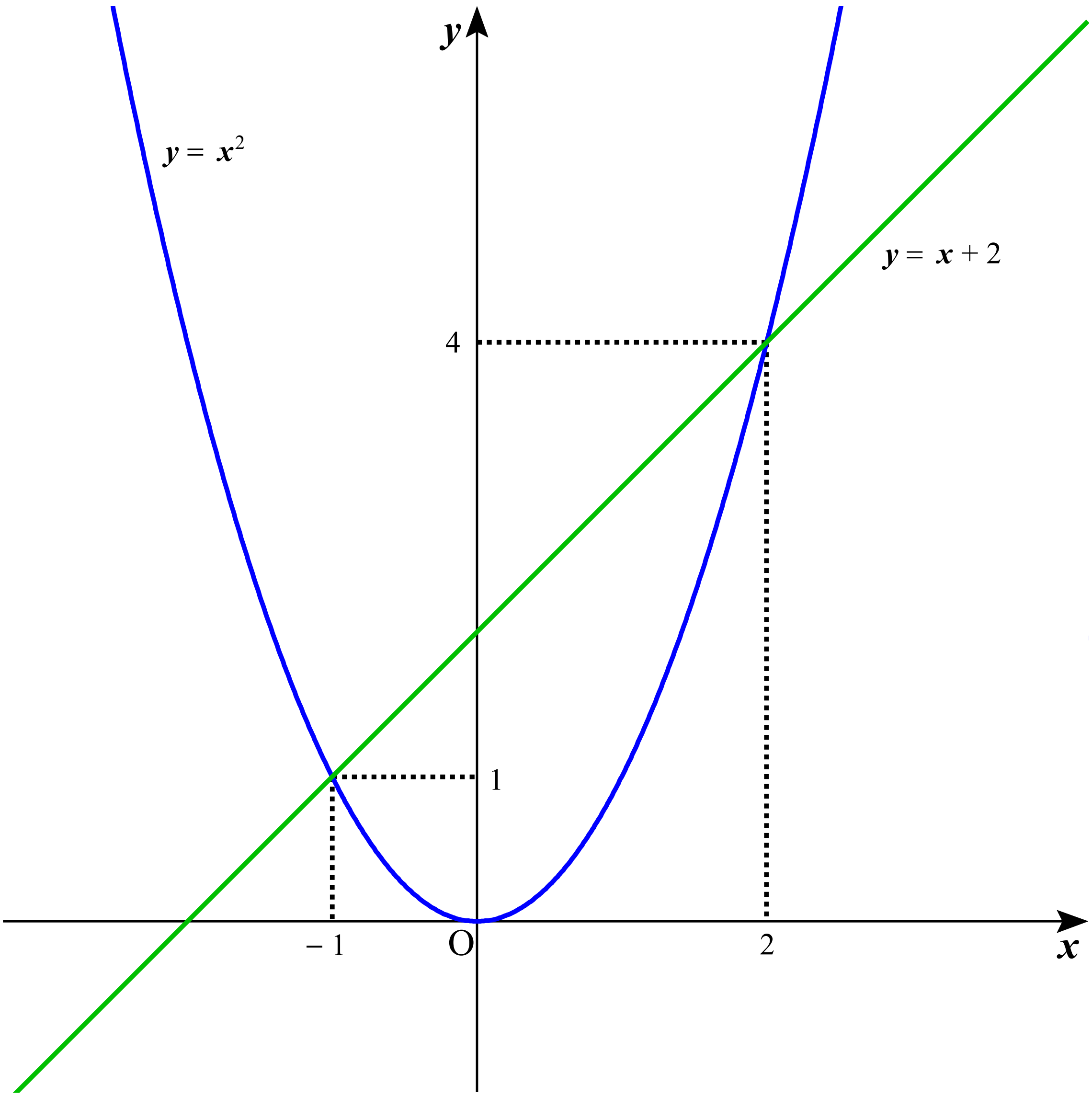
①，②より，$x^2=x+2$ すなわち $x^2-x-2=0$

これより，$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1,\ 2$

これと $y=x+2$ （または $y=x^2$）より，共有点の座標は $(x,\ y)=(-1,\ 1),\ (2,\ 4)$

補足：連立方程式の流れ

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x+2 \\ y=x+2 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x+2 \\ y=x^2 \end{cases}$$



