2次関数7　グラフと2次不等式

201

(1)

判別式をDとすると，$D=(2m)^2-4\cdot1\cdot3=4(m^2-3)$

これと，実数解をもつための必要十分条件は$D\geqq0$であることより，$m^2-3\geqq0$

よって，$m\leqq-\sqrt{3}$　$\sqrt{3}\leqq m$

補足1

$m^2-3=(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})$より，

m	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$m+\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})$	$+$	0	$-$	0	$+$

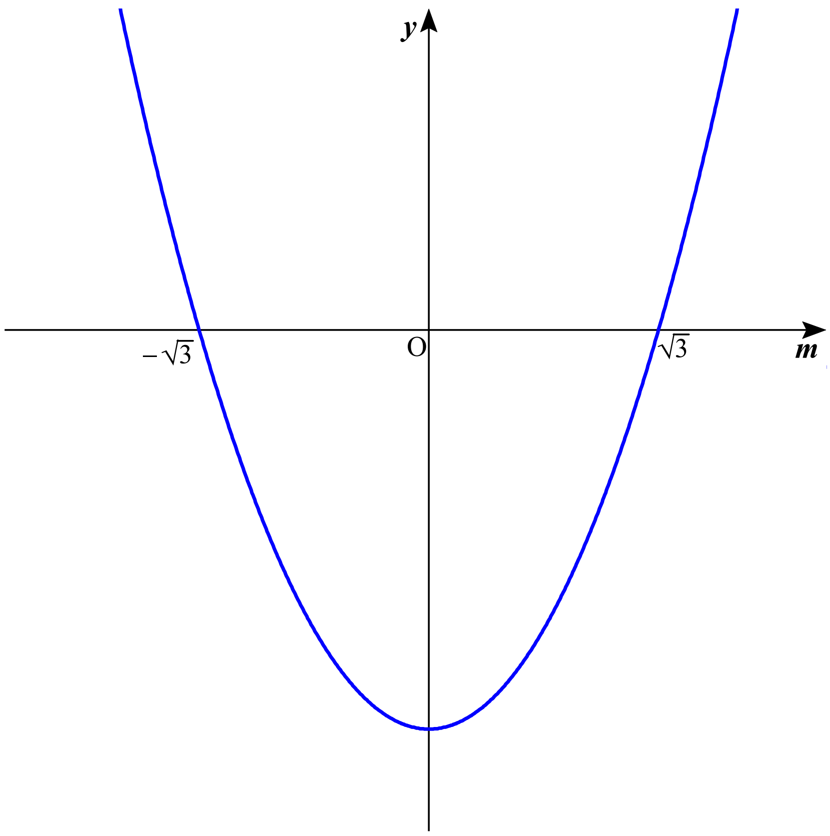
よって，不等式$m^2-3\geqq0$の解は$m\leqq-\sqrt{3}$　$\sqrt{3}\leqq m$

補足2

$m^2-3\geqq0$の解は

$y=m^2-3$のグラフにおいて$y\geqq0$を満たすmの値の範囲と同じである。

グラフより，$y\geqq0$を満たすmの値の範囲すなわち$m^2-3\geqq0$の解は$m\leqq-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\leqq m$



(2)

判別式を D とすると，$D=m^2-4\cdot 1\cdot m=m(m-4)$

これと，実数解をもつための必要十分条件は $D\geq 0$ であることより，$m(m-4)\geq 0$

よって，$m\leq 0,\ 4\leq m$

補足 1

m	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
m	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m(m-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $m(m-4)\geq 0$ の解は $m\leq 0,\ 4\leq m$

補足 2

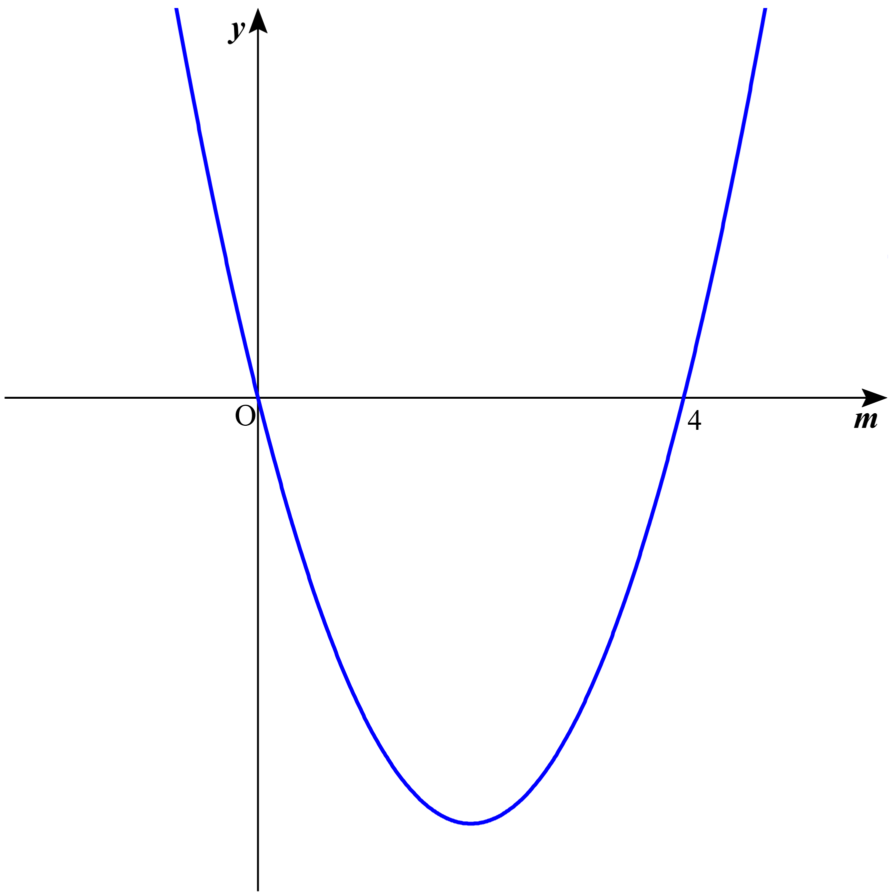
$m(m-4)\geq 0$ の解は

$y=m(m-4)$ のグラフにおいて $y\geq 0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=m(m-4)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y)=(0,\ 0),\ (4,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに，$y\geq 0$ を満たす m の値の範囲すなわち $m(m-4)\geq 0$ の解は $m\leq 0,\ 4\leq m$



202

(1)

グラフが x 軸と共有点をもつための必要十分条件は

x の 2 次方程式 $x^2-2mx+2m+3=0$ が実数解をもつことである。

この方程式の判別式を D とすると,

$D=(-2m)^2-4\cdot1\cdot(2m+3)=4(m^2-2m-3)=4(m+1)(m-3)$

これと，実数解をもつための必要十分条件は $D\geq0$ であることより， $4(m+1)(m-3)\geq0$

すなわち $(m+1)(m-3)\geq0$　 $\therefore m\leq-1,\ 3\leq m$

補足 1

m	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$m+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(m+1)(m-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $(m+1)(m-3)\geq0$ の解は $m\leq-1,\ 3\leq m$

補足 2

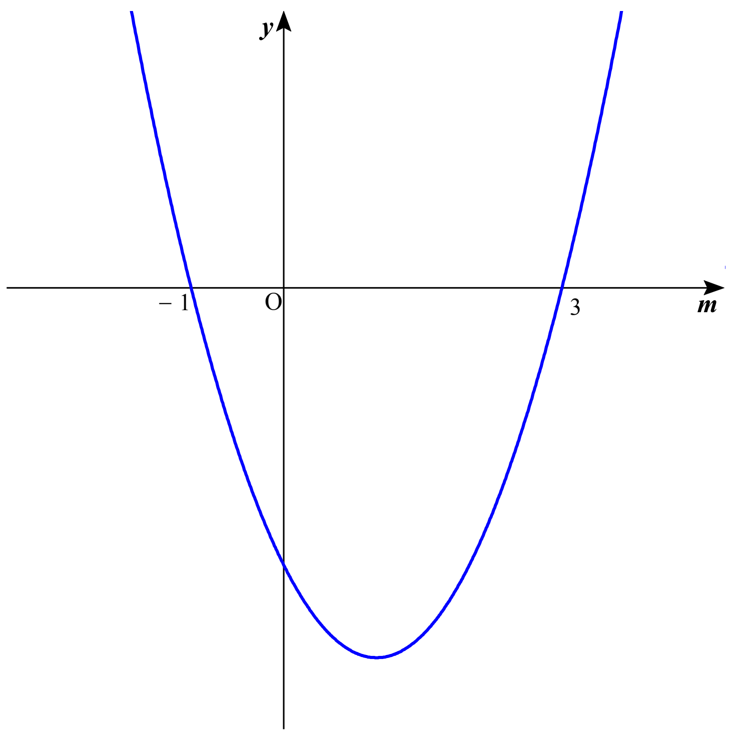
$(m+1)(m-3)\geq0$ の解は

$y=(m+1)(m-3)$ のグラフにおいて $y\geq0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=(m+1)(m-3)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y)=(-1,\ 0),\ (3,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに， $y\geq0$ を満たす m の値の範囲すなわち $(m+1)(m-3)\geq0$ の解は $m\leq-1,\ 3\leq m$



(2)

グラフが x 軸と共有点をもつための必要十分条件は

x の 2 次方程式 $x^2+2mx-m+2=0$ が実数解をもたないことである。

この方程式の判別式を D とすると，

$D=(2m)^2-4\cdot 1\cdot(-m+2)=4(m^2+m-2)=4(m+1)(m-2)$

これと，実数解をもたないための必要十分条件は $D<0$ であることより，$4(m+1)(m-2)<0$

すなわち $(m+1)(m-2)<0$ $\quad\therefore -1<m<2$

補足 1

m	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$m+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(m+1)(m-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $4(m+1)(m-2)<0$ の解は $-1<m<2$

補足 2

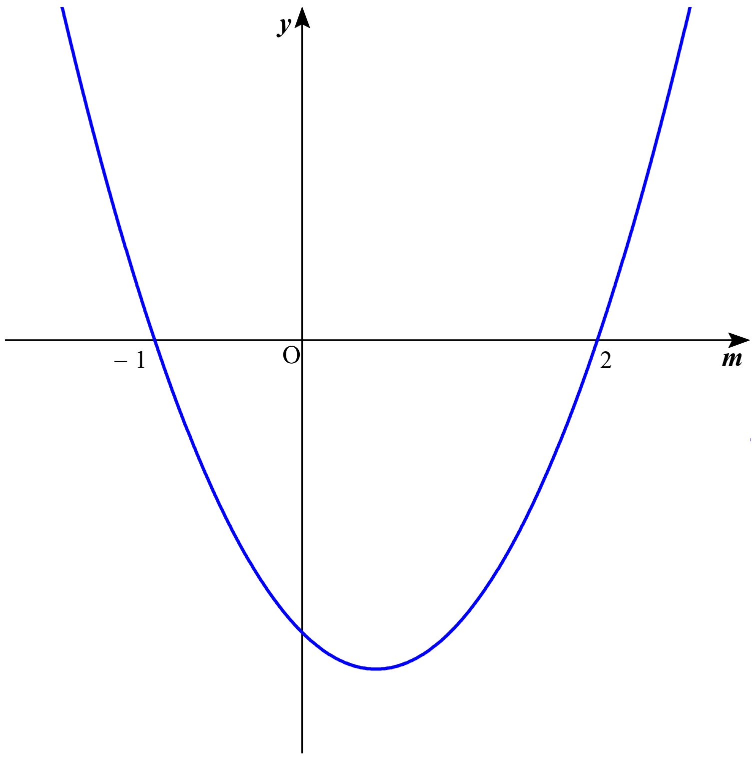
$(m+1)(m-2)<0$ の解は

$y=(m+1)(m-2)$ のグラフにおいて $y<0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=(m+1)(m-2)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y)=(-1,\ 0),\ (2,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに， $y<0$ を満たす m の値の範囲すなわち $(m+1)(m-2)<0$ の解は $-1<m<2$



203

ポイント

$x^2 - mx + 1 > 0$ の解がすべての実数とは，

「$x^2 - mx + 1$ にどんな実数 x を代入しても $x^2 - mx + 1 > 0$ が成り立つ」または，

「すべての実数 x に対し $x^2 - mx + 1 > 0$ が成り立つ」ということである。

(1)

$x^2 - mx + 1 > 0$ の解がすべての実数であることと

$y = x^2 - mx + 1$ のグラフがすべての実数 x に対し $y > 0$ であることは同値である。

$y = x^2 - mx + 1$ のグラフがすべての実数 x に対し $y > 0$ であることと

$y = x^2 - mx + 1$ が x 軸と共有点をもたないことは同値である。

$y = x^2 - mx + 1$ が x 軸と共有点をもたないことと

x の方程式 $x^2 - mx + 1 = 0$ が実数解をもたないことは同値である。

よって，$x^2 - mx + 1 = 0$ が実数解をもたないときの定数 m の値の範囲を求めればよい。

そこで，$x^2 - mx + 1 = 0$ の判別式を D とすると，$D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = m^2 - 4 = (m+2)(m-2)$

これと，実数解をもたないための必要十分条件は $D < 0$ であることより，$(m+2)(m-2) < 0$

ゆえに，定数 m の値の範囲は $-2 < m < 2$

補足 1

m	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$m+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(m+1)(m-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $4(m+1)(m-2) < 0$ の解は $-1 < m < 2$

補足 2

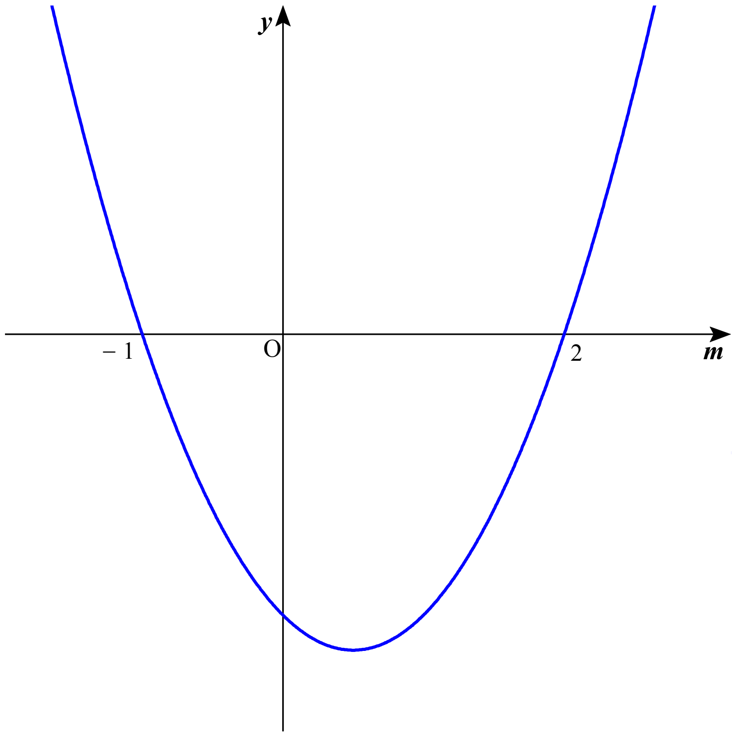
$(m+1)(m-2) < 0$ の解は

$y = (m+1)(m-2)$ のグラフにおいて $y < 0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y = (m+1)(m-2)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y) = (-1,\ 0),\ (2,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは次図のようになる。

ゆえに，$y < 0$ を満たす m の値の範囲すなわち $(m+1)(m-2) < 0$ の解は $-1 < m < 2$



(2)

$-x^2+mx+2m<0$ の解がすべての実数であることと

$y=-x^2+mx+2m$ のグラフがすべての実数 x に対し $y<0$ であることは同値である。

$y=-x^2+mx+2m$ のグラフがすべての実数 x に対し $y<0$ であることと

$y=-x^2+mx+2m$ が x 軸と共有点をもたないことは同値である。

$y=-x^2+mx+2m$ が x 軸と共有点をもたないことと

x の方程式 $-x^2+mx+2m=0$ が実数解をもたないことは同値である。

よって，$-x^2+mx+2m=0$ が実数解をもたないときの定数 m の値の範囲を求めればよい。

そこで，$-x^2+mx+2m=0$ の判別式を D とすると，$D=m^2-4\cdot(-1)\cdot 2m=m(m+8)$

これと，実数解をもたないための必要十分条件は $D<0$ であることより，$m(m+8)<0$

ゆえに，定数 m の値の範囲は $-8<m<0$

補足 1

m	$\cdots$	-8	$\cdots$	0	$\cdots$
$m+8$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
m	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m(m+8)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $m(m+8)<0$ の解は $-8<m<0$

補足 2

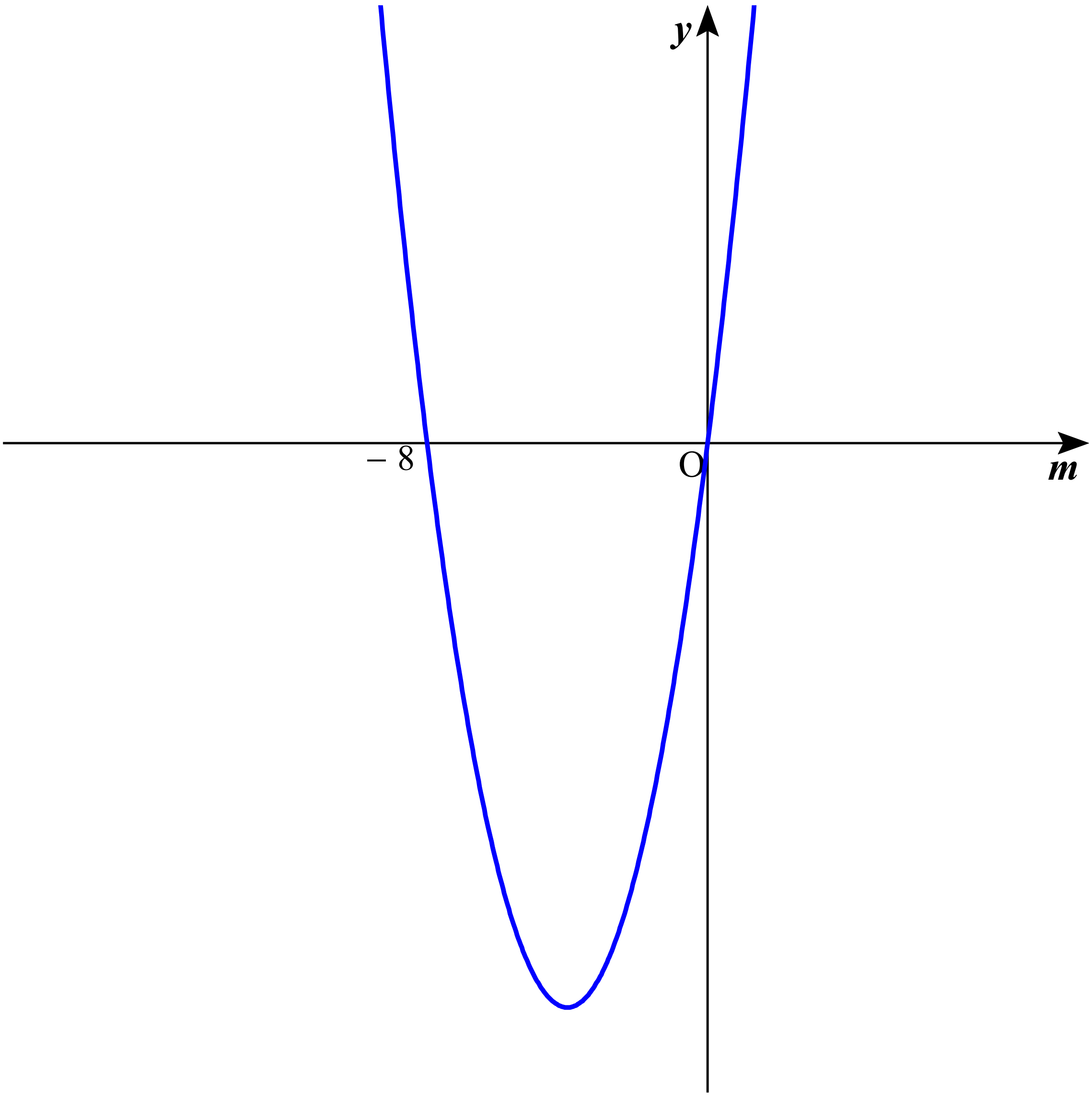
$m(m+8)<0$ の解は

$y=m(m+8)$ のグラフにおいて $y<0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=m(m+8)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y)=(-8,\ 0),\ (0,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに， $y<0$ を満たす m の値の範囲すなわち $m(m+8)<0$ の解は $-8<m<0$



