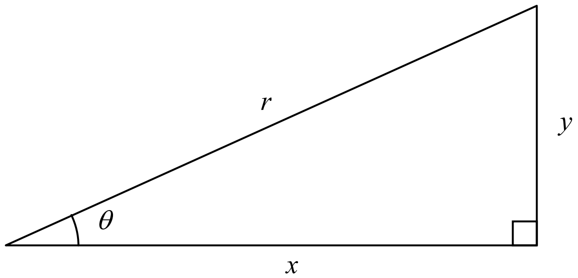
図形と計量 1　三角比

三角比



直角三角形の斜辺の長さを r , 底辺の長さを x , 高さを y , 斜辺と底辺のなす角を θ とすると,

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\quad \sin\theta = \frac{y}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

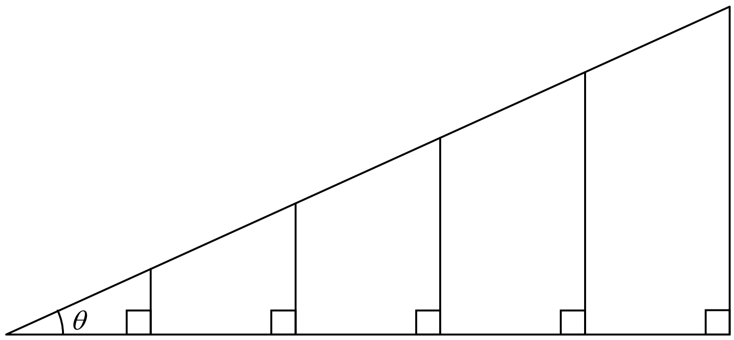
解説

相似な直角三角形の斜辺と底辺のなす角を θ とすると,

相似な直角三角形の間で

$$\frac{\text{底辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}} = \text{一定値},\quad \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺の長さ}} = \text{一定値},\quad \frac{\text{高さ}}{\text{底辺の長さ}} = \text{一定値}$$

が成り立つ。



そこで，それぞれの一定値に対し $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ という表現を与えると,

斜辺と底辺のなす角が θ のすべての直角三角形に対し,

$$\frac{\text{底辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}} = \cos\theta,\quad \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺の長さ}} = \sin\theta,\quad \frac{\text{高さ}}{\text{底辺の長さ}} = \tan\theta$$

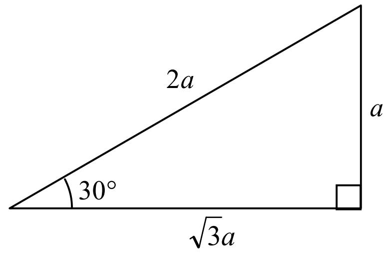
と表せる。

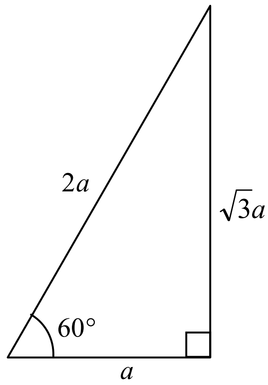
ゆえに,

直角三角形の斜辺の長さを r , 底辺の長さを x , 高さを y , 斜辺と底辺のなす角を θ とすると,

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\quad \sin\theta = \frac{y}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

例





$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 30° = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\tan 30° = \dfrac{a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos 60° = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$

cos（コサイン），sin（サイン），tan（タンジェント）の日本語での呼び方はそれぞれ余弦，正弦，正接である。

尚，cos, sin, tan は略語で，それぞれの正式なつづりは cosine, sine, tangent である。

sin，cos，tan は高校数学の主役ともいえるので，しっかりと学びましょう。

233

塔が地面に対し垂直であるとする。

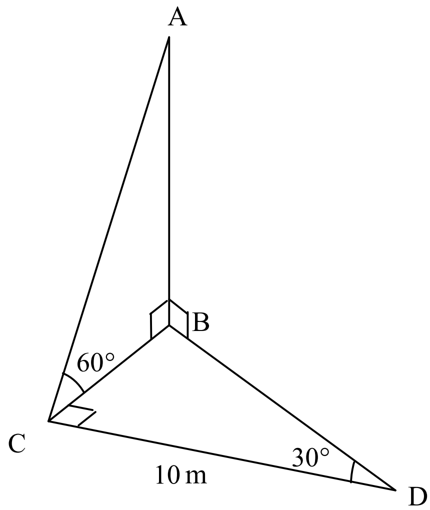
直角三角形 ACB について，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}=\tan 60^\circ$ より，$\mathrm{AB}=\mathrm{CB}\tan 60^\circ$ ・・・①