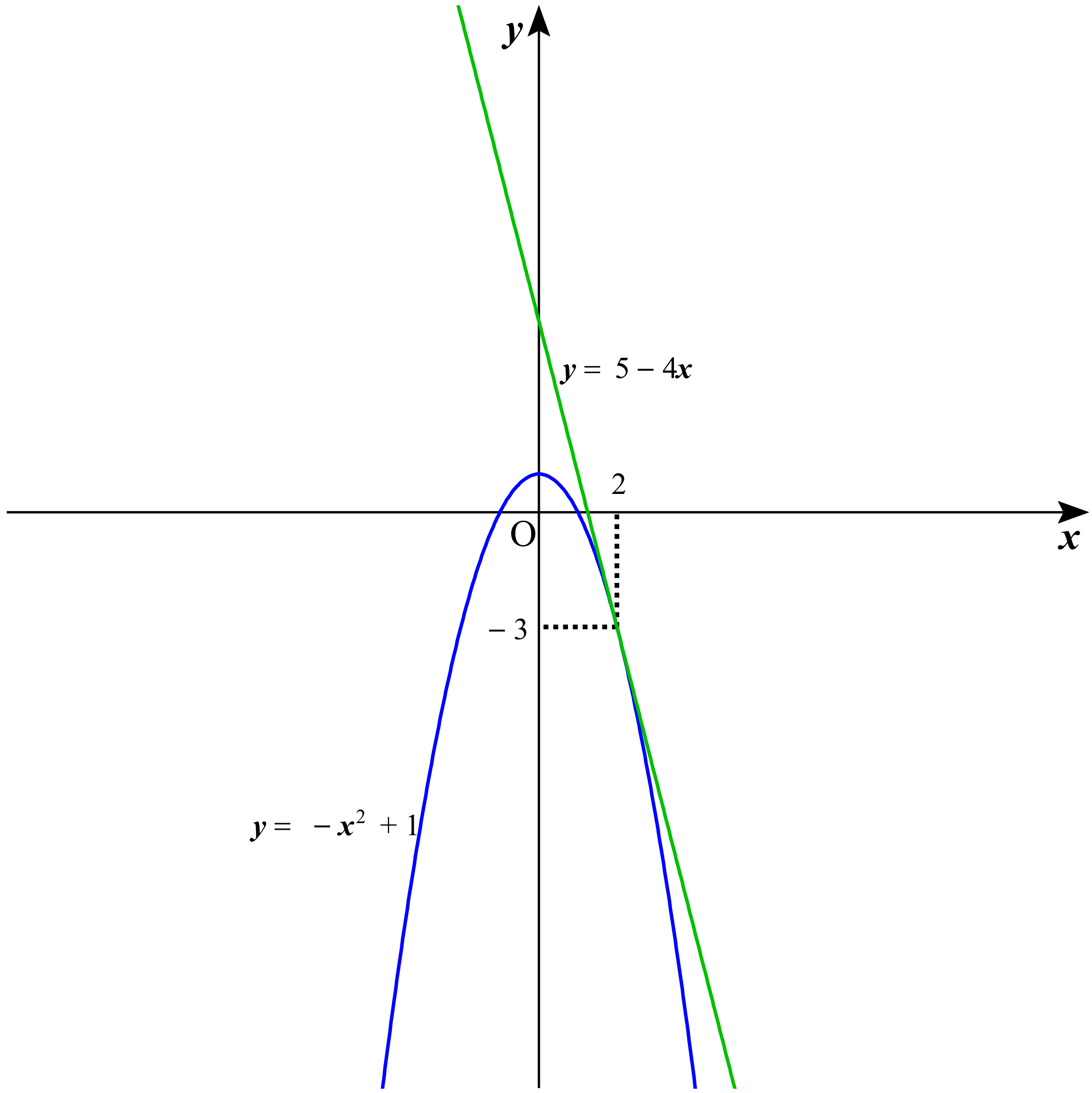
(2)