204

(1)

y の値が常に正であることとグラフが x 軸と共有点をもたないことは同値である。

グラフが x 軸と共有点をもたないことと

x の 2 次方程式 $x^2+mx+1=0$ が実数解をもたないことは同値である。

よって，$x^2+mx+1=0$ が実数解をもたないときの定数 m の値の範囲を求めればよい。

そこで，$x^2+mx+1=0$ の判別式を D とすると，$D=m^2-4\cdot1\cdot1=(m+2)(m-2)$

これと，実数解をもたないための必要十分条件は $D<0$ であることより，$(m+2)(m-2)<0$

ゆえに，定数 m の値の範囲は $-2<m<2$

補足 1

m	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$m+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(m+2)(m-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $(m+2)(m-2)<0$ の解は $-2<m<2$

補足 2

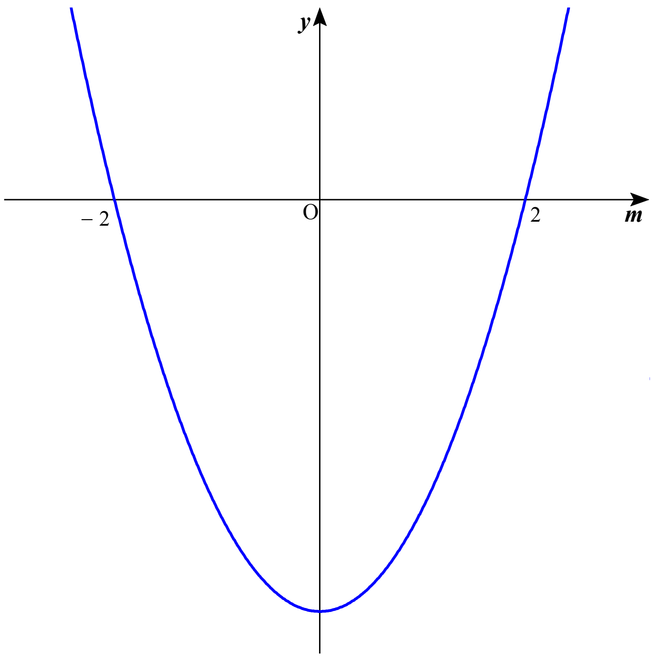
$(m+2)(m-2)<0$ の解は

$y=(m+2)(m-2)$ のグラフにおいて $y<0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=(m+2)(m-2)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y)=(-2,\ 0),\ (2,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに，$y<0$ を満たす m の値の範囲すなわち $(m+2)(m-2)<0$ の解は $-2<m<2$



(2)

$y<0$ の部分を通らないことと y の値が常に $y \geq 0$ であることは同値である。

y の値が常に $y \geq 0$ であることと

グラフが x 軸と接するまたは共有点をもたないことは同値である。

グラフが x 軸と接するまたは共有点をもたないことと

x の方程式 $x^2-2mx+3m-2=0$ が重解をもつまたは実数解をもたないことは同値である。

よって，この方程式が重解をもつまたは実数解をもたないときの定数 m の値の範囲を求めればよい。

そこで，$x^2-2mx+3m-2=0$ の判別式を D とすると，

$D=(-2m)^2-4\cdot 1\cdot(3m-2)=4(m-1)(m-2)$

これと，重解をもつまたは実数解をもたないための必要十分条件は $D<0$ であることより，

$4(m-1)(m-2)\leq 0$　すなわち $(m-1)(m-2)\leq 0$

ゆえに，定数 m の値の範囲は $1\leq m\leq 2$

補足 1

m	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$m-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(m-1)(m-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $(m-1)(m-2)\leq 0$ の解は $1\leq m\leq 2$

補足 2

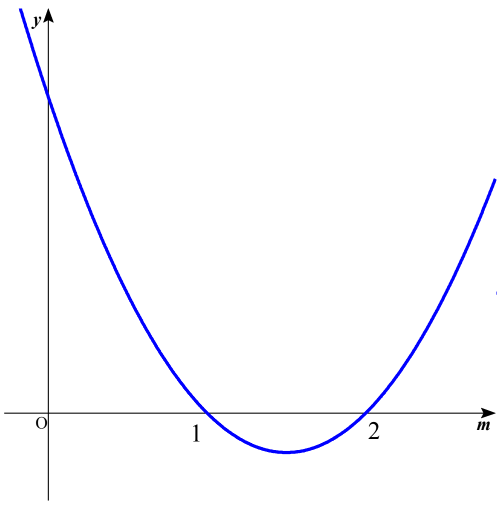
$(m-1)(m-2)\leq 0$ の解は

$y=(m-1)(m-2)$ のグラフにおいて $y\leq 0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=(m-1)(m-2)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y)=(1,\ 0),\ (2,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに，$y\leq 0$ を満たす m の値の範囲すなわち $(m-1)(m-2)\leq 0$ の解は $1\leq m\leq 2$



(3)

y の値が常に負であるための必要十分条件は，

グラフが上に凸かつ x 軸と共有点をもたないことである。

グラフが上に凸であるための必要十分条件は x^2 の係数 m が $m<0$　・・・①

であることである。

グラフが x 軸と共有点をもたないことと

$mx^2+4x+m-3=0$ が実数解をもたないことは同値である。

そこで，この方程式を判別式を D とすると，$D=4^2-4\cdot m\cdot(m-3)=-4(m+1)(m-4)$

これと，実数解をもたないための必要十分条件は $D<0$ であることより，

$-4(m+1)(m-4)<0$　すなわち　$(m+1)(m-4)>0$　$\therefore m<-1,\ 4<m$　・・・②

よって，定数 m の値の範囲は，①かつ②より，$m<-1$

補足 1

m	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$m+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(m+1)(m-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $(m+1)(m-4)>0$ の解は $m<-1,\ 4<m$

これと①より，$m<-1$

補足 2

$(m+1)(m-4)>0$（$m<0$）の解は

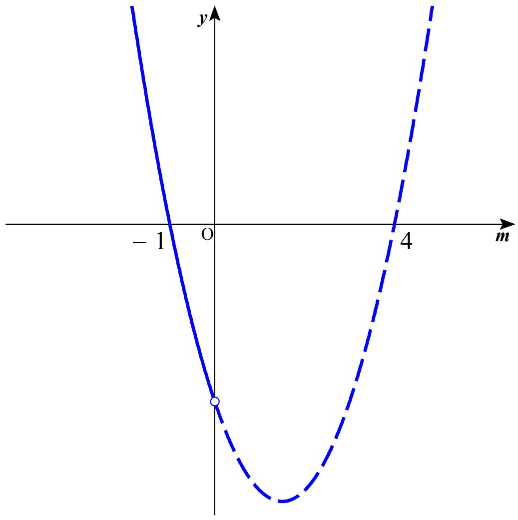
$y=(m+1)(m-4)$（$m<0$）のグラフにおいて $y>0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=(m+1)(m-4)$（$m<0$）のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で

$(m,\ y)=(-1,\ 0),\ (4,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに，$(m+1)(m-4)>0$（$m<0$）の解は $m<-1$



205

判別式を D とすると， $D=(-2m)^2-4\cdot 1\cdot(-4m)=4m(m+4)$

(1)

必要十分条件は $D>0$

よって， $4m(m+4)>0$ すなわち $m(m+4)>0$ の解は $m<-4,\ 0<m$

補足 1

m	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$m+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
m	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m(m+4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $m(m+4)>0$ の解は $m<-4,\ 0<m$

補足 2

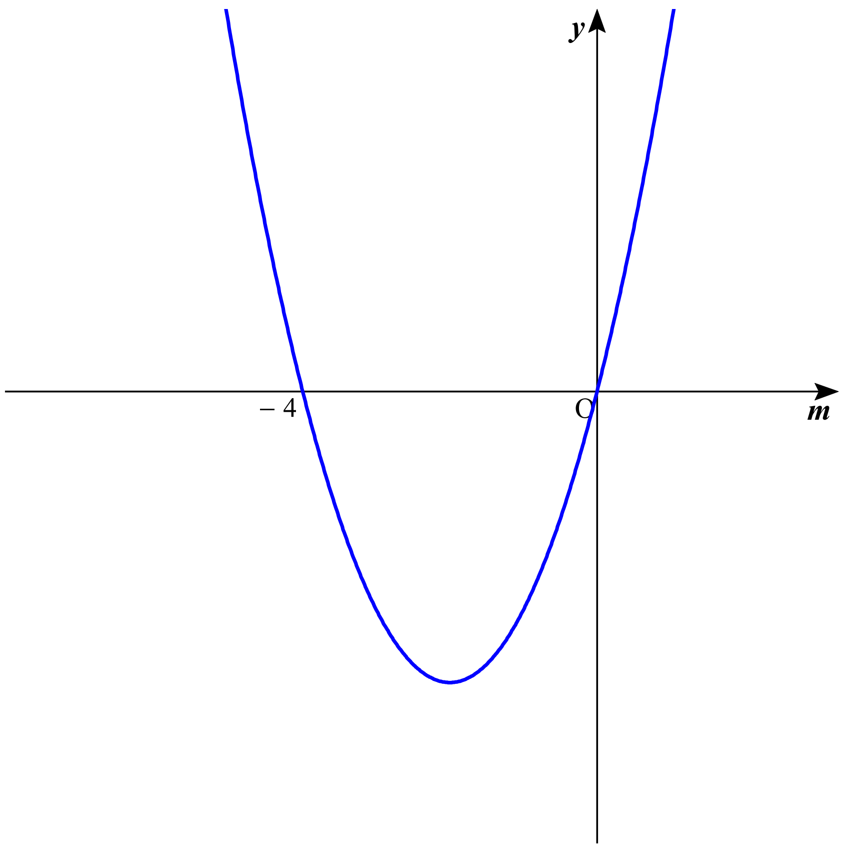
$m(m+4)>0$ の解は

$y=m(m+4)$ のグラフにおいて $y>0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=m(m+4)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y)=(-4,\ 0),\ (0,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに， $m(m+4)>0$ の解は $m<-4,\ 0<m$



(2)

必要十分条件は $D<0$

よって，$4m(m+4)<0$ すなわち $m(m+4)<0$ の解は $-4<m<0$

補足 1

m	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$m+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
m	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m(m+4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，不等式 $m(m+4)<0$ の解は $-4<m<0$

補足 2

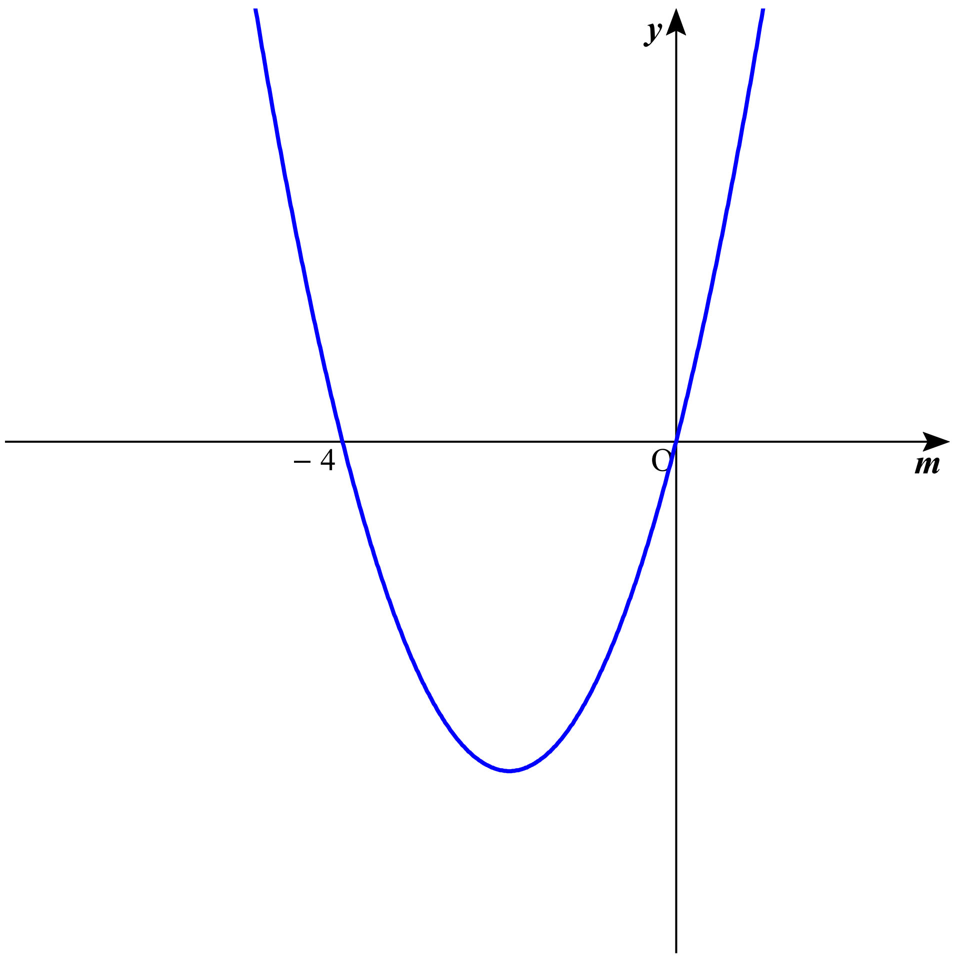
$m(m+4)<0$ の解は

$y=m(m+4)$ のグラフにおいて $y<0$ を満たす m の値の範囲と同じである。

$y=m(m+4)$ のグラフは m^2 の係数が正だから下に凸で $(m,\ y)=(-4,\ 0),\ (0,\ 0)$ を通る。

よって，グラフは下図のようになる。

ゆえに，$m(m+4)<0$ の解は $-4<m<0$



206

$$\begin{aligned}y&=x^2-mx+m+3\\&=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m+3\\&=\left(x-\frac{m}{2}\right)-\frac{m^2}{4}+\frac{4(m+3)}{4}\\&=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2-4(m+3)}{4}\\&=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2-4m-12}{4}\\&=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{(m+2)(m-6)}{4}\end{aligned}$$

より，頂点の座標は$\left(\frac{m}{2},\ -\frac{(m+2)(m-6)}{4}\right)$

これが第 1 象限にあるための必要十分条件は$\frac{m}{2}>0$かつ$-\frac{(m+2)(m-6)}{4}>0$

すなわち$m>0$かつ$(m+2)(m-6)<0$

$(m+2)(m-6)<0$の解は$-2<m<6$だから,

定数mの値の範囲は$m>0$かつ$-2<m<6$すなわち$0<m<6$

補足

座標軸（x軸とy軸）はどの象限にも含まれない。

したがって，第 1 象限は$x>0,\ y>0$，第 2 象限は$x<0,\ y>0$，第 3 象限は$x<0,\ y<0$，第 4 象限は$x>0,\ y<0$を満たす領域である。

207

もとの立方体の 1 辺の長さをx [cm]とすると,

もとの立方体の体積はx^3 [cm^3]

直方体の体積は$(x-1)\cdot x\cdot(x+2)=x^3+x^2-2x$ [cm^3]（ただし，$x-1>0$より，$x>1$）

よって，満たすべき条件は$x^3+x^2-2x\leq x^3$かつ$x>1$すなわち$x(x-2)\leq 0$かつ$x>1$

$x(x-2)\leq 0$の解は$0\leq x\leq 2$だから, 求めるxの値の範囲は$0\leq x\leq 2$かつ$x>1$より, $1<x\leq 2$

ゆえに，もとの立方体の 1 辺の長さの範囲は 1cm より長く 2cm 以下である。

208

2 つの整数の和が 20 だから，1 つの整数の値を x とすると，もう 1 つの整数の値は $20-x$

よって，満たすべき条件は $x(20-x)\geq 96$　すなわち $x^2-20x+96\leq 0$

これと，$x^2-20x+96=(x-8)(x-12)$ より，$(x-8)(x-12)\leq 0$

したがって，これを満たす整数 x は $x=8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$

よって，$(x,\ 20-x)=(8,\ 12),\ (9,\ 11),\ (10,\ 10),\ (11,\ 9),\ (12,\ 8)$

ゆえに，2 つの整数の組は $(8,\ 12),\ (9,\ 11),\ (10,\ 10)$

補足

x	$\cdots$	8	$\cdots$	12	$\cdots$
$x-8$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-12$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-8)(x-12)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$(x-8)(x-12)\leq 0$ を満たす整数は 8 以上 12 以下の整数である。

209

(1)

$2x^2-x-3<0$，$2x^2-x-3=(x+1)(2x-3)$ より，$(x+1)(2x-3)<0$

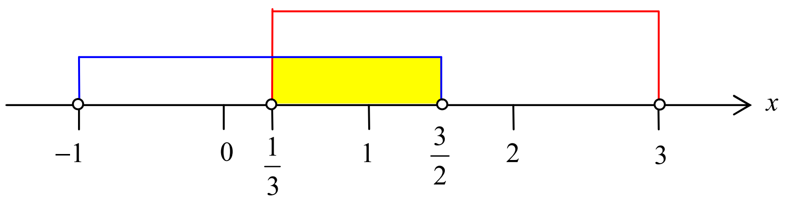
$\therefore -1<x<\dfrac{3}{2}$　・・・①

$3x^2-10x+3<0$，$3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)$ より，$(x-3)(3x-1)<0$

$\therefore \dfrac{1}{3}<x<3$　・・・②

①かつ②より，$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{3}{2}$

よって，求める整数 x の値は 1



(2)

$x^2+2x>1$ より，$x^2+2x-1>0$

これと，$x^2+2x-1=0$ の解は，解の公式より，$x=-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$ だから，

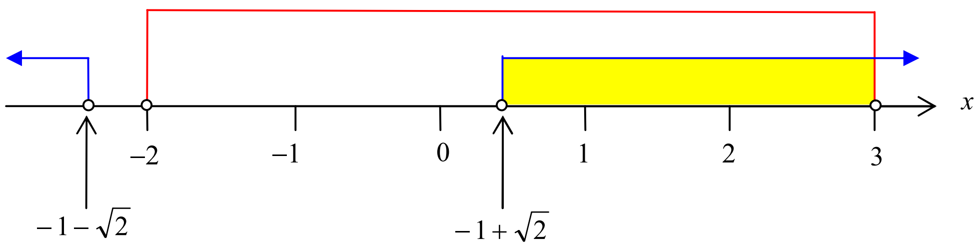
$x<-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}<x$ ・・・①

$x^2-x<6$ より，$x^2-x-6<0$ すなわち $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ ・・・②