直角三角形 CDB について，$\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}}=\tan 30^\circ$ より，$\mathrm{CB}=\mathrm{CD}\tan 30^\circ$ ・・・②

①，②より，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}\tan 30^\circ\cdot\tan 60^\circ$

これと $\mathrm{CD}=10\,\mathrm{m}$，$\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ より，

$\mathrm{AB}=10\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=10\,\mathrm{m}$



234

$\dfrac{PQ}{BQ}=\tan 30^\circ$ より， $BQ=\dfrac{PQ}{\tan 30^\circ}=\dfrac{PQ}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}PQ$ ・・・①

（または， $\angle BPQ=60^\circ$ だから， $\dfrac{BQ}{PQ}=\tan 60^\circ$ $\therefore BQ=PQ\tan 60^\circ=\sqrt{3}PQ$ ）

また，直角二等辺三角形 PAQ は AQ＝PQ ・・・②

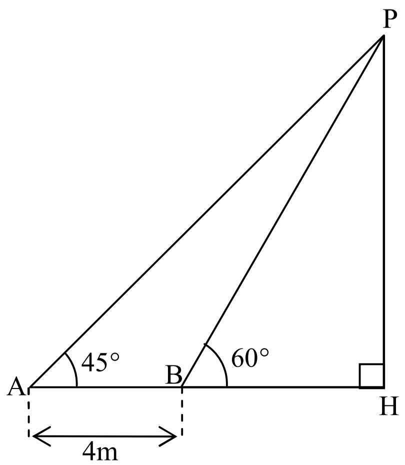
直角三角形 BAQ について，三平方の定理および①，②より，

$$\begin{aligned} AB^2 &= BQ^2+AQ^2 \\ &= \left(\sqrt{3}PQ\right)^2+PQ^2 \\ &= 4PQ^2 \end{aligned}$$

$\therefore PQ=\dfrac{AB}{2}$

AB＝20m だから，建物の高さ PQ＝5m

235



木の根元を H とすると，AH＝PH ・・・①

$\dfrac{PH}{BH}=\tan 60^\circ$ より， $BH=\dfrac{PH}{\tan 60^\circ}=\dfrac{PH}{\sqrt{3}}$

これと $AH=AB+BH$ より， $AH=4+\dfrac{PH}{\sqrt{3}}$ ・・・②

①，②より， $PH=4+\dfrac{PH}{\sqrt{3}}$

両辺に $\sqrt{3}$ をかけて整理すると， $\left(\sqrt{3}-1\right)PH=4\sqrt{3}$

$$\therefore \mathrm{PH} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$$
$$= \frac{4\left(3+\sqrt{3}\right)}{3-1}$$
$$= 2\left(3+\sqrt{3}\right)$$

ゆえに，木の高さは$2\left(3+\sqrt{3}\right)$m

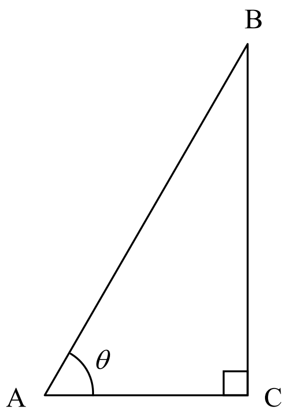
236

(1)

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \sin\theta$ より，　$\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\sin\theta = k\sin\theta$

(2)

$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \cos\theta$ より，　$\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\cos\theta = k\cos\theta$



(3)

$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}} = \cos\theta$ より，　$\mathrm{AD} = \mathrm{AC}\cos\theta$

これと $\mathrm{AC} = k\cos\theta$ より，　$\mathrm{AD} = k\cos\theta\cos\theta = k\cos^2\theta$

補足

$(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta,\ (\sin\theta)^2 = \sin^2\theta,\ (\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$

一般に，$(\cos\theta)^p = \cos^p\theta,\ (\sin\theta)^p = \sin^p\theta,\ (\tan\theta)^p = \tan^p\theta$

(4)

$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\sin\theta$ より，$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\sin\theta$

これと $\mathrm{AC}=k\cos\theta$ より，$\mathrm{CD}=k\cos\theta\sin\theta=k\sin\theta\cos\theta$