共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} y=-x^2+1 & \cdots① \\ y=5-4x & \cdots② \end{cases}$ の実数解である。

①，②より，$-x^2+1=5-4x$ すなわち $x^2-4x+4=0$

これより，$(x-2)^2=0$　　$\therefore x=2$

これと $y=5-4x$ （または $y=-x^2+1$）より，共有点の座標は $(x,\ y)=(2,\ -3)$



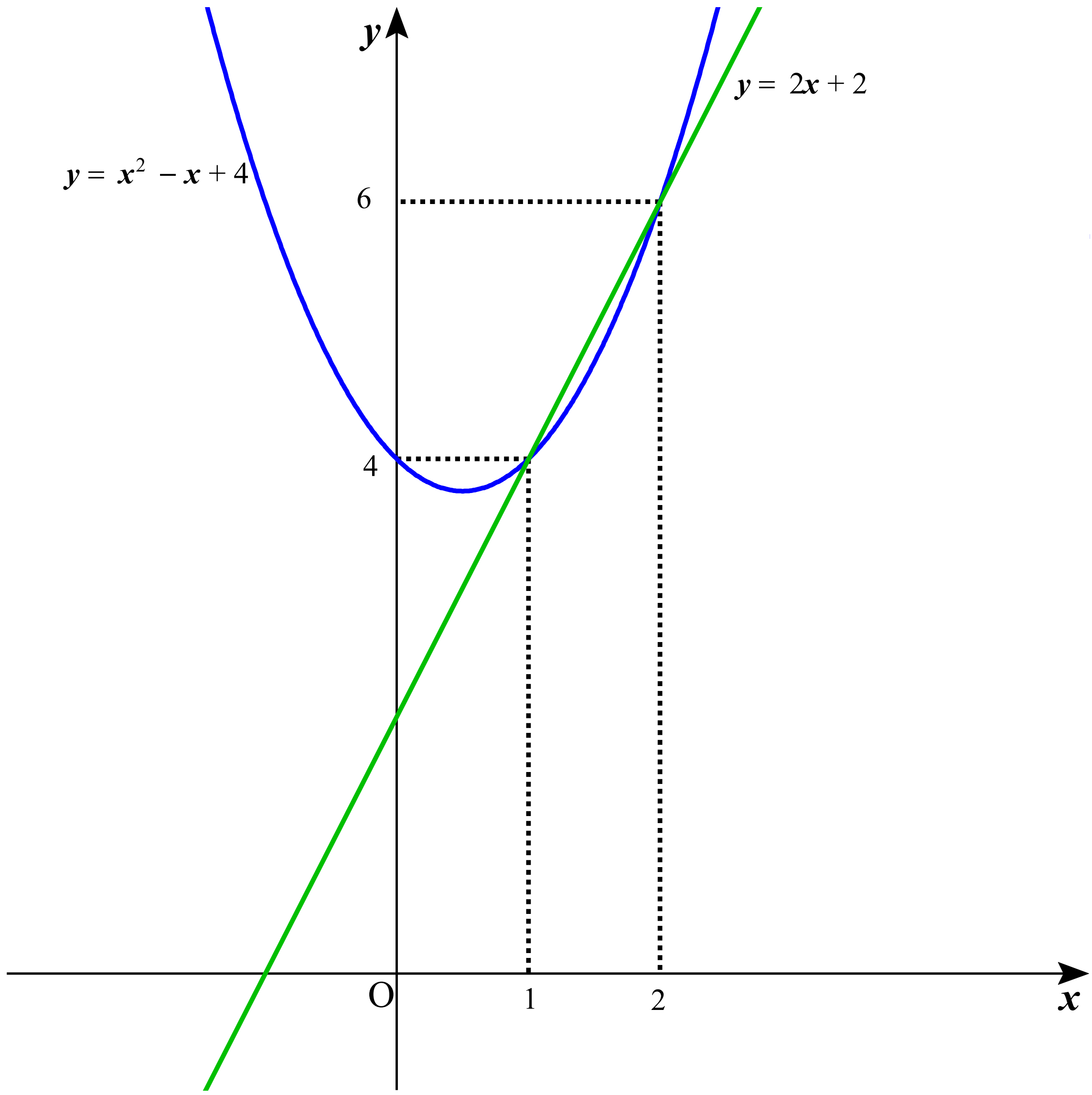
(3)