①かつ②より，$-1+\sqrt{2}<x<3$

$1<\sqrt{2}<2$ より，$0<-1+\sqrt{2}<1$ だから，求める整数 x の値は $1,\ 2$



210

条件から，$y=ax^2+x+b$ のグラフが $x<-3,\ 2<x$ の範囲で $y>0$ であればよい。

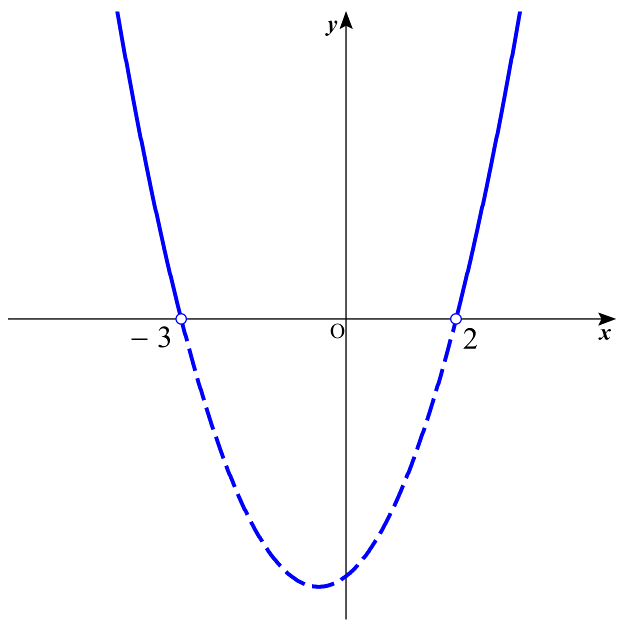
すなわち，$y=ax^2+x+b$ のグラフは下に凸で，2 点 $(-3,\ 0),\ (2,\ 0)$ を通ればよいから，

$a>0$，$0=9a-3+b$，$0=4a+2+b$

第 2 式と第 3 式から，$a=1,\ b=-6$

これは $a>0$ を満たす。

よって，$a=1,\ b=-6$



211

条件から，$y=4x^2+ax+b$ のグラフが $1<x<\frac{5}{4}$ の範囲で $y<0$ であればよい。

すなわち，$y=4x^2+ax+b$ のグラフは下に凸で，2 点 $(1,\ 0)$, $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$ を通ればよい。

ところが，x^2 の係数が正であることからグラフが下に凸であることは保証されるので，

$y=4x^2+ax+b$ のグラフが 2 点 $(1,\ 0)$, $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$ を通りさえすればよい。

よって，$0=4+a+b$　・・・①　$0=\frac{25}{4}+\frac{5}{4}a+b$　・・・②

①，②から，$a=-9,\ b=5$

したがって，2 次不等式 $5x^2-9x+4\geq 0$ の解を求めればよい。

$5x^2-9x+4=(x-1)(5x-4)$ だから，$(x-1)(5x-4)\geq 0$　$\therefore x\leq \frac{4}{5},\ 1\leq x$

212

$x^2+mx+3m=0$ の判別式を D_1，$x^2-mx+m^2-3=0$ の判別式を D_2 とすると，

必要十分条件は $D_1<0$ かつ $D_2<0$

これと

$D_1=m^2-4\cdot 1\cdot 3m=m(m-12)$

$D_2=(-m)^2-4\cdot 1\cdot (m^2-3)=-3(m^2-4)=-3(m+2)(m-2)$

より，

$D_1<0$ すなわち $m(m-12)<0$ の解は　$0<m<12$　・・・①

$D_2<0$ すなわち $-3(m+2)(m-2)<0$ の解は $(m+2)(m-2)>0$ より，

$m<-2,\ 2<m$　・・・②

よって，$D_1<0$ かつ $D_2<0$ の解は①かつ②より，$2<m<12$

213

①の判別式を D_1，②の判別式を D_2 とすると，

$D_1 = m^2 - 4\cdot 1\cdot m = m(m-4)$， $D_2 = (-2m)^2 - 4\cdot 1\cdot (m+6) = 4(m+2)(m-3)$

(1)

必要十分条件は $D_1 > 0$ かつ $D_2 > 0$ すなわち $m(m-4) > 0$ かつ $(m+2)(m-3) > 0$

$m(m-4) > 0$ より， $m < 0,\ 4 < m$ ・・・③

$(m+2)(m-3) > 0$ より， $m < -2,\ 3 < m$ ・・・④

③かつ④より， $m < -2,\ 4 < m$

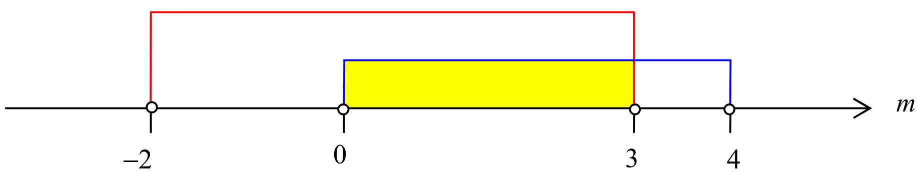
(2)

必要十分条件は $D_1 < 0$ かつ $D_2 < 0$ すなわち $m(m-4) < 0$ かつ $(m+2)(m-3) < 0$

$m(m-4) < 0$ より， $0 < m < 4$ ・・・⑤

$(m+2)(m-3) < 0$ より， $-2 < m < 3$ ・・・⑥

⑤かつ⑥より， $0 < m < 3$



(3)

ポイント

A，B の少なくとも一方≡A または B

解

必要十分条件は $D_1 \geq 0$ または $D_2 \geq 0$ すなわち $m(m-4) \geq 0$ または $(m+2)(m-3) \geq 0$

$m(m-4) \geq 0$ より， $m \leq 0,\ 4 \leq m$ ・・・⑦

$(m+2)(m-3) \geq 0$ より， $m \leq -2,\ 3 \leq m$ ・・・⑧

⑦または⑧より， $m \leq 0,\ 3 \leq m$

補足：⑦と⑧の少なくとも一方が成り立てばよい。

ということは，⑦も⑧も成り立たない範囲を除いた範囲が求める範囲である。

(4)

必要十分条件は（$D_1 > 0$ かつ $D_2 \leq 0$）または（$D_1 \leq 0$ かつ $D_2 > 0$）

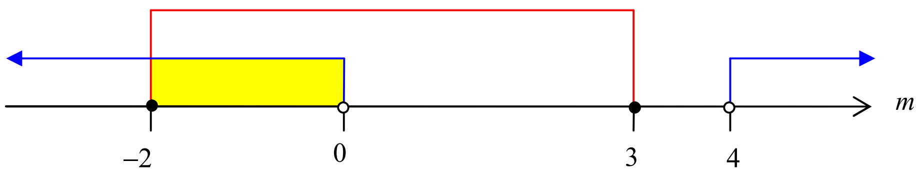
$D_1 > 0$ かつ $D_2 \leq 0$ の解

$m(m-4) > 0$ かつ $(m+2)(m-3) \leq 0$

$m(m-4) > 0$ の解は③より，$m < 0,\ 4 < m$

$(m+2)(m-3) \leq 0$ の解は $-2 \leq m \leq 3$

よって，$-2 \leq m < 0$ ・・・⑨



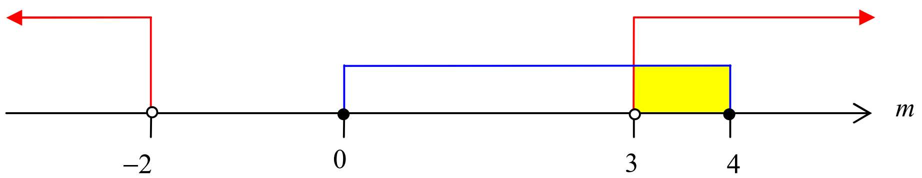
$D_1 \leq 0$ かつ $D_2 > 0$ の解

$m(m-4) \leq 0$ かつ $(m+2)(m-3) > 0$

$m(m-4) \leq 0$ の解は $0 \leq m \leq 4$

$(m+2)(m-3) > 0$ の解は④より，$m < -2,\ 3 < m$

よって，$3 < m \leq 4$ ・・・⑩



⑨または⑩より，$-2 \leq m < 0,\ 3 < m \leq 4$

214

(1)

$x^2-(a+2)x+2a=(x-a)(x-2)$ より，$(x-a)(x-2)<0$ ・・・①

$(x-a)(x-2)=0$ の解は $x=a,\ 2$ だから，a と 2 の大小を場合分けして，この不等式を解く。

【i】$a<2$ のとき　①の解は $a<x<2$

【ii】$a=2$ のとき　①は $(x-2)^2<0$ となる。ところが，$(x-2)^2\geq 0$ だから，①の解はない。

【iii】$a>2$ のとき　①の解は $2<x<a$

(2)

$x^2-(a-1)x-a=(x-a)(x+1)$ より，$(x-a)(x+1)>0$ ・・・①

$(x-a)(x+1)=0$ の解は $x=a,-1$ だから，a と -1 の大小を場合分けし，この不等式を解く。

【i】$a<-1$ のとき　①の解は $x<a,\ -1<x$

【ii】$a=-1$ のとき　①は $(x+1)^2>0$ となるから，①の解は -1 以外のすべての実数，
すなわち $x<-1,\ -1<x$

【iii】$a>-1$ のとき　①の解は $x<-1,\ a<x$

(3)

$x^2-ax-2a^2=(x+a)(x-2a)$ より，$(x+a)(x-2a)\leq 0$ ・・・①

$(x+a)(x-2a)=0$ の解は $x=-a,\ 2a$ だから，$-a$ と $2a$ の大小を場合分けして，
この不等式を解く。

【i】$-a<2a$ のとき　すなわち $a>0$ のとき　①の解は $-a\leq x\leq 2a$

【ii】$-a=2a$ のとき　すなわち $a=0$ のとき　①は $x^2\leq 0$ となるから，①の解は $x=0$

【iii】$-a>2a$ のとき　①の解は $2a\leq x\leq -a$

215

条件の見つけ方のコツ

1. 条件を満たす放物線の概形を描く。

↓

2. 放物線の軸，頂点の y 座標（または判別式），放物線と x 軸の共有点などについて満たすべき条件を求める。

↓

3. 2 で求めた条件でグラフを描くと，その概形が 1 のグラフのみになるか調べる。

(1)

$y=x^2+mx+2$ は下に凸の放物線で，

$$y=x^2+mx+2$$
$$=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+2$$

より，軸は直線 $x=-\frac{m}{2}$，y の最小値は $-\frac{m^2}{4}+2$ である。

したがって，

軸 $x=-\frac{m}{2}$ が正，$x=0$ のときの y の値が正，y の最小値 $-\frac{m^2}{4}+2$ が負の 3 つの条件を同時に満たせばよい。

軸 $x=-\frac{m}{2}$ が正であるための条件は，$-\frac{m}{2}>0$ より，$m<0$ ・・・①

$x=0$ のときの y の値は 2 だから，$x=0$ のときの y 値が正という条件を満たす。

y の最小値 $-\frac{m^2}{4}+2$ が負であるための条件は，$-\frac{m^2}{4}+2<0$ より，$m^2>8$

よって，$m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$ ・・・②

ゆえに，①かつ②より，$m<-2\sqrt{2}$

補足

$y=x^2+mx+2$ の y の最小値 $-\frac{m^2}{4}+2$ が負であることは

グラフが x 軸と異なる 2 点で交わるための必要十分条件である。

x 軸とは直線 $y=0$ のことだから，

グラフと x 軸の交点の x 座標は x の 2 次方程式 $x^2+mx+2=0$ の解である。

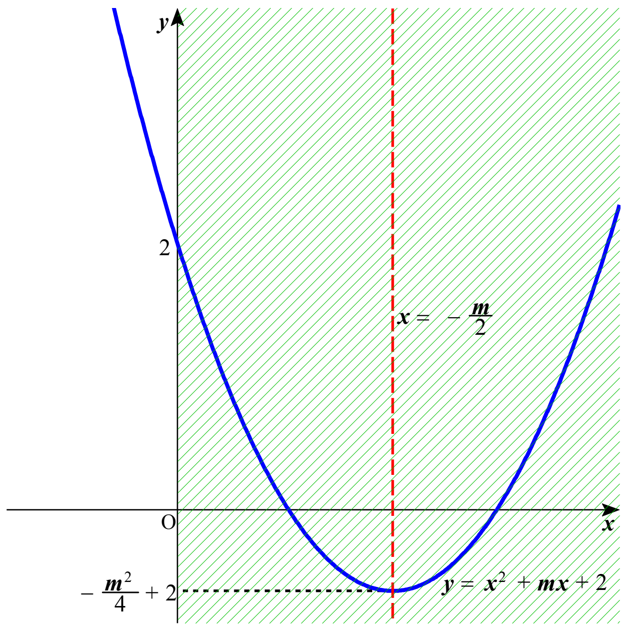
したがって，グラフが x 軸と異なる 2 点ための必要十分条件は

$x^2+mx+2=0$ の判別式が正であること，すなわち $D=m^2-8>0$ であることである。

よって，

$y=x^2+mx+2$ の y の最小値 $-\frac{m^2}{4}+2$ が負であること

$x^2+mx+2=0$ の判別式が正であることは同値である。



(2)

軸 $x=-\frac{m}{2}<-1$，$x=-1$ のときの y の値が正，y の最小値 $-\frac{m^2}{4}+2$ が負の 3 つの条件を同時に満たせばよい。

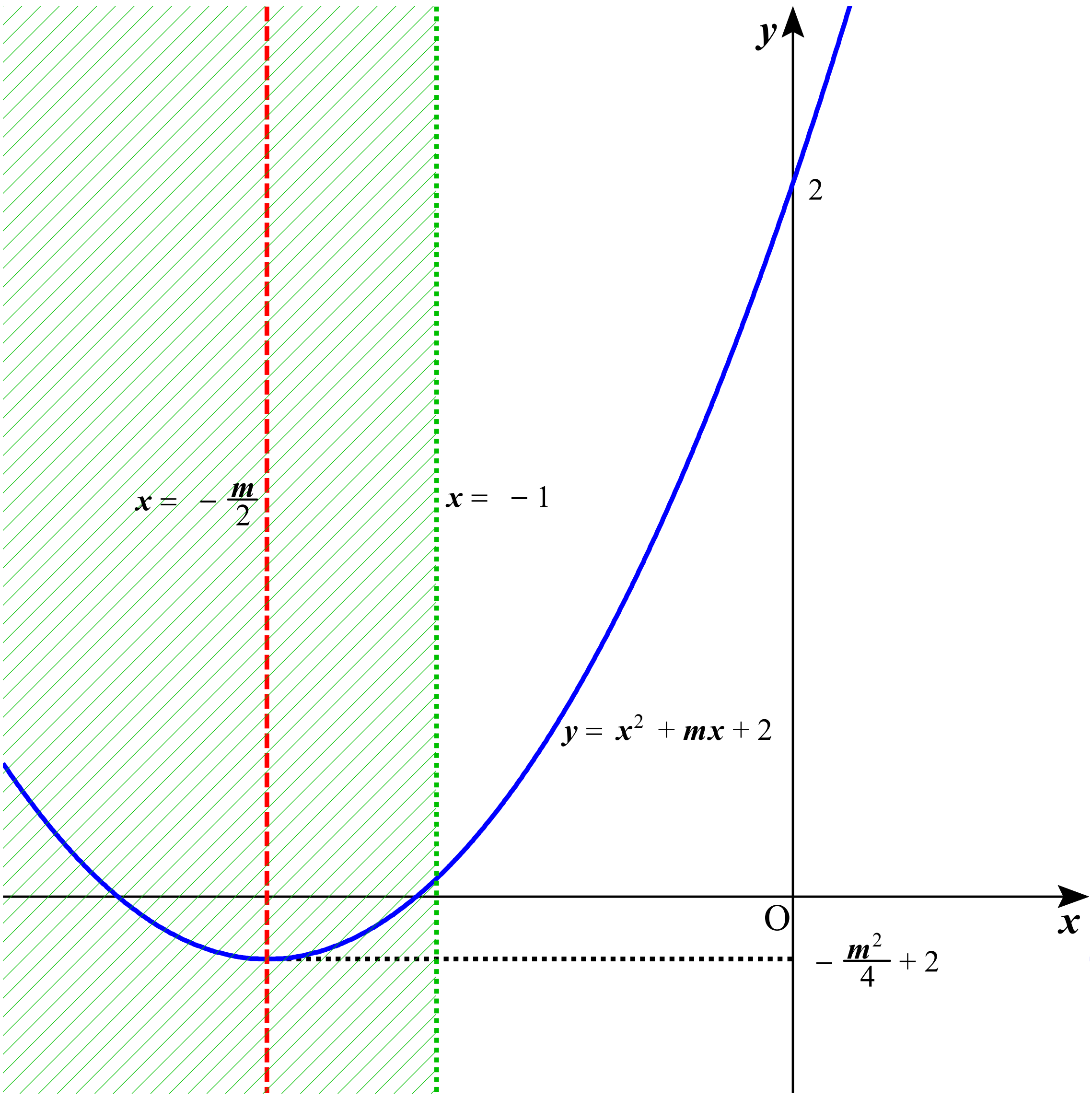
軸 $x=-\frac{m}{2}<-1$ より，$m>2$　・・・③

$x=-1$ のときの y の値は $-m+3$ だから，$-m+3>0$　$\therefore m<3$　・・・④

y の最小値 $-\frac{m^2}{4}+2$ が負であるための条件は，$-\frac{m^2}{4}+2<0$ より，$m^2>8$

よって，$m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$　・・・⑤

ゆえに，③～⑤の条件が同時に満たされるとき，$2\sqrt{2}<m<3$



216

$y = x^2 + 2(m-1)x + 3 - m^2$ は下に凸の放物線だから，

この放物線が x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わるための必要十分条件は，

$x = 0$ のときの y の値が負，すなわち $3 - m^2 < 0$ であることである。

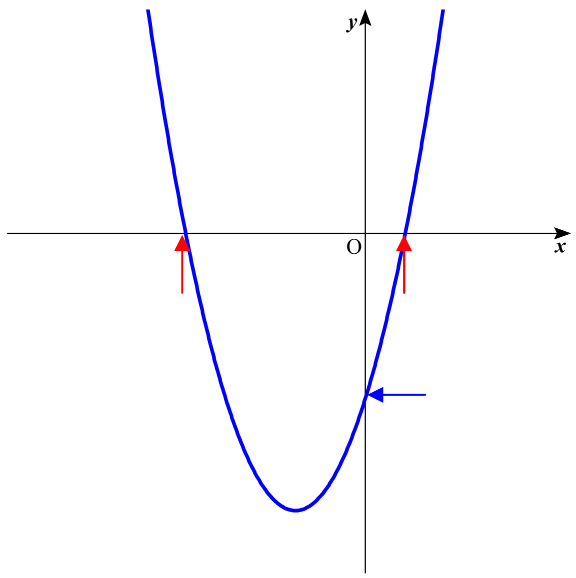
よって， $m < -\sqrt{3},\ \sqrt{3} < m$

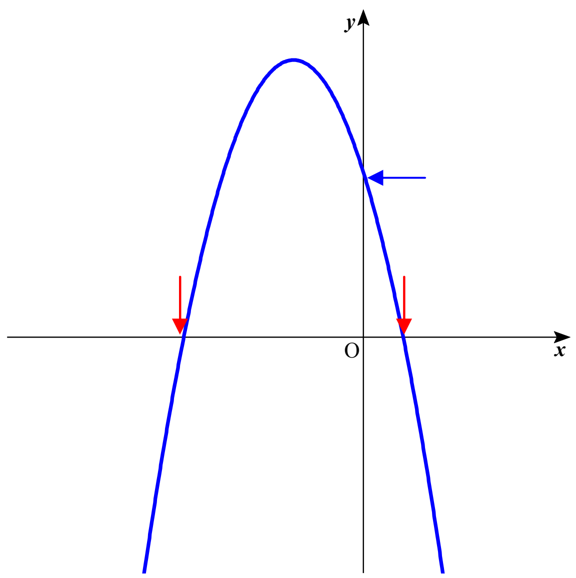
補足

$x = 0$ のときの y の値が負であるような下に凸の放物線

または $x = 0$ のときの y の値が正であるような上に凸の放物線は

x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わる





217

(1)