補足

$\cos\theta\sin\theta$ ではなく，$\sin\theta\cos\theta$ と表すのがふつうである。

別解

$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}=\tan\theta$ より，$\mathrm{CD}=\mathrm{AD}\tan\theta$

これと $\mathrm{AD}=k\cos^2\theta$ より，$\mathrm{CD}=k\cos^2\theta\tan\theta$ ・・・①

ここで，$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\sin\theta,\ \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}=\cos\theta$ より，$\sin\theta\div\cos\theta=\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}=\tan\theta$　$\therefore\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ・・・②

②を①に代入すると，$\mathrm{CD}=k\cos^2\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=k\sin\theta\cos\theta$

(5)

△BAC と△BCD は∠B $(\neq 90^\circ)$ を共有する直角三角形だから，△BAC ∽ △BCD

よって，$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BAC}=\theta$

したがって，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\sin\theta$　$\therefore\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\sin\theta$

これと $\mathrm{BC}=k\sin\theta$ より，$\mathrm{BD}=k\sin\theta\sin\theta=k\sin^2\theta$

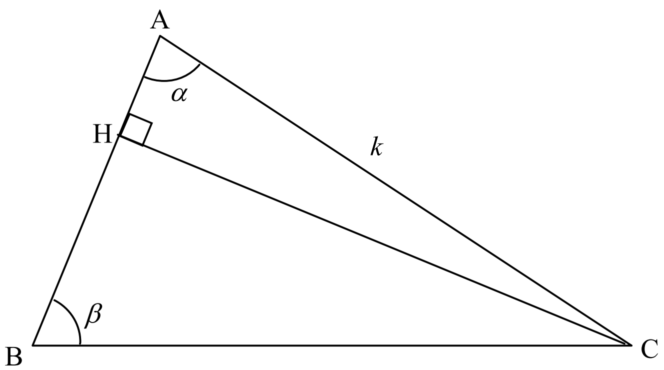
237

C から辺 AB に下ろした垂線の足を H とすると，

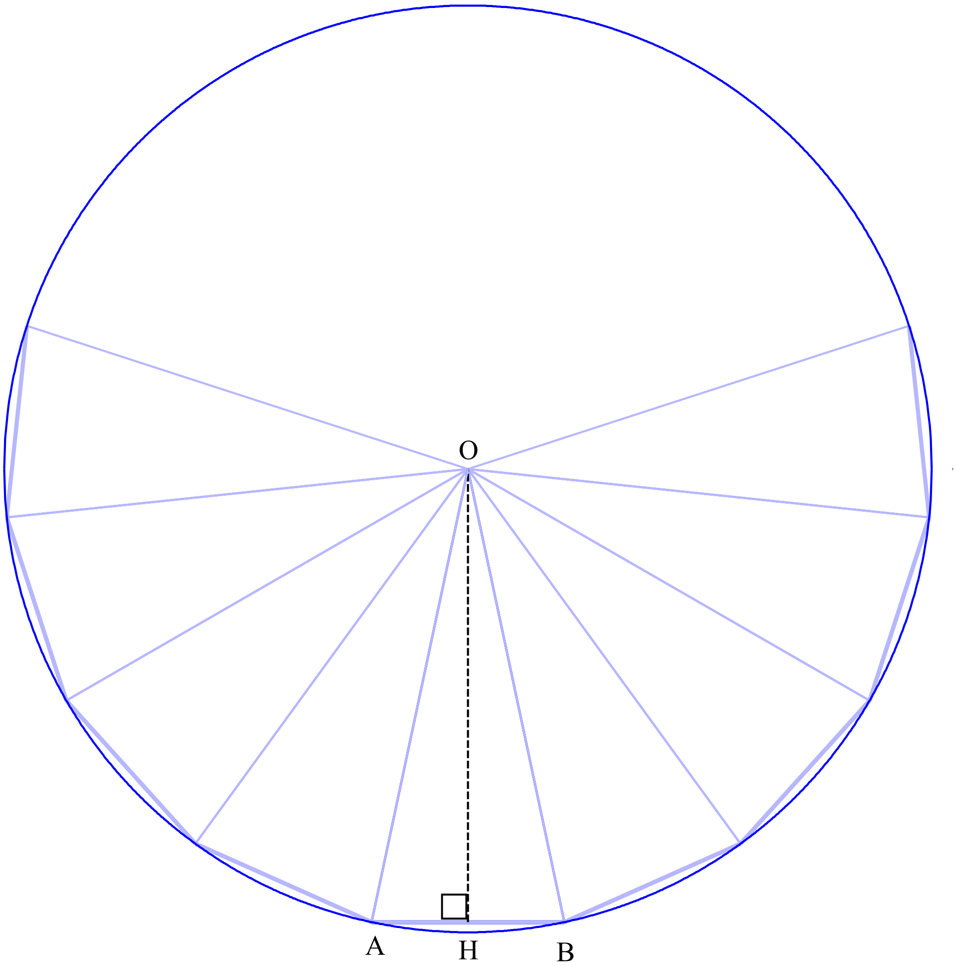
$\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}}=\sin\alpha$　$\therefore\mathrm{CH}=\mathrm{AC}\sin\alpha=k\sin\alpha$ ・・・③