共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} y = x^2 - x + 4 & \cdots① \\ y = 2x + 2 & \cdots② \end{cases}$の実数解である。

①，②より，$x^2 - x + 4 = 2x + 2$ すなわち $x^2 - 3x + 2 = 0$

これより，$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1,\ 2$

これと $y = 2x + 2$（または $y = x^2 - x + 4$）より，共有点の座標は $(x,\ y) = (1,\ 4),\ (2,\ 6)$



(4)

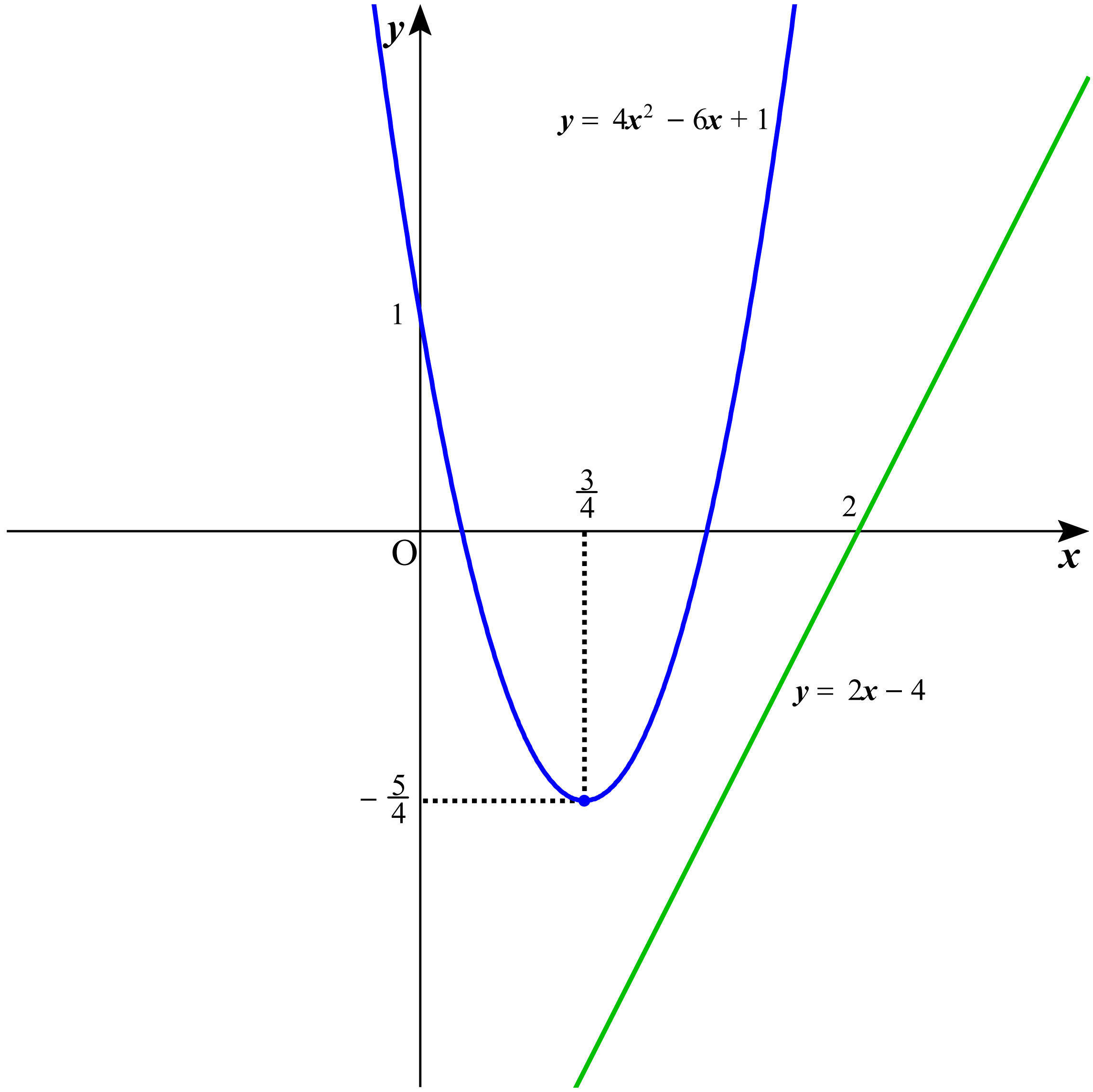
共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} y = 4x^2 - 6x + 1 & \cdots ① \\ y = 2x - 4 & \cdots ② \end{cases}$ の実数解である。