$y=x^2+2mx+2m+3$ とおくと，

$x^2+2mx+2m+3=0$ が異なる 2 つの負の解をもつときと

2 次関数 $y=x^2+2mx+2m+3$ のグラフと x 軸の負の部分が異なる 2 点で交わるときの

定数 m の値の範囲は同じである。

そこで，後者の場合から定数 m の値の範囲を求めることにする。

$y=x^2+2mx+2m+3$ のグラフは下に凸で，

$y=x^2+2mx+2m+3$

$=(x+m)^2-m^2+2m+3$

より，軸は直線 $x=-m$ ， y の最小値は $-m^2+2m+3$ である。

したがって，

軸 $x=-m$ が負， $x=0$ のときの y の値が正， y の最小値 $-m^2+2m+3$ が負の 3 つの条件を同時に満たせばよい。

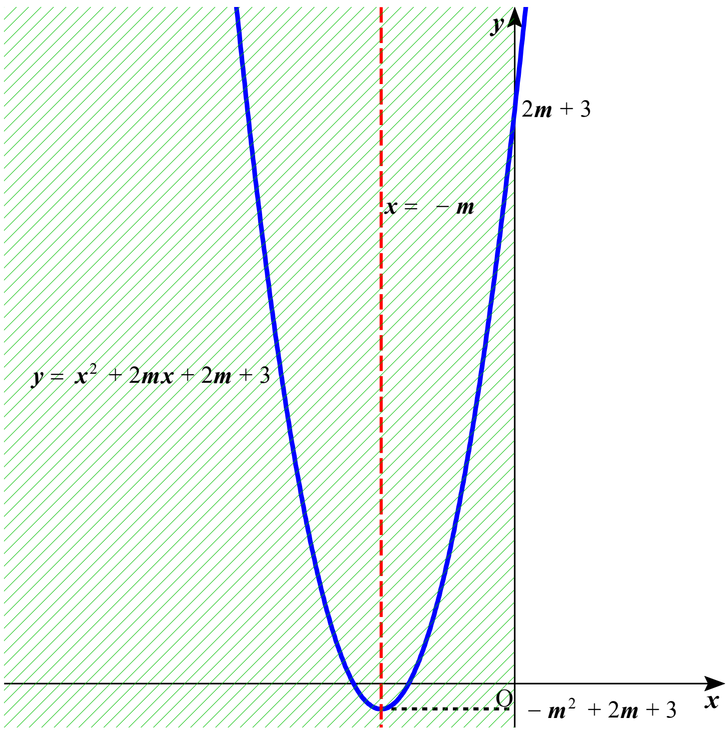
軸 $x=-m$ が正であるための条件は， $-m<0$ より， $m>0$ ・・・①

$x=0$ のときの y の値は $2m+3$ だから， $2m+3>0$ より， $m>-\frac{3}{2}$ ・・・②

y の最小値 $-m^2+2m+3<0$ すなわち $(m+1)(m-3)>0$ より， $m<-1,\ 3<m$ ・・・③

よって，①～③の条件が同時に満たされるとき， $m>3$

ゆえに, $x^2+2mx+2m+3=0$ が異なる 2 つの負の解をもつような定数 m の値の範囲は $m>3$



(2)

2 次関数 $y=x^2+2mx+2m+3$ のグラフが x 軸と $x>-4$ の異なる 2 点で交わるときの定数 m の値の範囲を求めればよい。

したがって，

軸 $x=-m$ が -4 より大，$x=-4$ のときの y の値が正，y の最小値 $-m^2+2m+3$ が負の 3 つの条件を同時に満たせばよく，

軸 $x=-m$ が -4 より大きいための条件は，$-m>-4$ より，$m<4$　・・・④

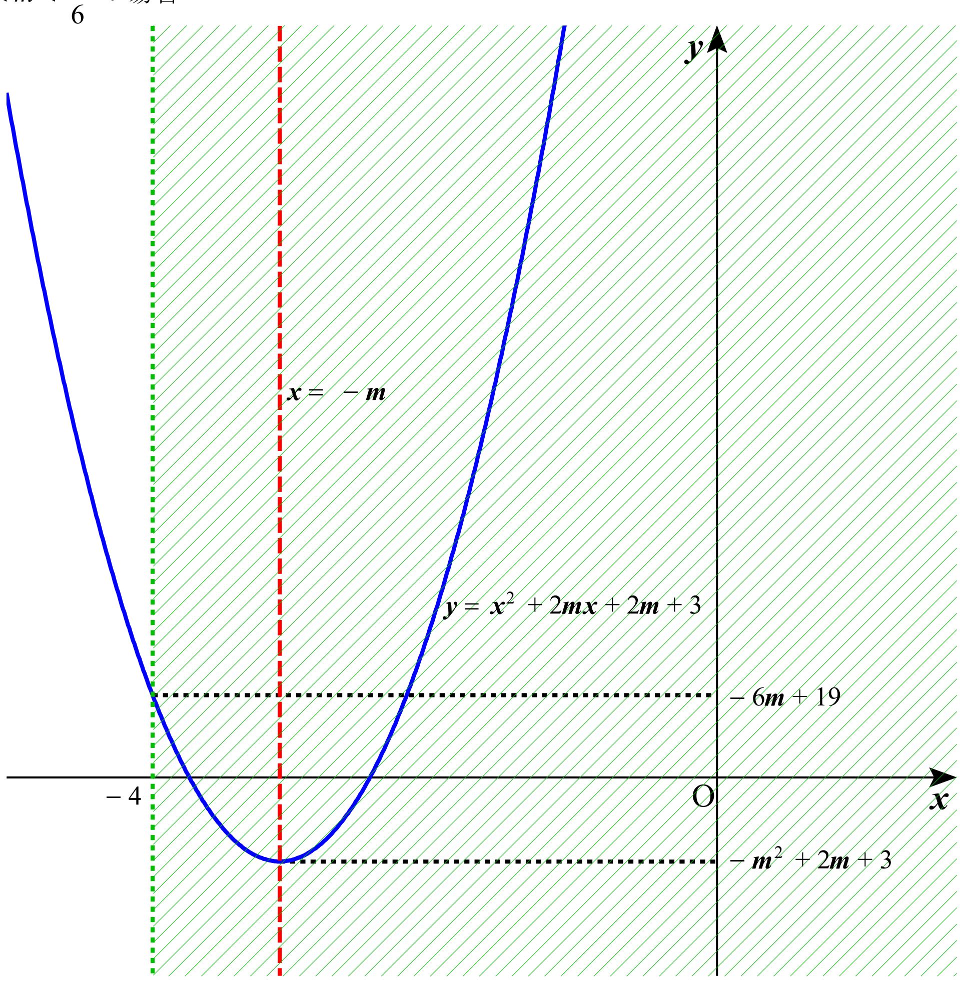
$x=-4$ のときの y の値は $-6m+19$ だから，$-6m+19>0$ より，$m<\dfrac{19}{6}$　・・・⑤

y の最小値 $-m^2+2m+3<0$ の条件は③

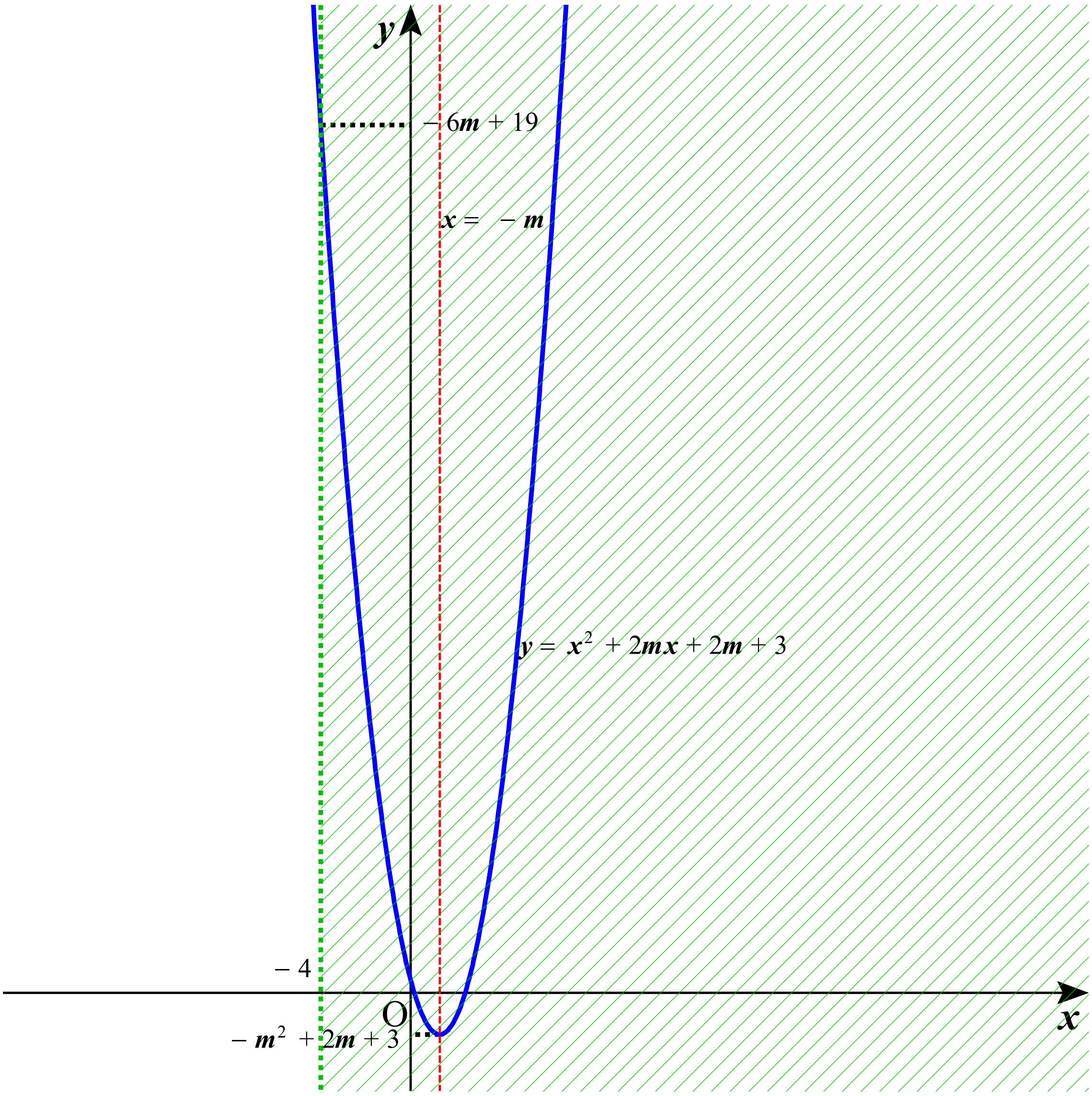
よって，③～⑤の条件が同時に満たされるとき，$m<-1,\ 3<m<\dfrac{19}{6}$

ゆえに，$x^2+2mx+2m+3=0$ が -4 より大きい異なる 2 つの負の解をもつような定数 m の値の範囲は $m<-1,\ 3<m<\dfrac{19}{6}$

$3<m<\dfrac{19}{6}$ の場合



$m < -1$ の場合



218

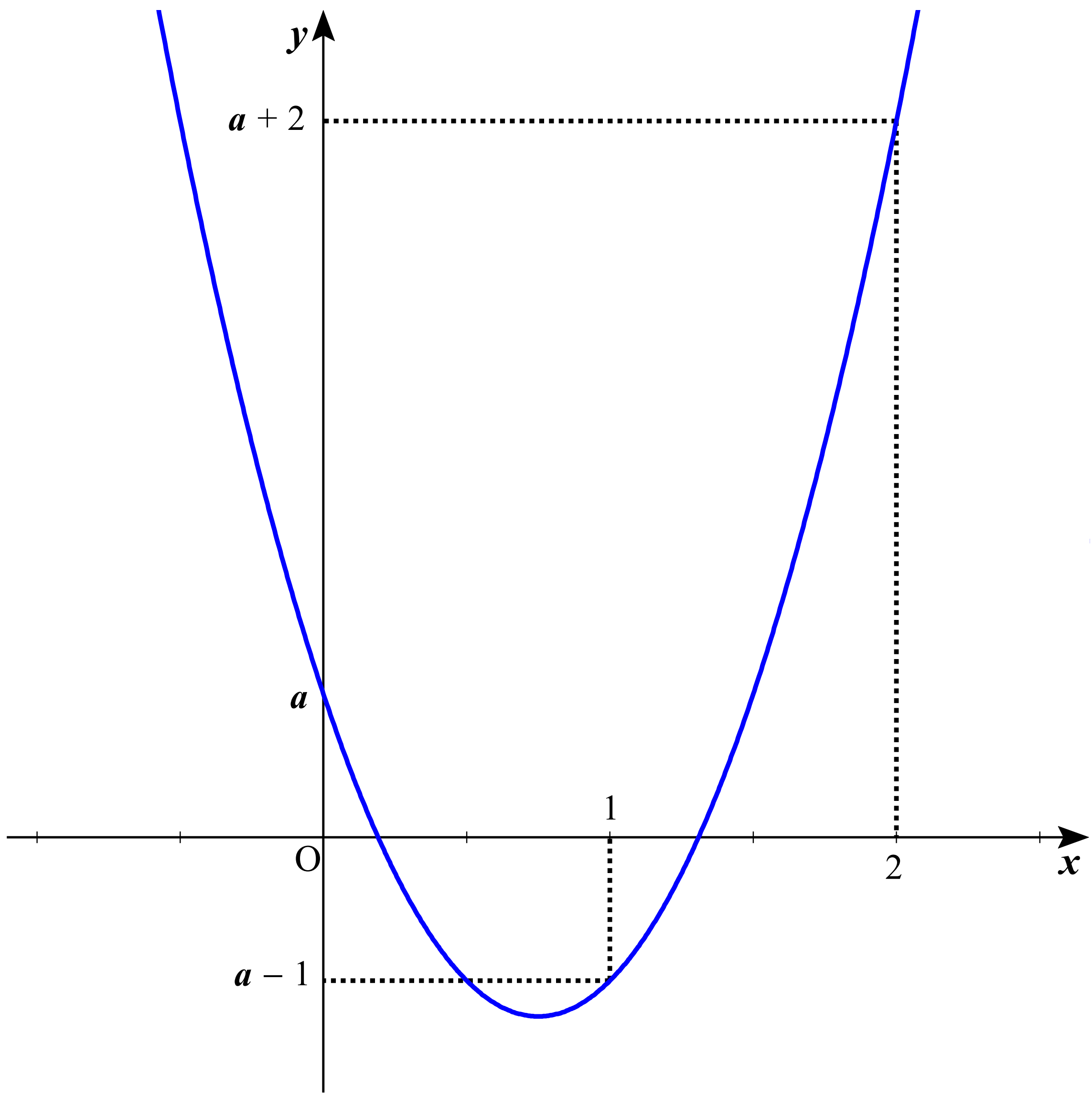
(1)

$f(x)=2x^2-3x+a$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線だから，

$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$ かつ $f(2)>0$ であればよい。

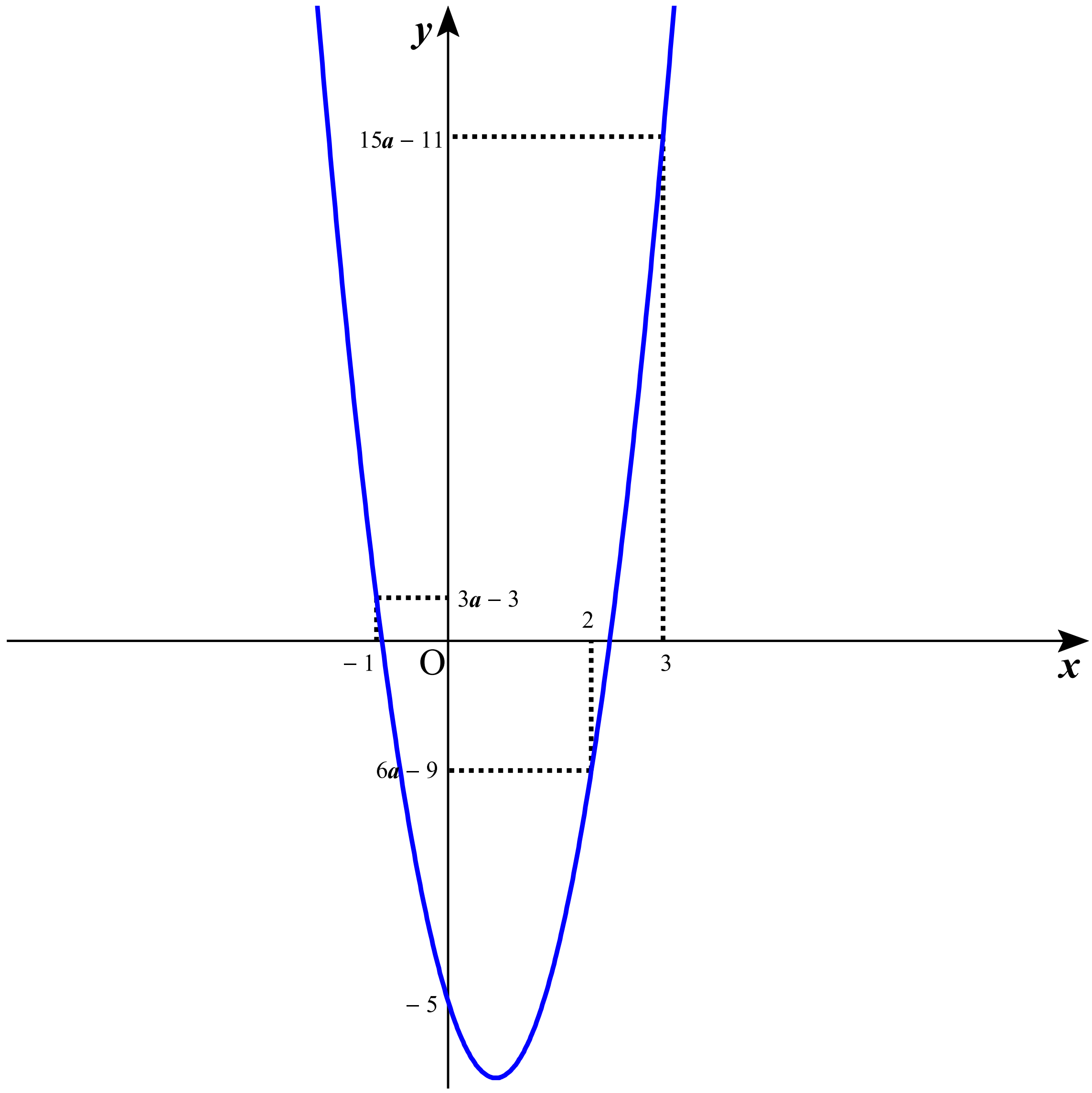
よって，$a>0$ かつ $-1+a<0$ かつ $2+a>0$

これを解くと，$0<a<1$



(2)