$\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{BC}}=\sin\beta$　$\therefore\mathrm{CH}=\mathrm{BC}\sin\beta$ ・・・④

③，④より，$\mathrm{BC}\sin\beta=k\sin\alpha$　$\therefore\mathrm{BC}=\dfrac{k\sin\alpha}{\sin\beta}$



238



正 n 角形の外接円の中心 O から各頂点に線分を引くことにより，
正 n 角形は合同な n 個の二等辺三角形に分割されるから，

その 1 つの二等辺三角形を△OAB とすると，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{360^\circ}{n}$

これと，O から辺 AB に下ろした垂線の足を H とすると，二等辺三角形の性質より，

OH は∠AOB の 2 等分線であることから，$\angle\mathrm{AOH}=\dfrac{360^\circ}{n}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{180^\circ}{n}$

よって，$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AO}}=\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ より，$\mathrm{AH}=\mathrm{AO}\sin\dfrac{180^\circ}{n}=10\sin\dfrac{180^\circ}{n}$

ゆえに，$\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}=20\sin\dfrac{180^\circ}{n}$

また，$\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AO}}=\cos\dfrac{180^\circ}{n}$ より，$\mathrm{OH}=\mathrm{AO}\cos\dfrac{180^\circ}{n}=10\cos\dfrac{180^\circ}{n}$

239

(1)

点 D から辺 AB に下ろした垂線の足を H とすると，

AH//DH より，CH：HE＝CD：DA

ここで，BD は∠ABC の 2 等分線だから，CD：DA＝BC：BA＝2：x

よって，CH：HE＝2：x

ゆえに，$\mathrm{HE}=\dfrac{x}{x+2}\cdot\mathrm{EC}=\dfrac{x}{x+2}\cdot 1=\dfrac{x}{x+2}$

これより，$\mathrm{BH}=\mathrm{BE}+\mathrm{EH}=1+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2(x+1)}{x+2}$　・・・①

△ABD について，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DAB}=36^\circ$ より，$\mathrm{BD}=\mathrm{AD}$

また，CD：DA＝BC：BA＝2：x より，$\mathrm{AD}=\dfrac{x}{x+2}\cdot\mathrm{AC}=\dfrac{x^2}{x+2}$

よって，$\mathrm{BD}=\dfrac{x^2}{x+2}$　・・・②

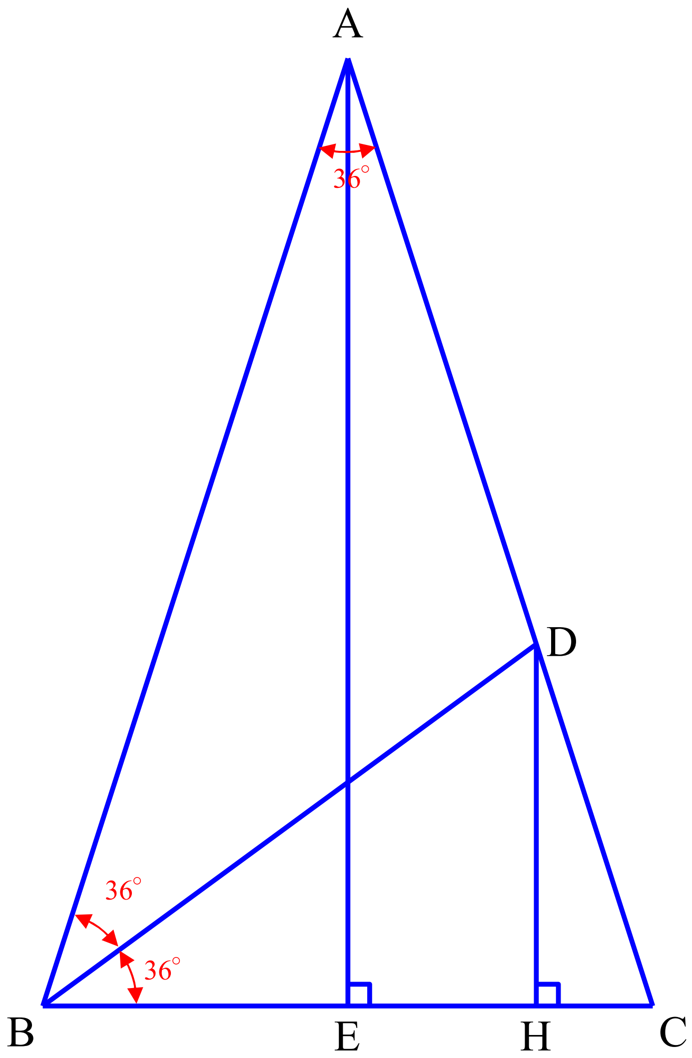
三角形 DBH は $\angle\mathrm{DBH}=36^\circ$，$\angle\mathrm{DHB}=90^\circ$ の直角三角形だから，