①，②より，$4x^2 - 6x + 1 = 2x - 4$ すなわち $4x^2 - 8x + 5 = 0$

ここで，判別式を D とすると，$D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -16 < 0$

よって，連立方程式の x の実数解は存在しない。

ゆえに，共有点をもたない。



188

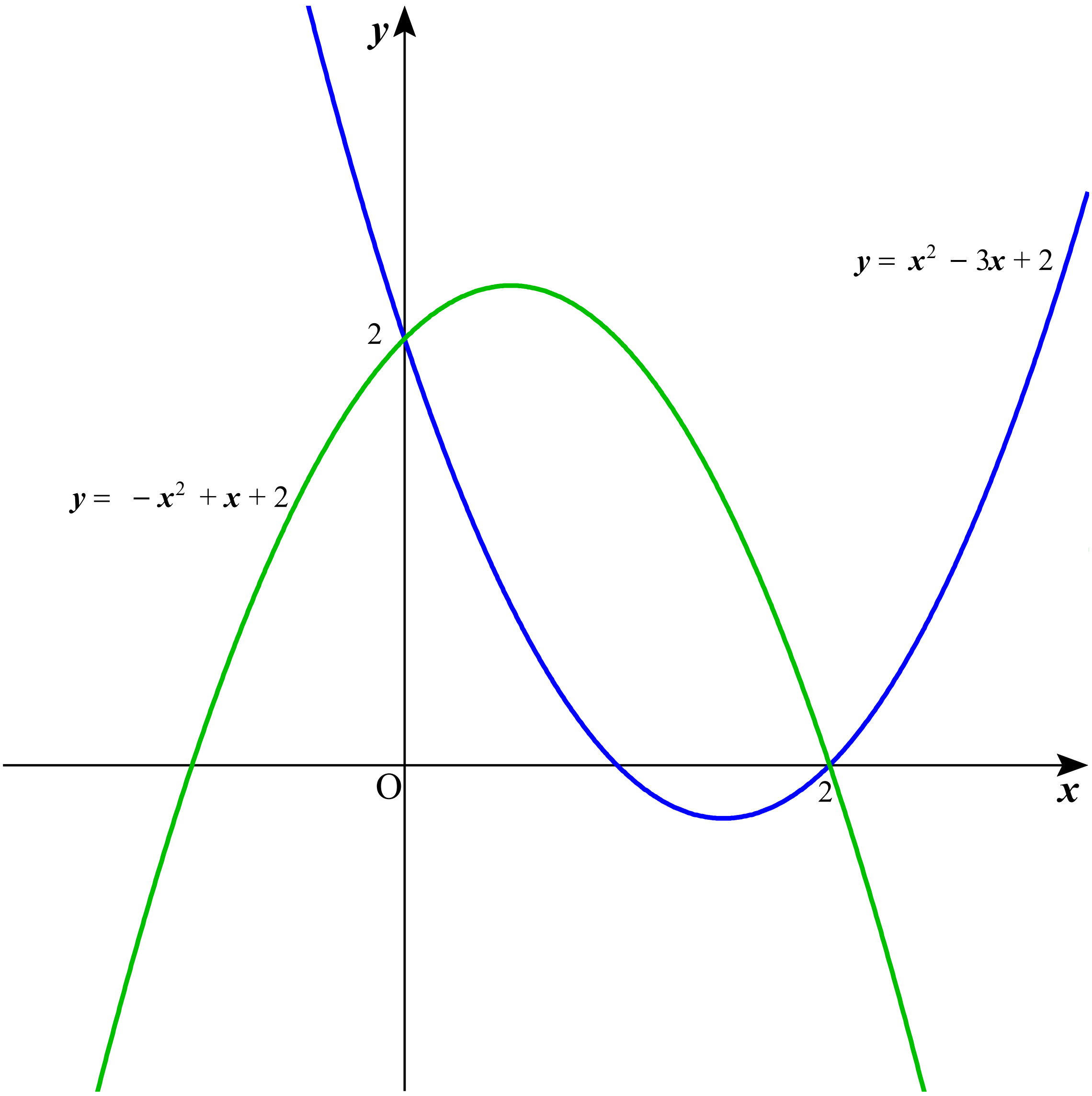
(1)

共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 & \cdots ① \\ y = -x^2 + x + 2 & \cdots ② \end{cases}$の実数解である。