$f(x)=2ax^2-(a+2)x-5$ （$a>0$）とおくと，$y=f(x)$のグラフは下に凸の放物線だから，
$a>0$ かつ $f(-1)=3a-3>0$ かつ $f(0)=-5<0$ かつ $f(2)=6a-9<0$ かつ $f(3)=15a-11>0$
であればよく，これを解くことにより，$1<a<\dfrac{3}{2}$



219

$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)$ とおくと，

$f(a)=(a-b)(a-c)$, $a<b<c$ より， $f(a)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)$, $a<b<c$ より， $f(b)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)$, $a<b<c$ より， $f(c)>0$

よって，放物線 $y=f(x)$ は x 軸（ $y=0$ ）と $a<x<b$ と $b<x<c$ において共有点をもつ。

ゆえに， $(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$ は異なる 2 つの解をもち，

1 つは a と b の間にあり，他の 1 つは b と c の間にある。

220

$(x-p)(x-q)<0$， $(x-p)(x-q)\leq 0$， $(x-p)(x-q)>0$ ， $(x-p)(x-q)\geq 0$ は

p,q の大小関係で場合分け

(1)

$x^2-4ax+3a^2<0$ の左辺を因数分解すると， $(x-a)(x-3a)<0$ ・・・①

$a<3a$ すなわち $a>0$ のとき ①の解は $a<x<3a$

$a=3a$ すなわち $a=0$ のとき ①は $x^2<0$ となるから，解はない。

$a>3a$ すなわち $a<0$ のとき ①の解は $3a<x<a$

(2)

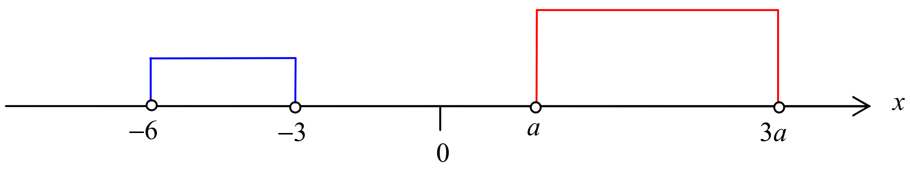
$x^2+9x+18<0$ の左辺を因数分解すると， $(x+6)(x+3)<0$ $\therefore -6<x<-3$

したがって， $-6<x<-3$ が①の解に含まれればよい。

[1] $a>0$ のとき

①の解は $0<a<x<3a$ だから， $-6<x<-3$ を含まない。

よって，不適

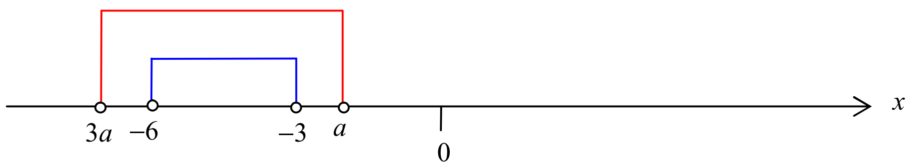


[2] $a<0$ のとき

$-6<x<-3$ が $3a<x<a$ に含まれるためには

$3a\leq -6$ かつ $-3\leq a$ すなわち $-3\leq a\leq -2$

これは $a<0$ を満たす。



[1], [2] から， $-3\leq a\leq -2$ ・・・(答)

221

(1)

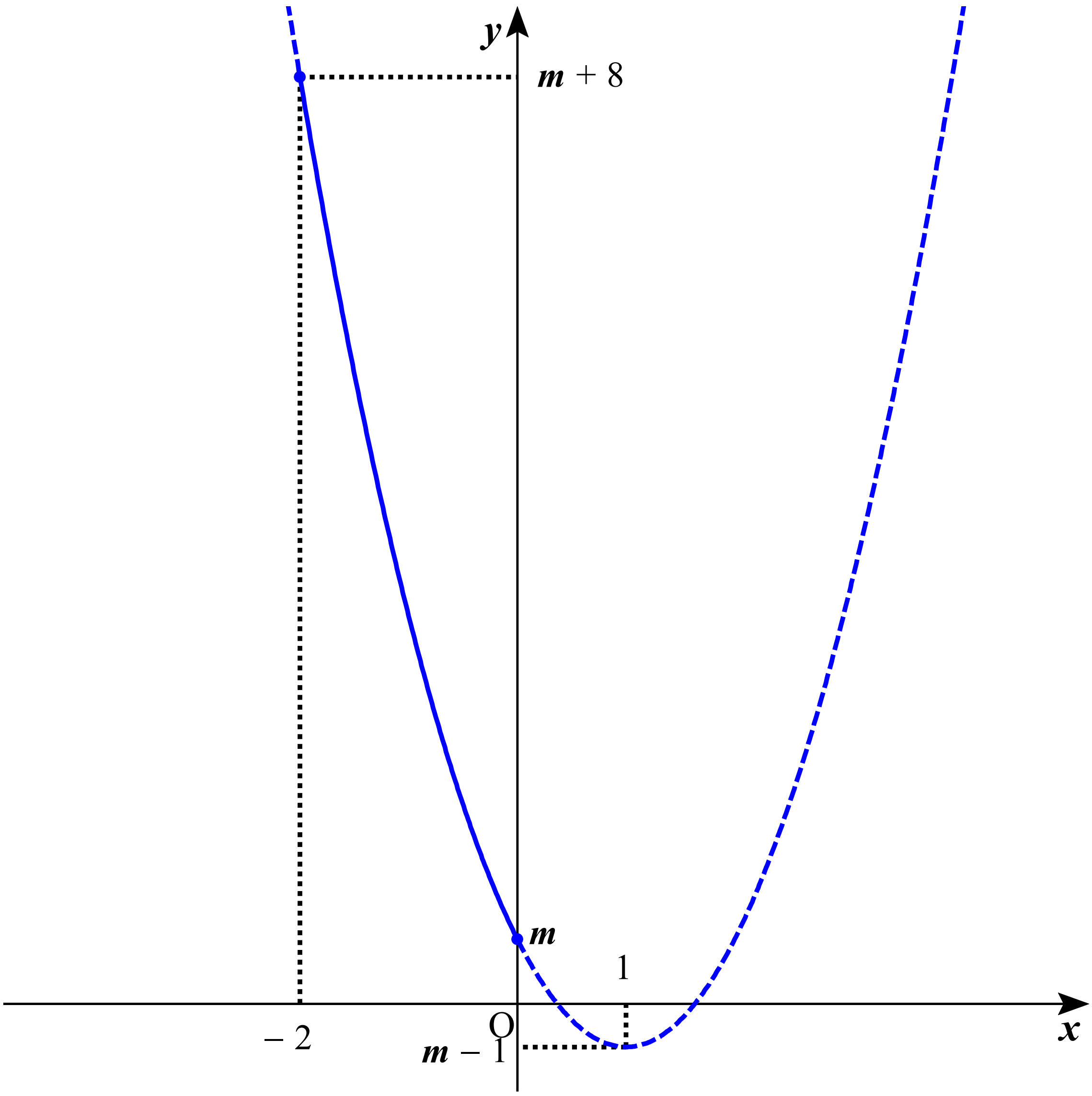
$f(x)=x^2-2x+m$ とおくと，$f(x)=(x-1)^2+m-1$ より，

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは $x=1$ を軸とする下に凸の放物線である。

(ア)

$-2\leq x\leq 0$ における $f(x)$ の最小値は $f(0)=m$ だから，

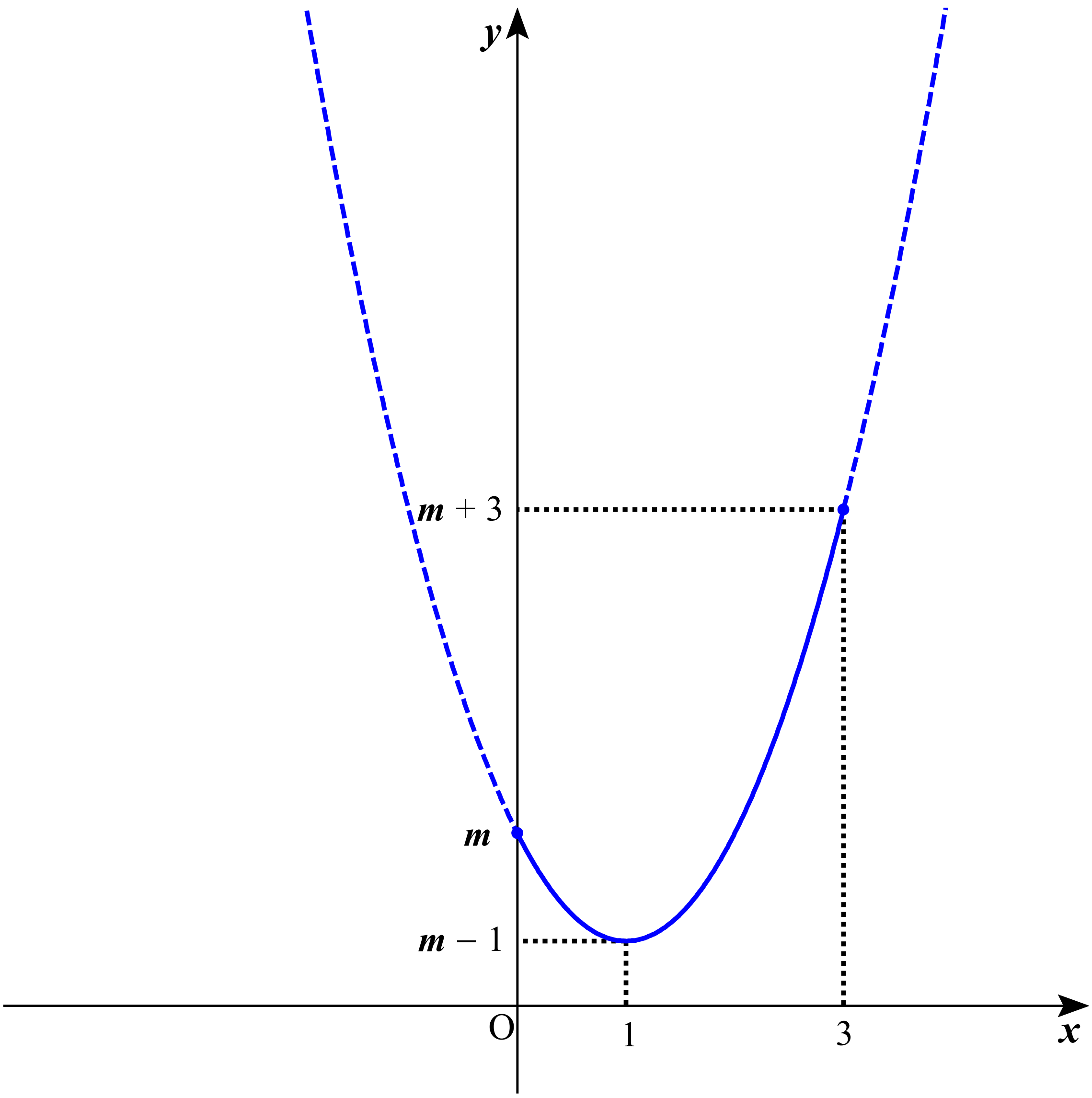
$-2\leq x\leq 0$ において $f(x)\geq 0$ であるための条件は $m\geq 0$



（イ）

$0 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値は $f(1)=m-1$ だから，

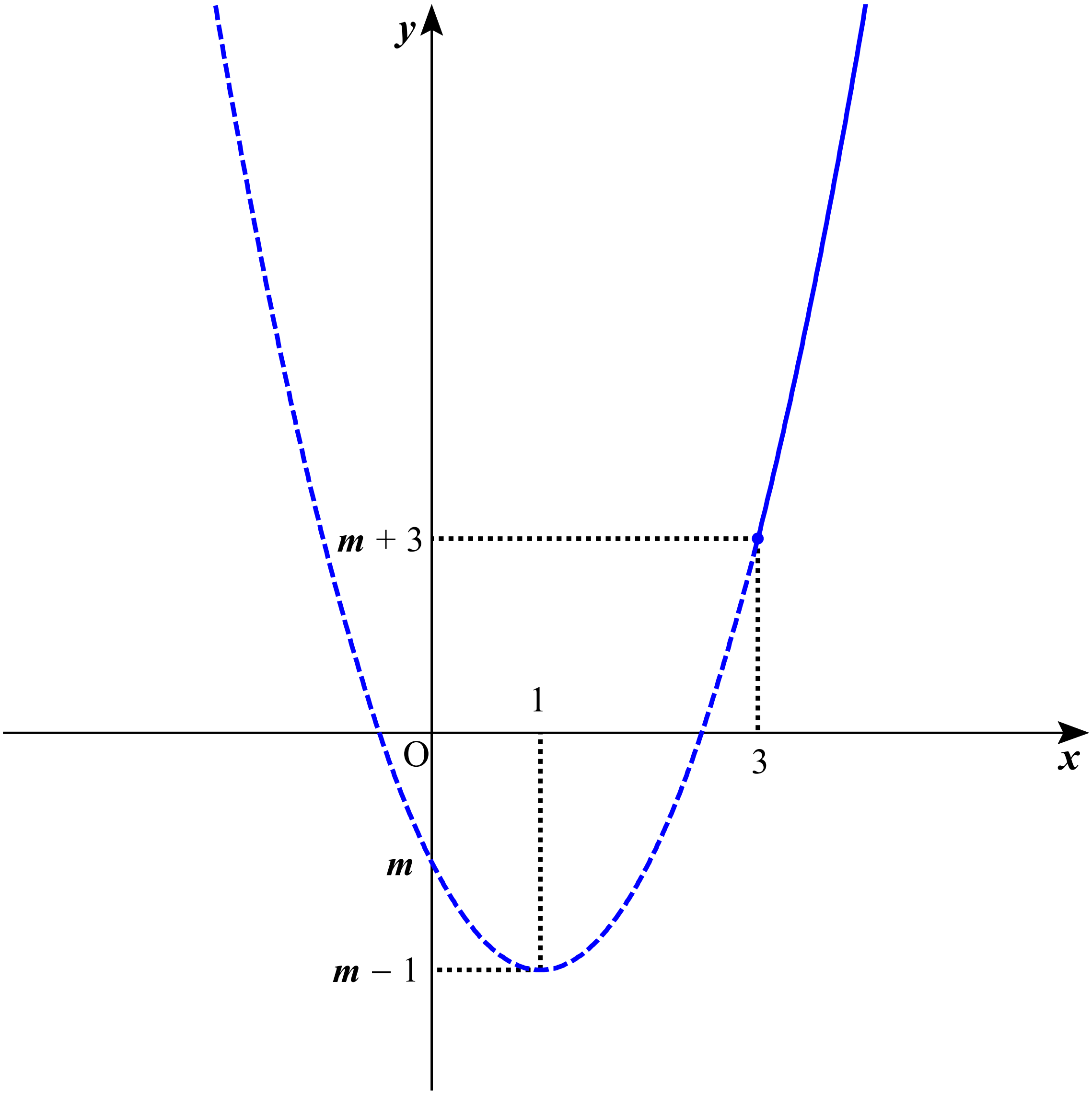
$0 \leq x \leq 3$ において $f(x) \geq 0$ であるための条件は $m-1 \geq 0$　すなわち　$m \geq 1$



（ウ）

$x \geq 3$ における $f(x)$ の最小値は $f(3) = m + 3$ だから，

$x \geq 3$ において $f(x) \geq 0$ であるための条件は $m + 3 \geq 0$ すなわち $m \geq -3$



(2)