①，②より，$\cos 36^\circ=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{\dfrac{2(x+1)}{x+2}}{\dfrac{x^2}{x+2}}=\dfrac{2(x+1)}{x^2}$

これと $x=1+\sqrt{5}$ より，

$$\begin{aligned}\cos 36^\circ&=\frac{2\left(2+\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\\&=\frac{2\left(2+\sqrt{5}\right)}{6+2\sqrt{5}}\\&=\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\\&=\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\\&=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

参考図

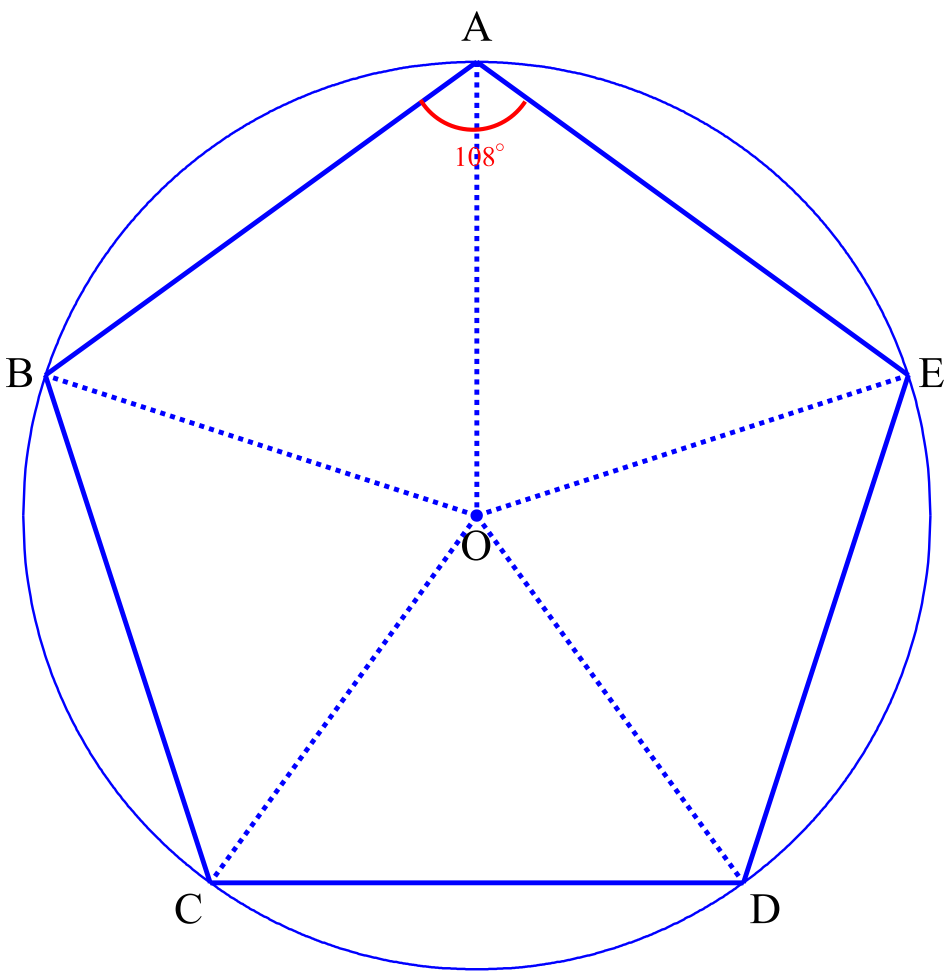


(2)