①，②より，$x^2 - 3x + 2 = -x^2 + x + 2$ すなわち $2x^2 - 4x = 0$

これより，$2x(x-2) = 0$　　$\therefore x = 0,\ 2$

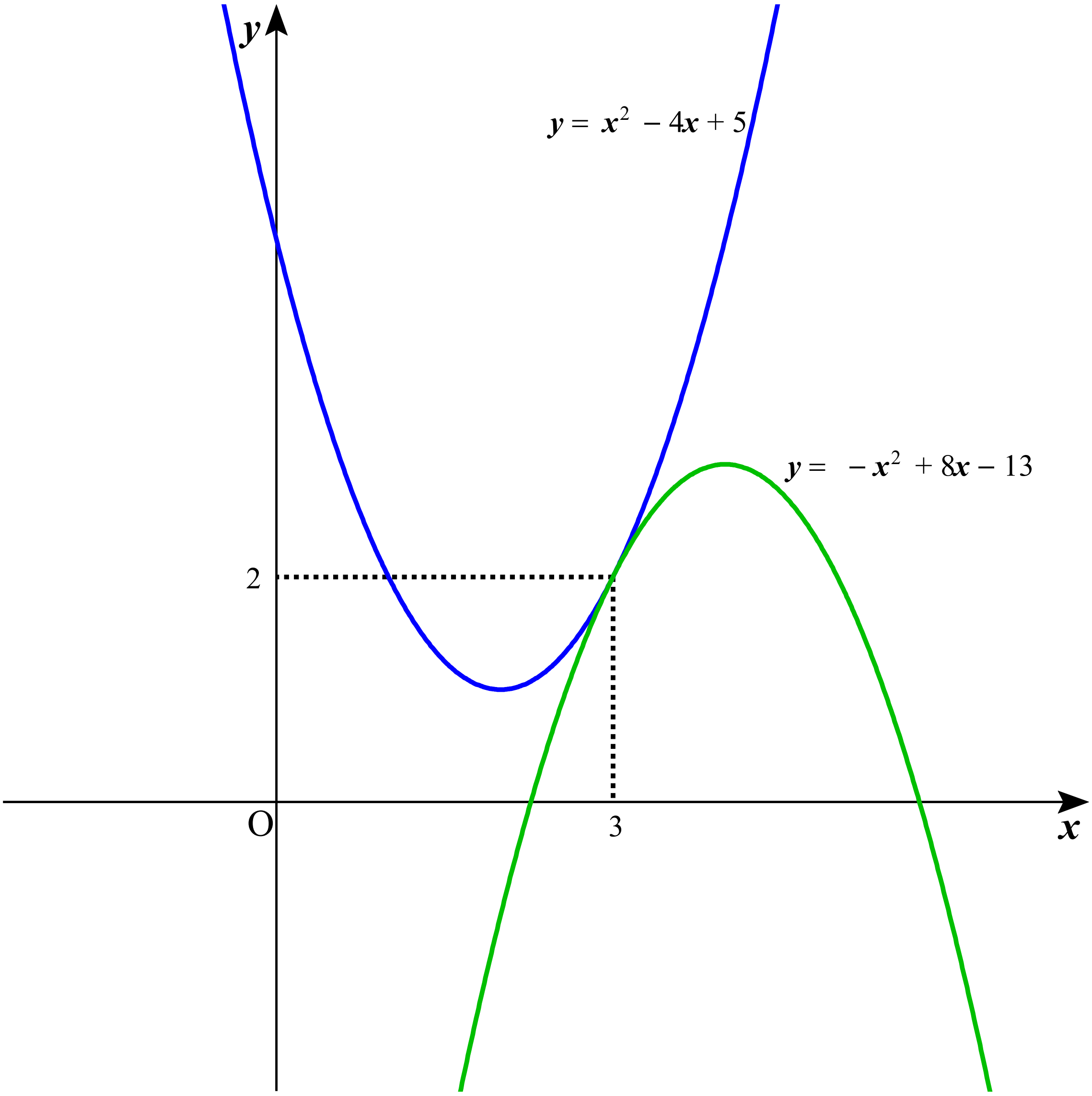
これと $y = x^2 - 3x + 2$（または $y = -x^2 + x + 2$）より，共有点の座標は $(x,\ y) = (0,\ 2),\ (2,\ 0)$



(2)

共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} y=x^2-4x+5 & \cdots① \\ y=-x^2+8x-13 & \cdots② \end{cases}$の実数解である。

①，②より，$x^2-4x+5=-x^2+8x-13$ すなわち $2x^2-12x+18=0$
これより，$2(x-3)^2=0$　$\therefore x=3$
これと $y=x^2-4x+5$（または $y=-x^2+8x-13$）より，共有点の座標は $(x,\ y)=(3,\ 2)$



189

共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} y = x^2 & \cdots① \\ y = -2x + k & \cdots② \end{cases}$ の実数解である。

①，②より， $x^2 = -2x + k$

よって，共有点の x 座標は 2 次方程式 $x^2 + 2x - k = 0$ の実数解である。
x が実数解をもてば，①または②より， y も実数解をもつから，