$f(x)=x^2+2mx+1$ とおくと，$f(x)=(x+m)^2-m^2+1$ より，

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは $x=-m$ を軸とする下に凸の放物線である。

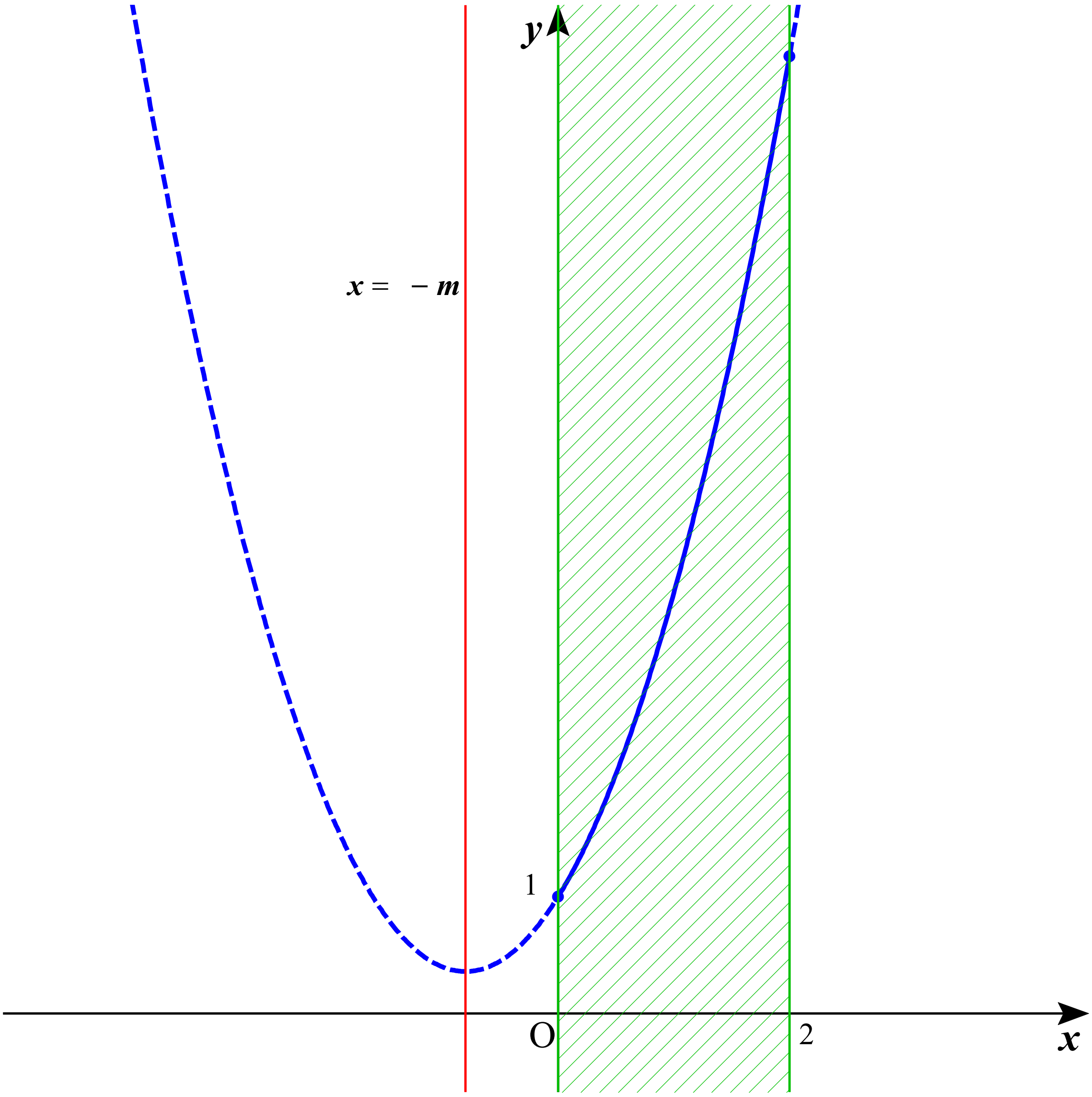
そこで，軸 $x=-m$ の位置を以下のように場合分けし，

それぞれの場合について $0\leq x\leq 2$ における $f(x)$ の最小値が 0 以上となるような定数 m の値の範囲を求めることにする。

[1] 軸 $x=-m$ が $x<0$ の部分にあるとき　すなわち $m>0$ のとき

$f(x)$ は $x=0$ で最小値をとり，その値は $f(0)=1$ だから，条件を満たす。

参考図



[2] 軸 $x=-m$ が $0\leq x\leq 2$ の部分にあるとき，すなわち $-2\leq m\leq 0$ のとき

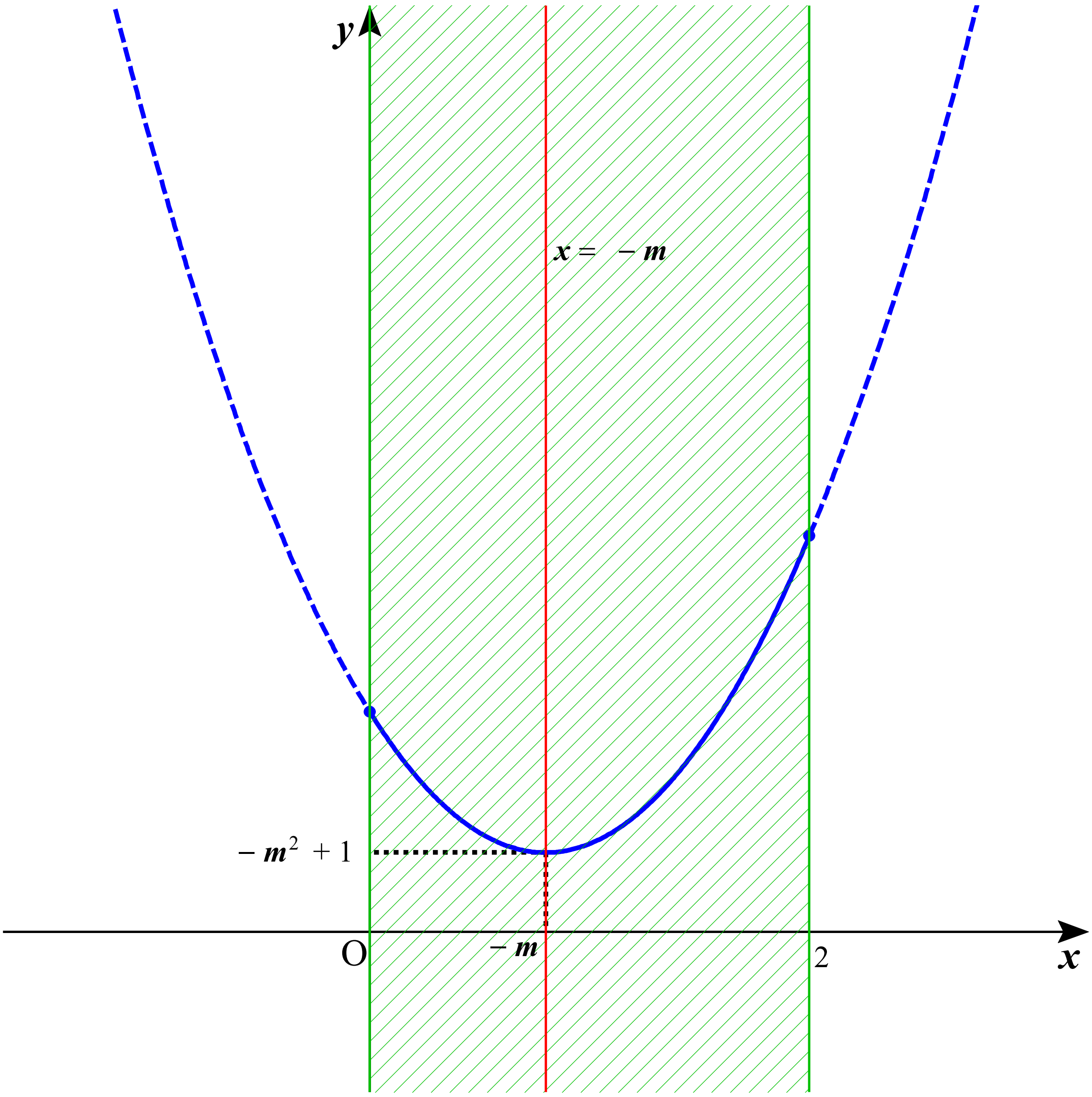
$f(x)$ は $x=-m$ で最小値をとり，その値は $f(-m)=-m^2+1$ だから，

定数 m の値の範囲は $-m^2+1\geq 0$ かつ $-2\leq m\leq 0$ の解である。

$-m^2+1\geq 0$ を解くと， $m^2-1\leq 0$ より $(m+1)(m-1)\leq 0$ だから， $-1\leq m\leq 1$

これと $-2\leq m\leq 0$ より，定数 m の値の範囲は $-1\leq m\leq 0$

参考図

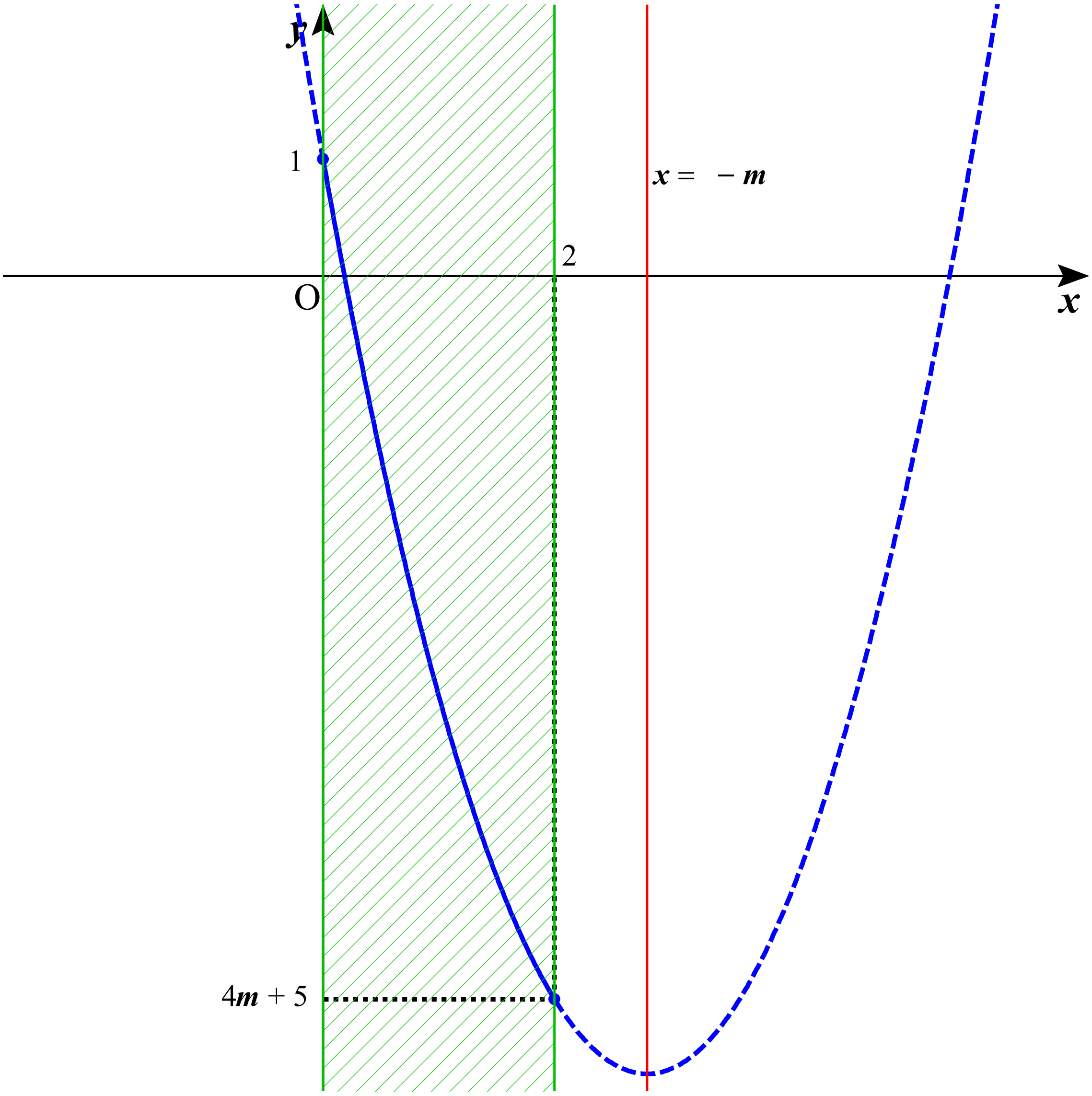


$[3]$ 軸 $x=-m$ が $2<x$ の部分にあるとき　すなわち $m<-2$ のとき
$f(x)$ は $x=2$ で最小値をとり，その値は $f(2)=4m+5$ だから，
定数 m の値の範囲は $4m+5\geq 0$ かつ $m<-2$ の解である。

$4m+5\geq 0$ を解くと $m\geq -\dfrac{5}{4}$

よって，$4m+5\geq 0$ と $m<-2$ を満たす m は存在しない。

参考図



$[1]$, $[2]$, $[3]$ より，$m>0$ または $-1\leq m\leq 0$ すなわち $m\geq -1$　・・・(答)

222

$x^2+y^2=1$ より，$y^2=1-x^2$

これと $y^2\geq 0$ より，$1-x^2\geq 0$　よって，$-1\leq x\leq 1$

また，$y^2=1-x^2$ より，

$$\begin{aligned}x^2-y^2+2x&=x^2-(1-x^2)+2x\\&=2x^2+2x-1\\&=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

したがって，$x^2+y^2=1$ のときの x^2-y^2+2x の最大値と最小値は

$-1\leq x\leq 1$ における $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$ の最大値と最小値と一致する。

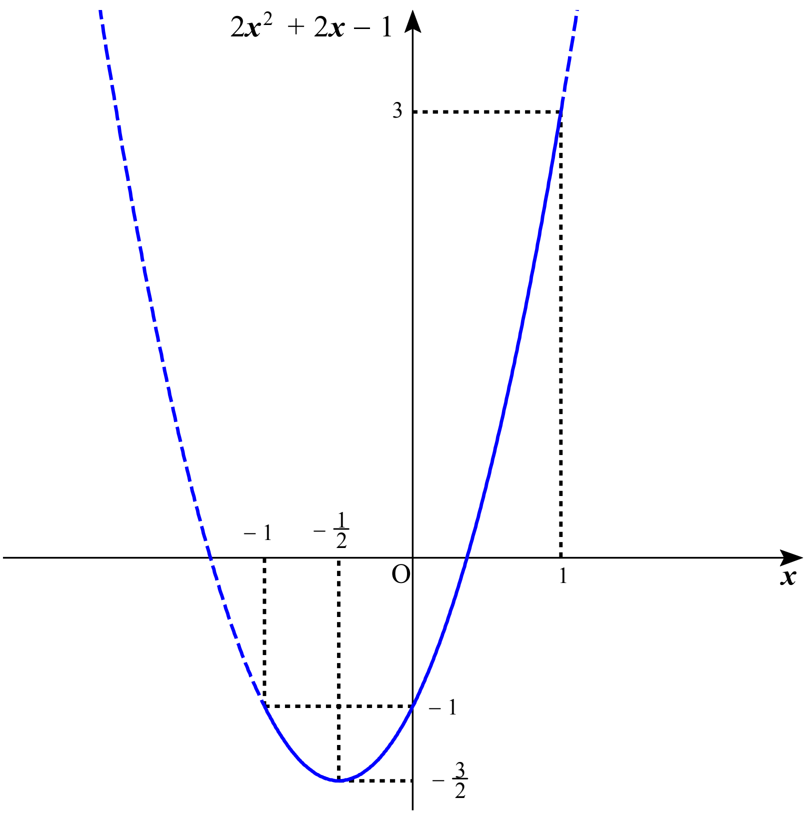
よって，x^2-y^2+2x は

$x=1$ で最大値 3，$x=-\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$ をとる。

また，$y^2=1-x^2$ より，$x=1$ のとき $y=0$，$x=-\frac{1}{2}$ のとき $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに，$x=1,\ y=0$ で最大値 3，$x=-\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

参考図



223

(1)

$z=x^2-6xy+10y^2+2y$
$\quad=(x-3y)^2+y^2+2y$

より，

$x=3y$ で $m=y^2+2y$

(2)

$m=y^2+2y$
$\quad=(y+1)^2-1$

より，

$y=-1$ で最小値 -1

(3)

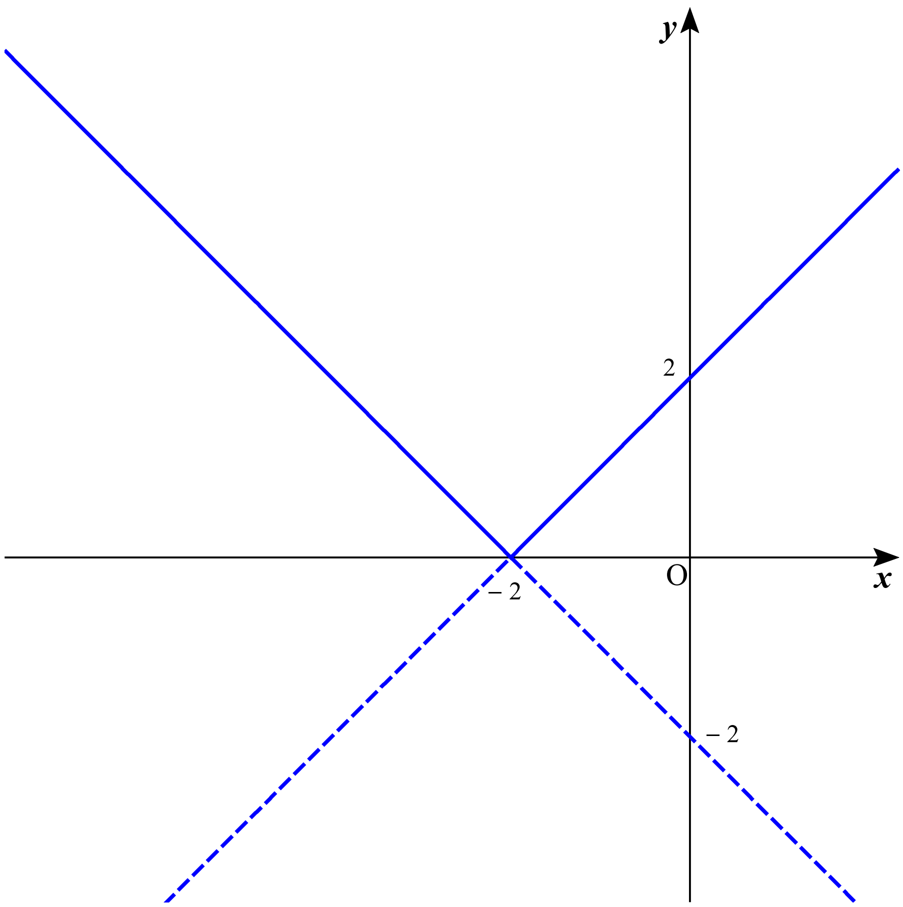
(1)，(2)より， $x=-3,\ y=-1$ で最小値 -1

224

(1)

$x\geq -2$ のとき $y=|x+2|=x+2$， $x<2$ のとき $y=|x+2|=-(x+2)=-x-2$

$y=|x+2|$ のグラフは実線部分



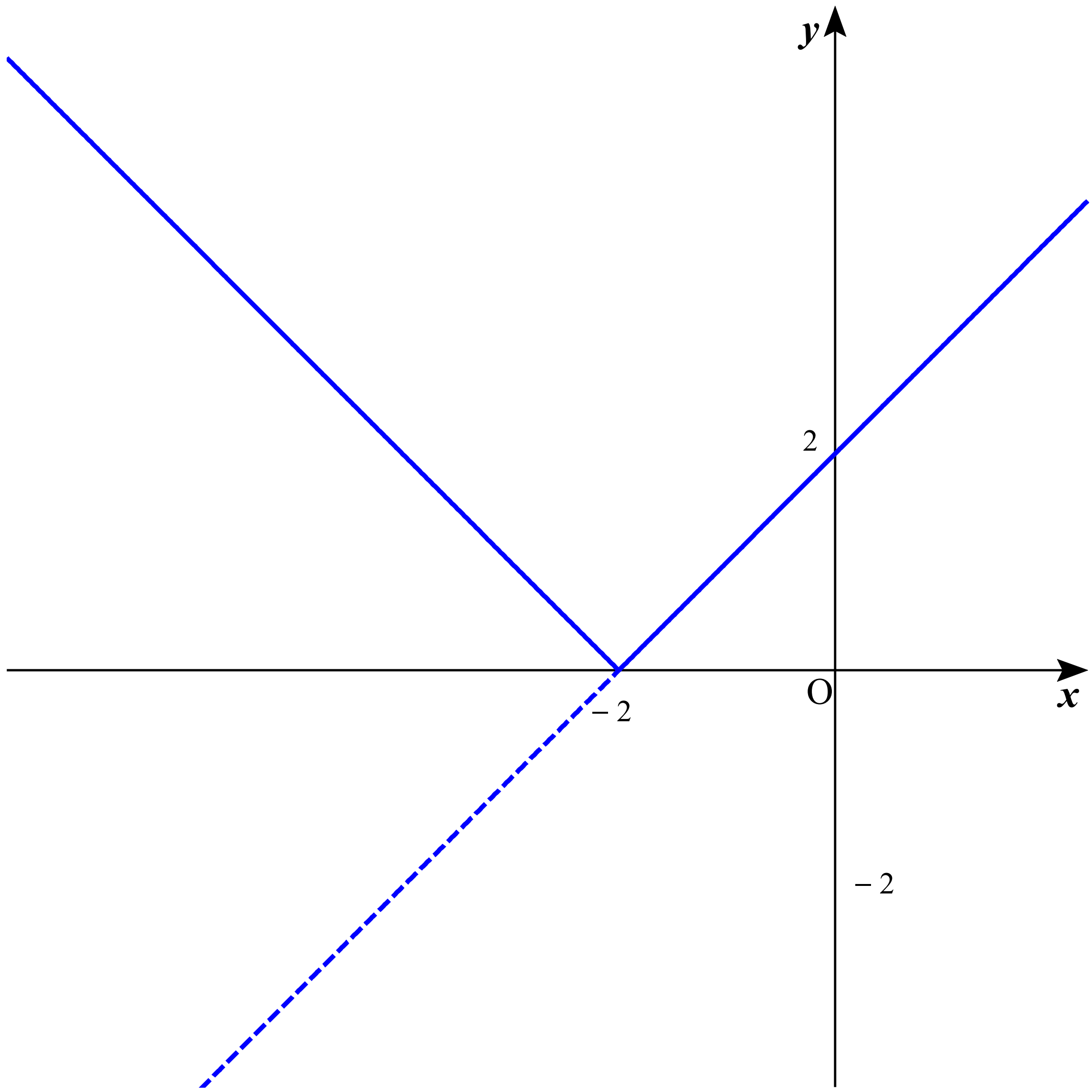
補足：簡単な描き方

$|x+2| \geq 0$ だから，

$y = x + 2$ のグラフを描いた後，

$y < 0$ の部分については x 軸に関して対称になるように移動する。

つまり，x 軸を折り目にして $y < 0$ の部分を折る。



(2)