共有点の個数はこの方程式の実数解の個数と一致する。

そこで，この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 4(k+1)$ より，

$D > 0$ となるのは $k > -1$， $D = 0$ となるのは $k = -1$， $D < 0$ となるのは $k < -1$

よって，共有点の個数は

$k > -1$ のとき 2 個， $k = -1$ のとき 1 個， $k < -1$ のとき 0 個

補足

$x^2 + 2x - k = 0$ の実数解の個数をグラフを利用して求める方法

$x^2 + 2x - k = 0$ より， $x^2 + 2x = k$

ここで， $y = x^2 + 2x$， $y = k$ とすると，

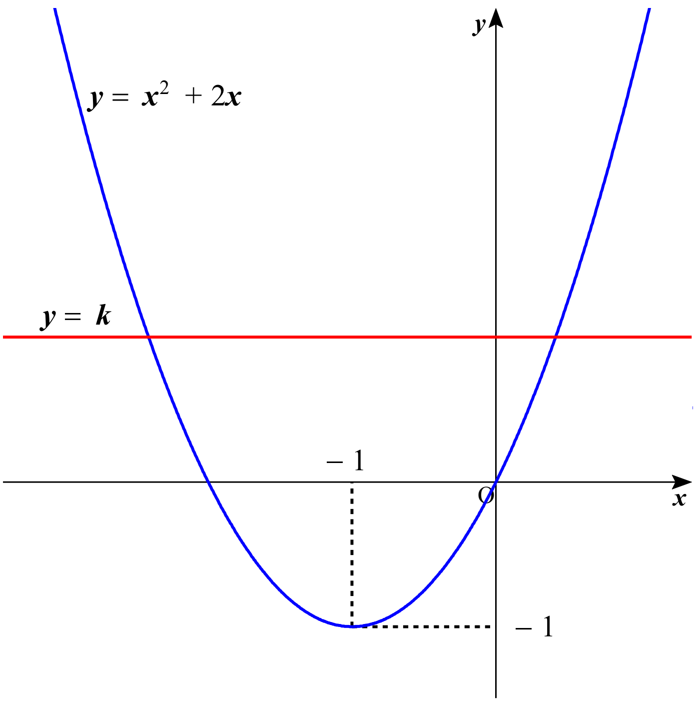
$x^2 + 2x - k = 0$ の実数解は

$y = x^2 + 2x$ のグラフと $y = k$ のグラフの共有点の x 座標と一致する。

$y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ より， $y = x^2 + 2x$ のグラフは下のようになる。

よって，グラフの共有点の x 座標の個数，すなわち $x^2 + 2x - k = 0$ の実数解の個数は

$k > -1$ のとき 2 個， $k = -1$ のとき 1 個， $k < -1$ のとき 0 個



190

共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} y=x^2-4x+3 & \cdots① \\ y=2x+k & \cdots② \end{cases}$ の実数解である。

①，②より，$x^2-4x+3=2x+k$ すなわち$x^2-6x+3-k=0$

①と②のグラフが接するならば$x^2-6x+3-k=0$は重解をもつ。

逆に，$x^2-6x+3-k=0$が重解をもつならば①と②のグラフは接する。

よって，$x^2-6x+3-k=0$が重解をもつときの定数kの値を求めればよい。

そこで，この方程式の判別式をDとすると，

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot(3-k)=4(k+6)$より，

重解をもつときのkの値は，すなわち$D=0$となるときのkの値は-6 ・・・(答)

また，このとき方程式は$x^2-6x+3-(-6)=0$すなわち$(x-3)^2=0$となるから，

接点のx座標は3

これと$y=x^2-4x+3$より，接点の座標は$(3,0)$ ・・・(答)

補足

$x^2-6x+3-k=0$が重解をもつときの定数kの値をグラフを利用して求める方法

189 の補足と同じ方法であるが，

$x^2-6x+3-k=0$より，$x^2-6x+3=k$

ここで，$y=x^2-6x+3$，$y=k$とすると，$x^2-6x+3-k=0$が重解をもつとき

これら 2 つのグラフは接する。

$y=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$より，$y=x^2-6x+3$のグラフは下のようになる。

よって，これら 2 つのグラフが接するときの，

すなわち$x^2-6x+3-k=0$が重解をもつときの定数kの値は-6である。