$\left|x^2+x\right|=\left|x(x+1)\right|$ より，

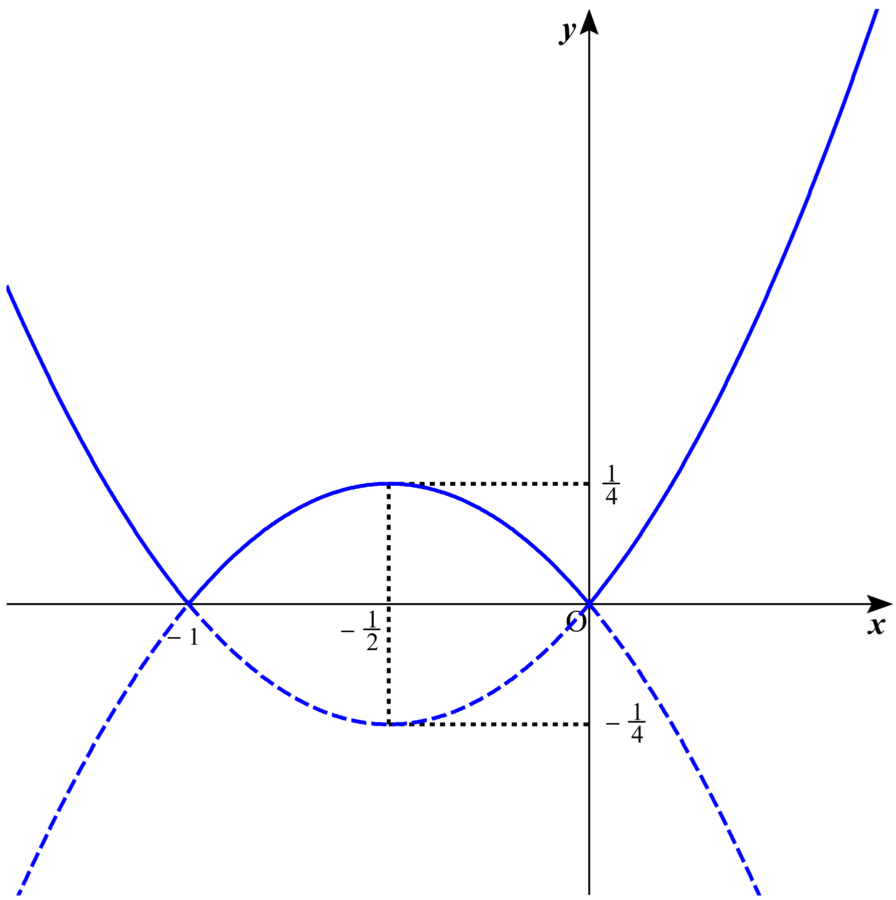
$x\leq -1,\ 0\leq x$ のとき

$$\begin{aligned}y&=\left|x^2+x\right|\\&=x^2+x\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$-1\leq x<0$ のとき

$$\begin{aligned}y&=\left|x^2+x\right|\\&=-\left(x^2+x\right)\\&=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

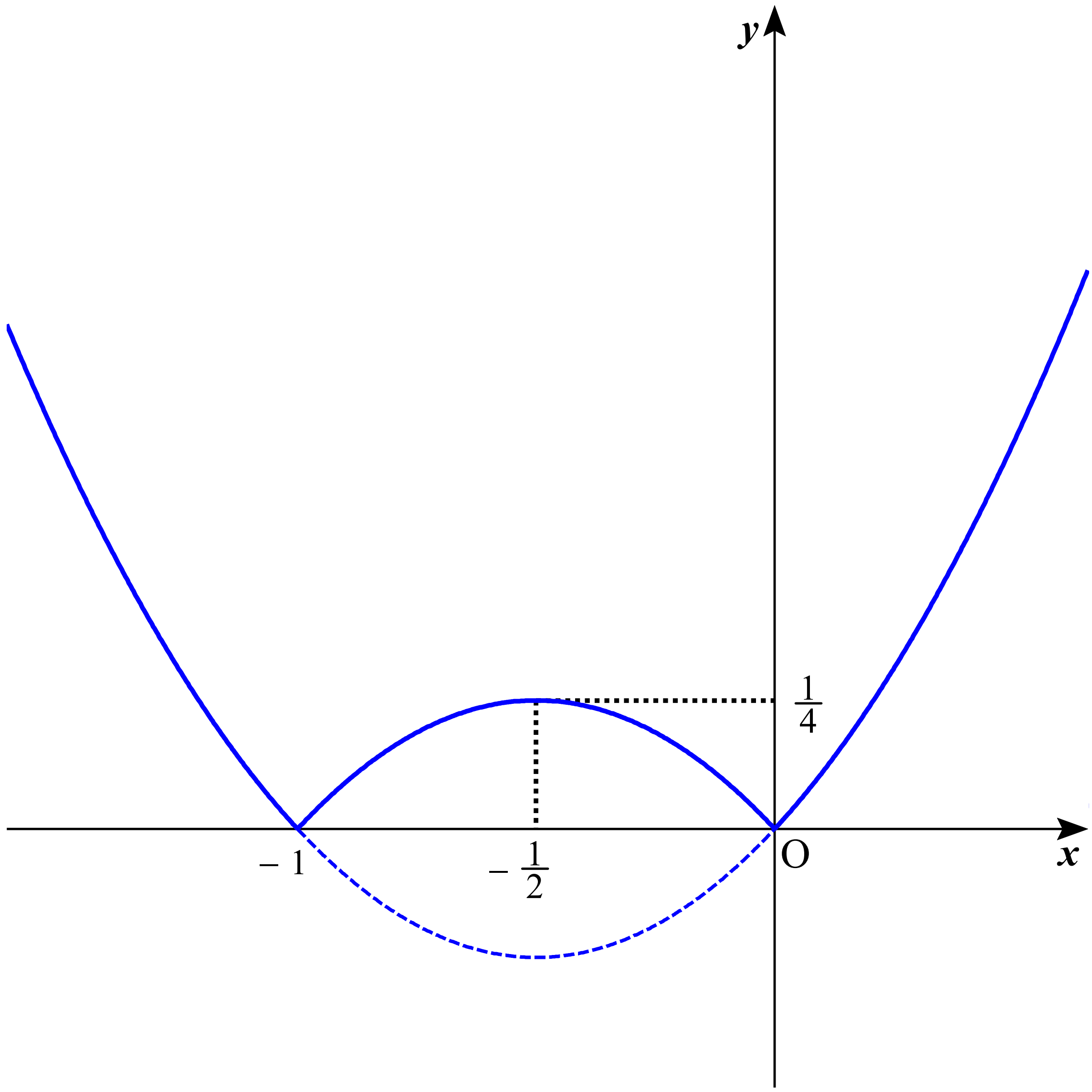
$y=\left|x^2+x\right|$ のグラフは実線部分



補足：簡単な描き方

$|x^2+x| \geq 0$ だから，

$y=x^2+x$ のグラフを描いた後，
$y<0$ の部分については x 軸に関して対称になるように移動する。
つまり，x 軸を折り目にして $y<0$ の部分を折る。



(3)

$\left|x^2-3x-4\right|=\left|(x+1)(x-4)\right|$ より，

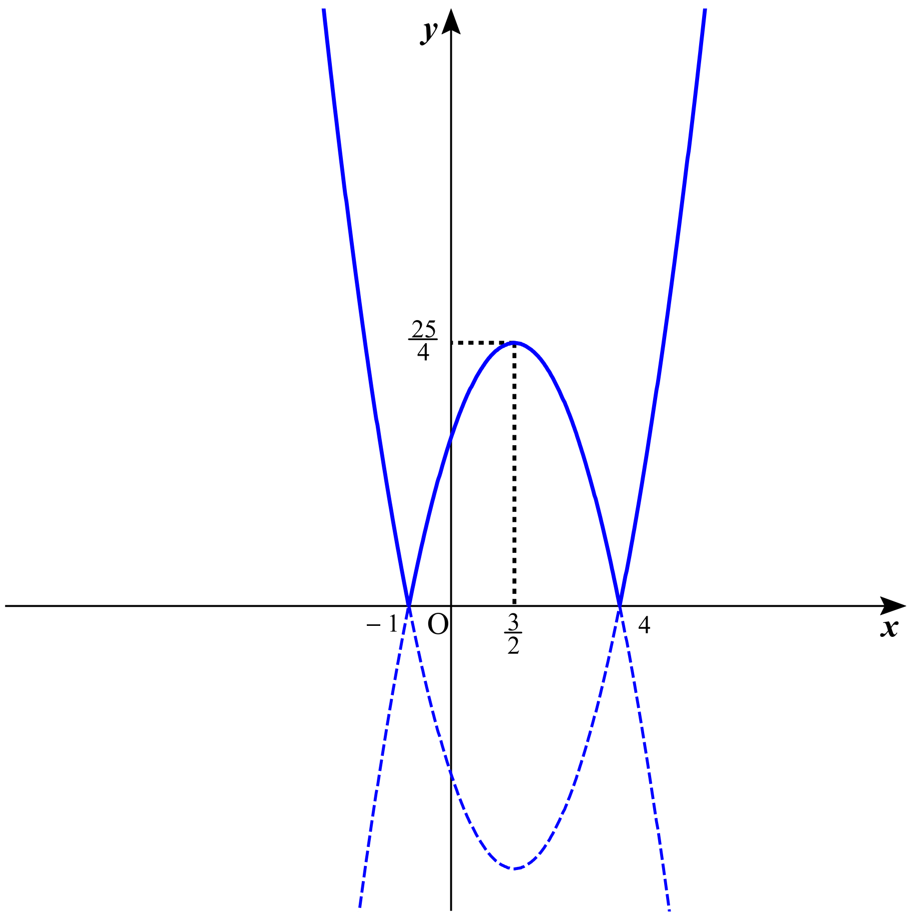
$x\leq -1,\ 4\leq x$ のとき

$$\begin{aligned} y&=\left|x^2-3x-4\right| \\ &=x^2-3x-4 \\ &=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4} \end{aligned}$$

$-1\leq x<4$ のとき

$$\begin{aligned} y&=\left|x^2-3x-4\right| \\ &=-\left(x^2-3x-4\right) \\ &=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \end{aligned}$$

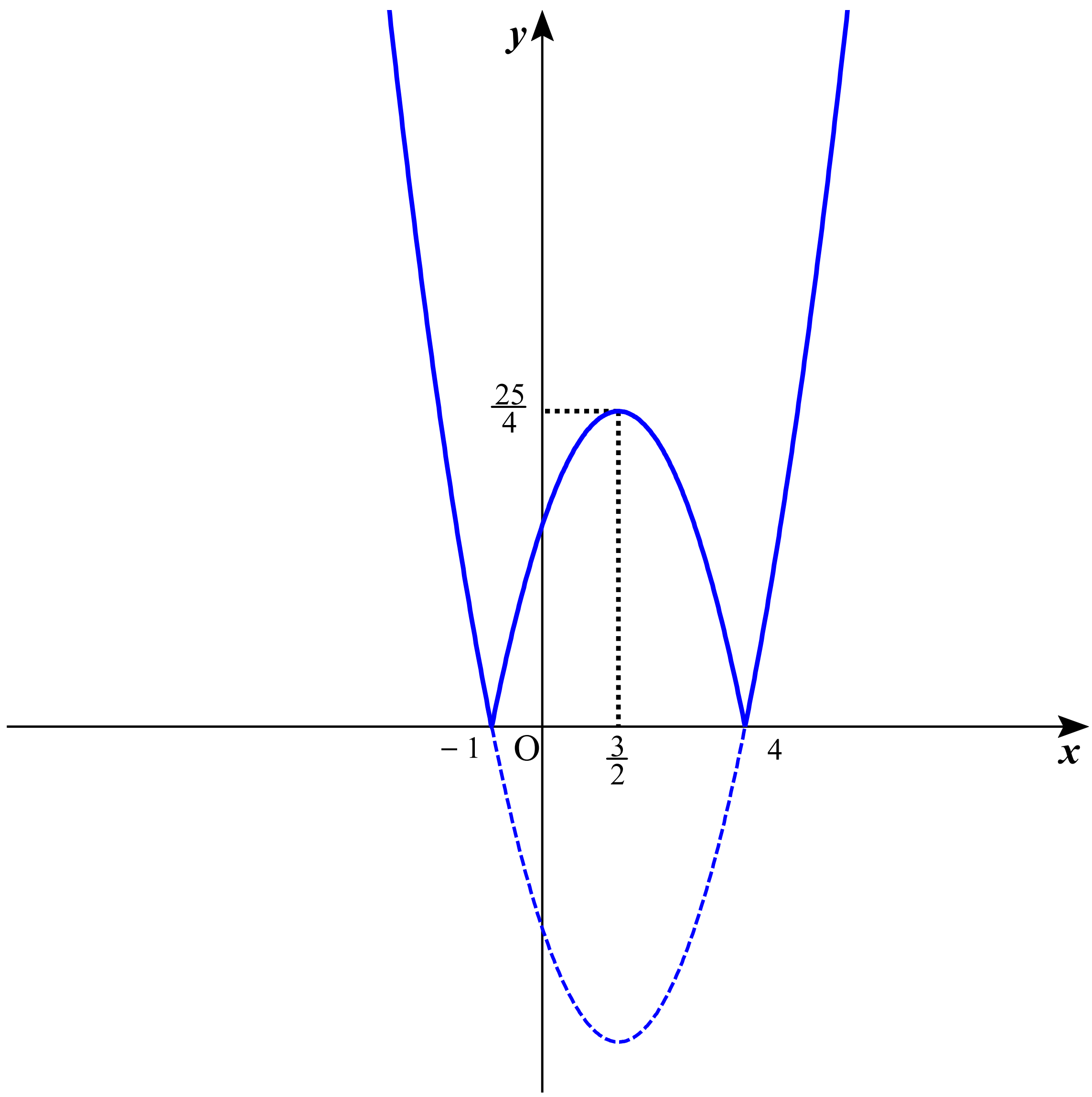
$y=\left|x^2-3x-4\right|$ のグラフは実線部分



補足：簡単な描き方

$|x^2-3x-4| \geq 0$ だから，

$y=x^2-3x-4$ のグラフを描いた後，
$y<0$ の部分については x 軸に関して対称になるように移動する。
つまり， x 軸を折り目にして $y<0$ の部分を折る。



225

(1)

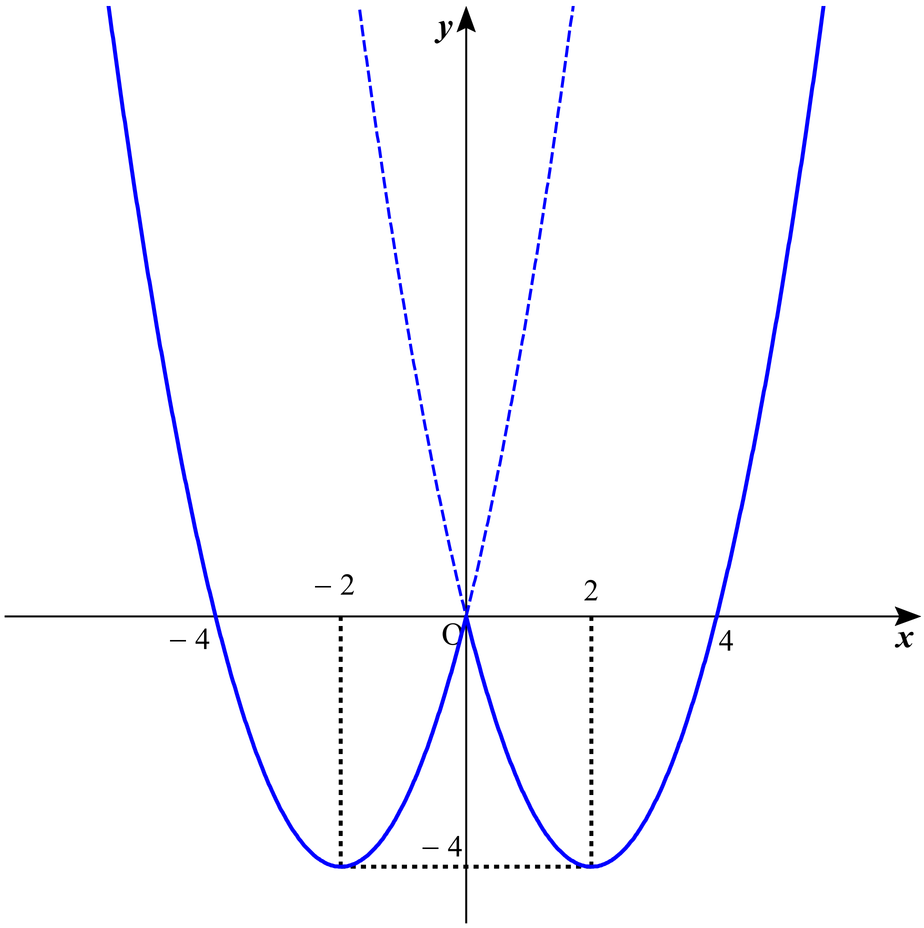
$x<0$ のとき

$$
\begin{aligned}
y &= x^2-4|x| \\
&= x^2-4\cdot(-x) \\
&= x^2+4x \\
&= (x+2)^2-4
\end{aligned}
$$

$x \geq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
y &= x^2-4|x| \\
&= x^2-4x \\
&= (x-2)^2-4
\end{aligned}
$$

$y=x^2-4|x|$ のグラフは実線部分



(2)

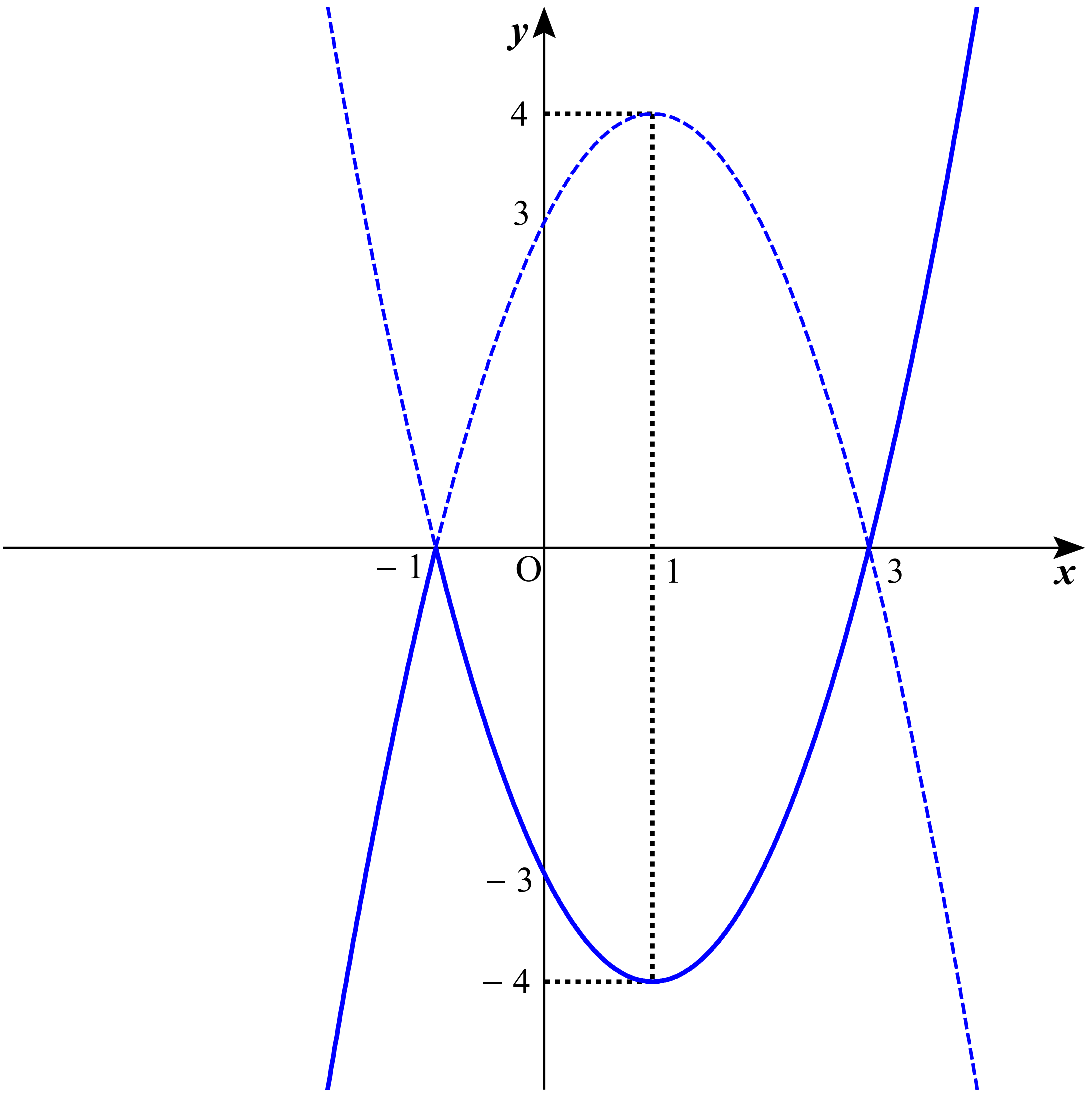
$x<-1$ のとき

$$
\begin{aligned}
y&=|x+1|(x-3)\\
&=-(x+1)(x-3)\\
&=-x^2+2x+3\\
&=-(x-1)^2+4
\end{aligned}
$$

$x\geq -1$ のとき

$$
\begin{aligned}
y&=|x+1|(x-3)\\
&=(x+1)(x-3)\\
&=x^2-2x-3\\
&=(x-1)^2-4
\end{aligned}
$$

$y=|x+1|(x-3)$ のグラフは実線部分



226

(1)

$x<0$ のとき

$|x|=-x,\ |x-1|=-(x-1)$ だから,

$$
\begin{aligned}
y&=|x|+|x-1|\\
&=-x+\{-(x-1)\}\\
&=-2x+1
\end{aligned}
$$

$0\leq x<1$ のとき

$|x|=x,\ |x-1|=-(x-1)$ だから,

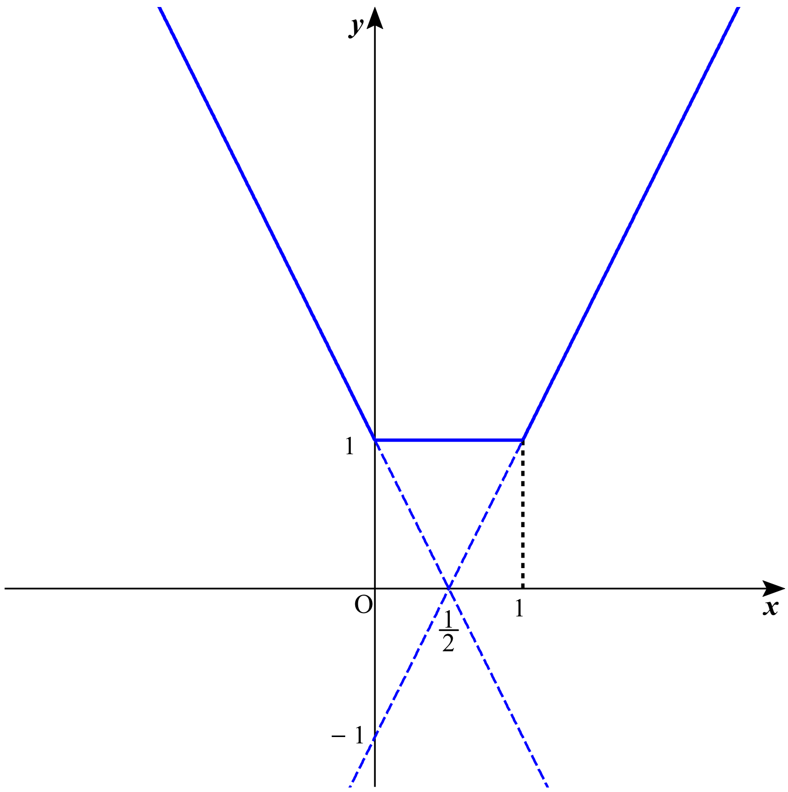
$$
\begin{aligned}
y&=|x|+|x-1|\\
&=x+\{-(x-1)\}\\
&=1
\end{aligned}
$$

$1\leq x$ のとき

$|x|=-x,\ |x-1|=x-1$ だから,

$$
\begin{aligned}
y&=|x|+|x-1|\\
&=x+x-1\\
&=2x-1
\end{aligned}
$$

$y=|x|+|x-1|$ のグラフは実線部分



(2)

$x<-1$ のとき

$|x+1|=-(x+1),\ |x-2|=-(x-2)$ だから,

$$\begin{aligned} y&=|x+1|-|x-2| \\ &=-(x+1)-\{-(x-2)\} \\ &=-3 \end{aligned}$$

$-1\leq x<2$ のとき

$|x+1|=x+1,\ |x-2|=-(x-2)$ だから,

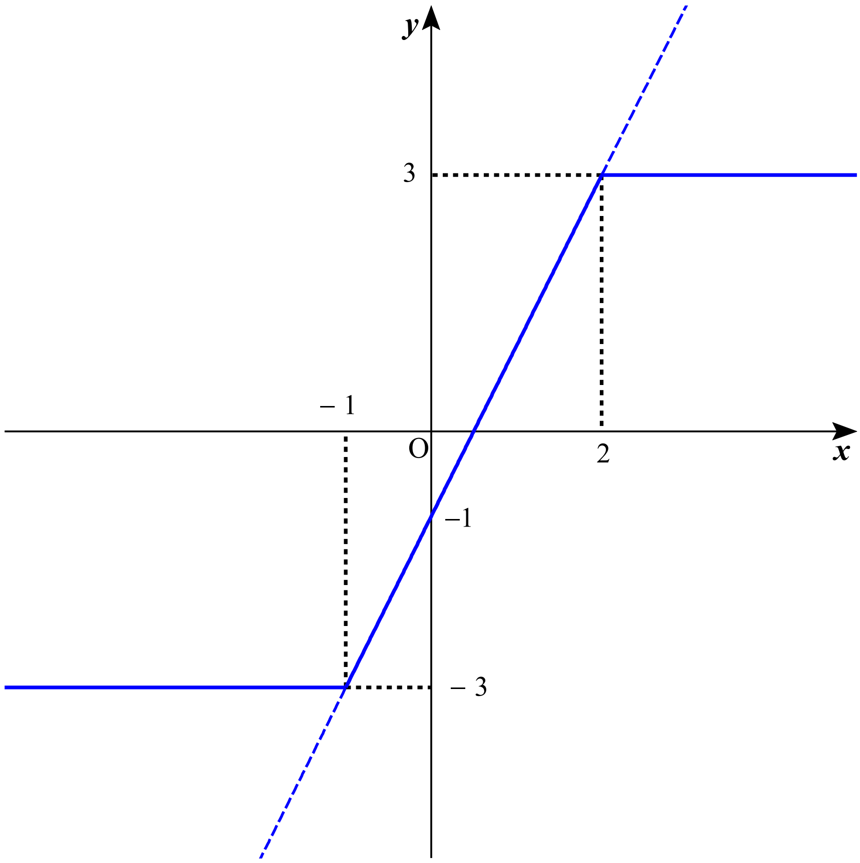
$$\begin{aligned} y&=|x+1|-|x-2| \\ &=x+1-\{-(x-2)\} \\ &=2x-1 \end{aligned}$$

$2\leq x$ のとき

$|x+1|=x+1,\ |x-2|=x-2$ だから,

$$\begin{aligned} y&=|x+1|-|x-2| \\ &=x+1-(x-2) \\ &=3 \end{aligned}$$

$y=|x+1|-|x-2|$ のグラフは実線部分



227

(1)

$y=|x+1|-2x$ とおくと，$y<0$ を満たす x の値の範囲が不等式の解である。

$x<-1$ のとき

$|x+1|=-(x+1)$ だから，

$$
\begin{aligned}
y&=|x+1|-2x\\
&=-(x+1)-2x\\
&=-3x-1
\end{aligned}
$$

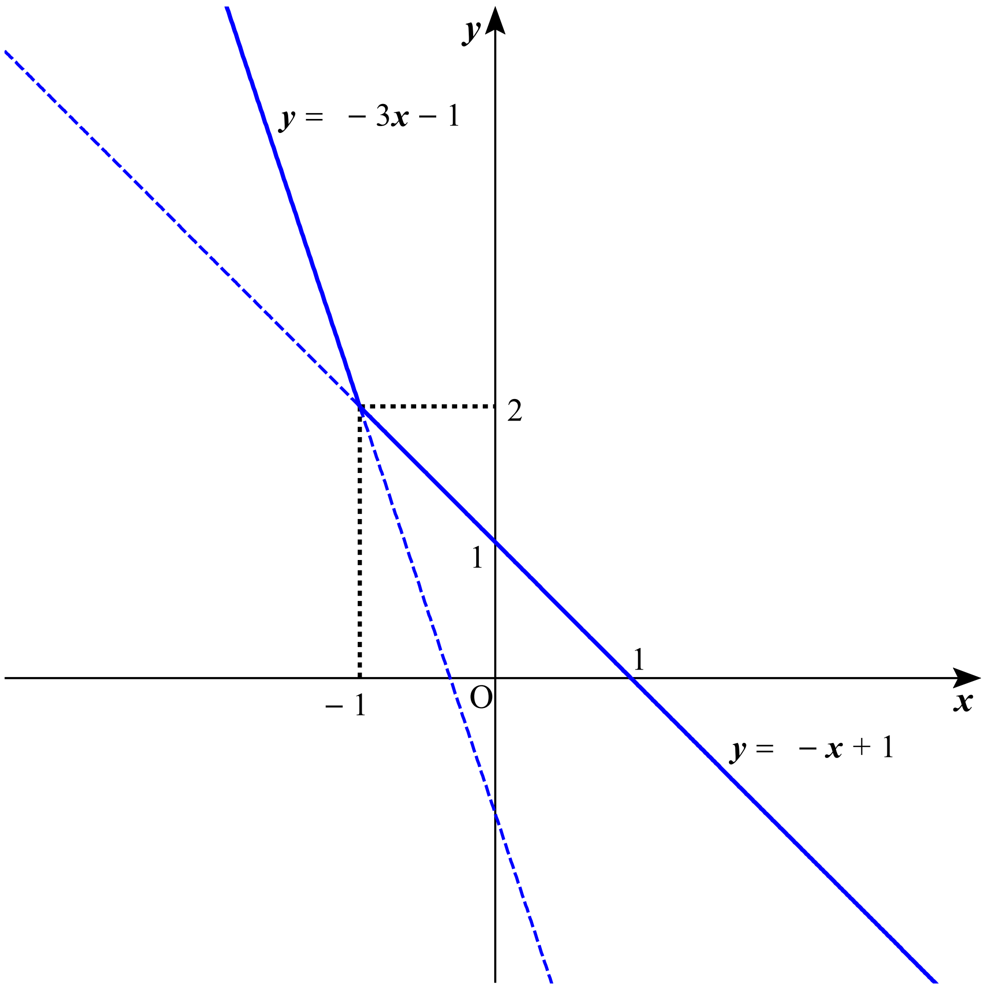
$-1\leq x$ のとき

$|x+1|=x+1$ だから，

$$
\begin{aligned}
y&=|x+1|-2x\\
&=x+1-2x\\
&=-x+1
\end{aligned}
$$

よって，$y=|x+1|-2x$ のグラフは下図実線部分である。

ゆえに，不等式の解は $y=-x+1\ (x\geq -1)$ の $y<0$ を満たす x の値の範囲，すなわち $x>1$



(2)

$y=\left|x^2-4\right|+3x$ とおくと，$y>0$ を満たす x の値の範囲が不等式の解である。

$x \leq -2,\ 2 \leq x$ のとき

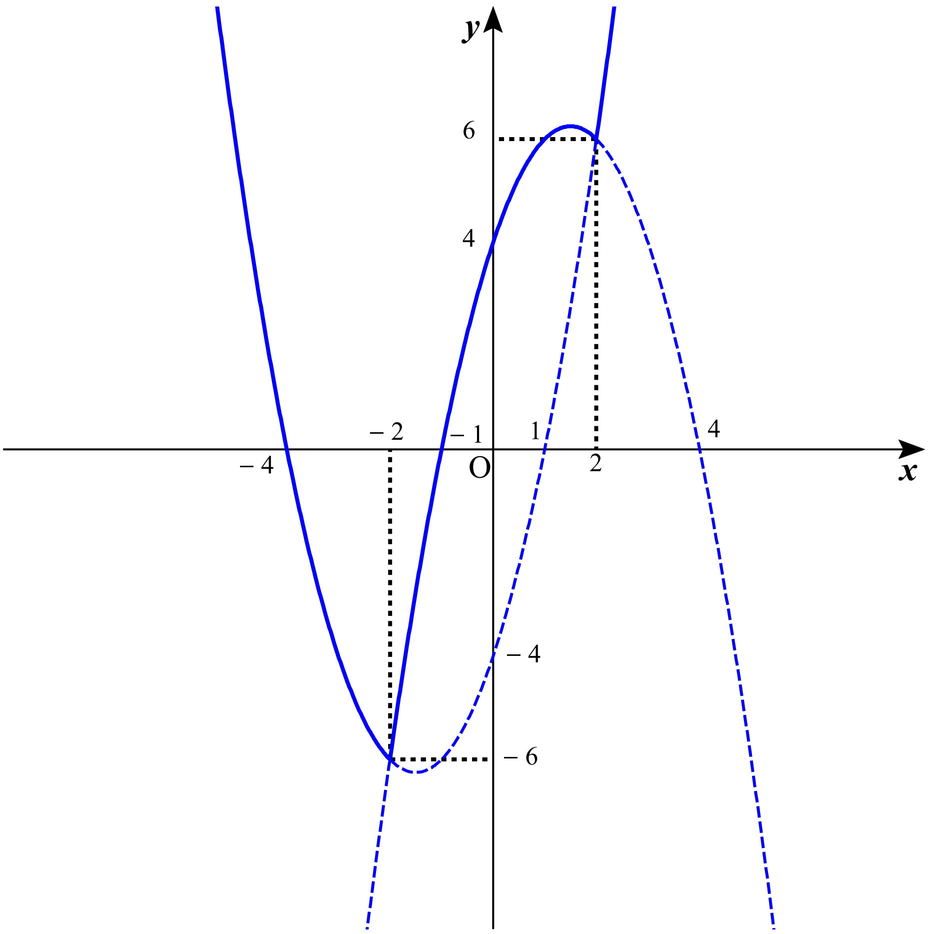
$$\begin{aligned} y&=\left|x^2-4\right|+3x \\ &=x^2-4+3x \\ &=(x+4)(x-1) \end{aligned}$$

$-2<x<2$ のとき

$$\begin{aligned} y&=\left|x^2-4\right|+3x \\ &=-\left(x^2-4\right)+3x \\ &=-(x+1)(x-4) \end{aligned}$$

よって，$y=\left|x^2-4\right|+3x$ のグラフは下図実線部分である。

ゆえに，不等式の解は $x<-4,\ -1<x$



228

(1)

$|x^2+2x| = |x(x+2)|$ より，

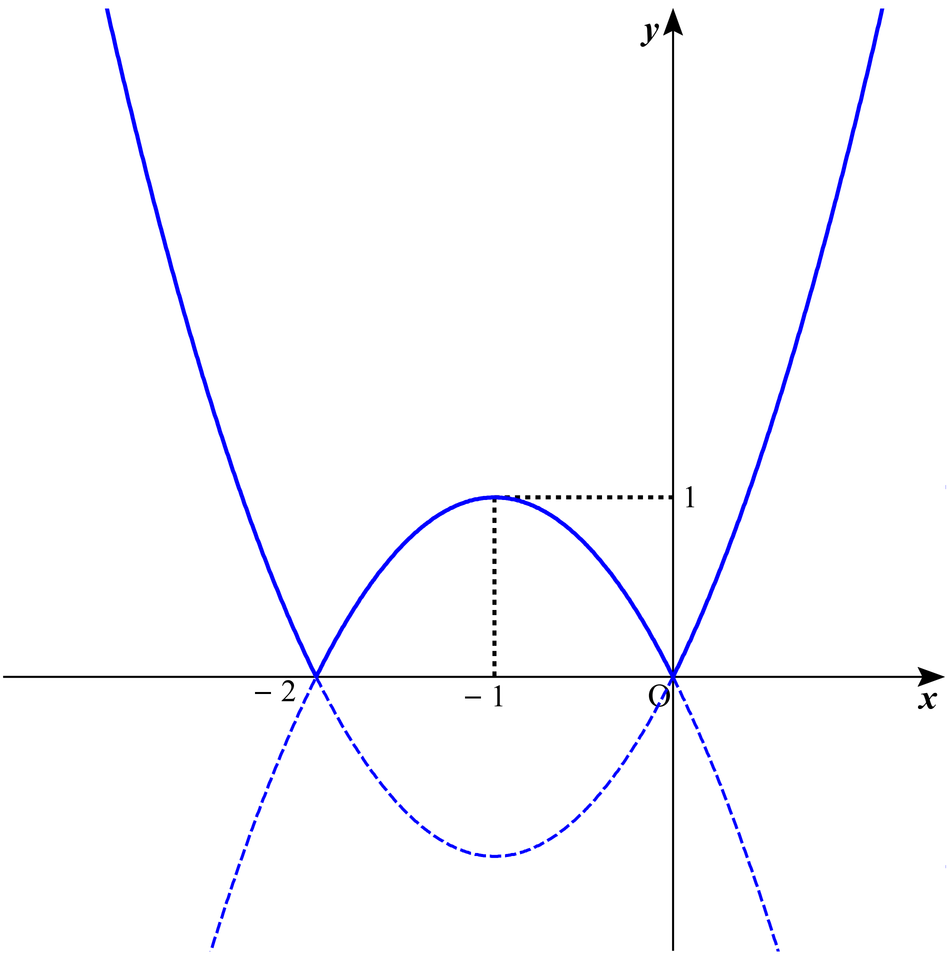
$x \le -2,\ 0 \le x$ のとき

$$\begin{aligned} y &= |x^2+2x| \\ &= x^2+2x \\ &= (x+1)^2-1 \end{aligned}$$

$-2 < x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} y &= |x^2+2x| \\ &= -(x^2+2x) \\ &= -(x+1)^2+1 \end{aligned}$$

よって，$y=|x^2+2x|$ のグラフは下図実線部分



(2)

$\left|x^2+2x\right|=k$ の実数解は $y=\left|x^2+2x\right|$ と $y=k$ の共有点の x 座標と一致するから，

実数解の個数は $y=\left|x^2+2x\right|$ と $y=k$ の共有点の個数と一致する。

よって，下図より，
$k<0$ のとき 0 個
$k=0$ のとき 2 個
$0<k<1$ のとき 4 個
$k=1$ のとき 3 個，
$k>1$ のとき 2 個