正五角形の外接円の中心を O とすると，O から各頂点に線分を引くことにより，
正五角形は合同な 5 個の二等辺三角形に分割されるから，三角形の内角の総和＝$180° \times 5$
正五角形の内角の和は三角形の内角の総和から頂角の和 360° を引いたものだから，
正五角形の内角の和は

$$\begin{aligned}180° \times 5 - 360° &= 180° \times 5 - 180° \times 2 \\ &= 180° \times (5-2) \\ &= 180° \times 3 \\ &= 540°\end{aligned}$$

よって，正五角形の 1 内角の大きさは $540° \div 5 = 108°$

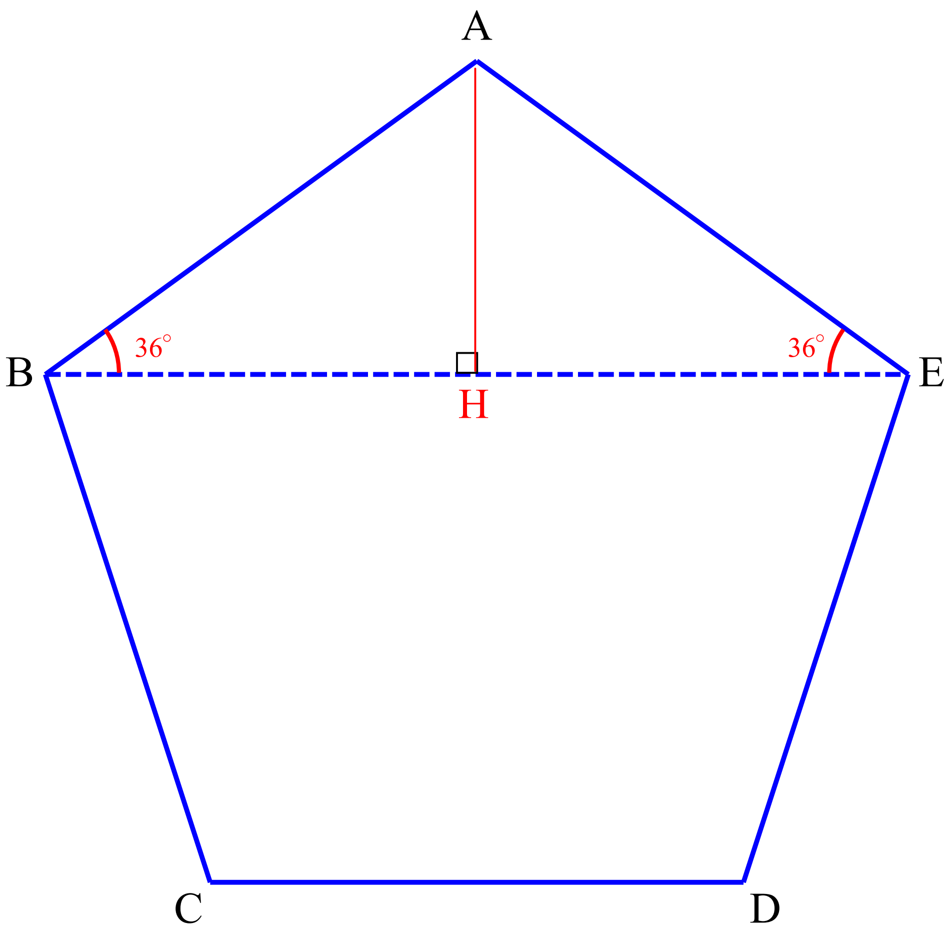


したがって，△ABE は∠A＝108°，AB＝AE の二等辺三角形である。

よって，$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{AEB}=\dfrac{180^\circ-\angle\mathrm{A}}{2}=\dfrac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$

A から辺 BE に下ろした垂線の足を H とすると，△ABH≡△AEH より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BE}&=2\mathrm{BH}\\
&=2\mathrm{AB}\cos 36^\circ\\
&=2\cdot 1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}\\
&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$



補足　三角形の相似比から **BE** の長さを求める。

対角線 BE と対角線 AD の交点を F とすると，BC//FD，BF//CD，BC＝CD＝1 より，
四角形 BCDF は 1 辺の長さが 1 のひし形である。

よって，BF＝1

また， $AF = AE - FD$， $EF = BE - BF$， $FD = BF$， $AD = BE$ より， $AF = EF$

したがって，△FAE は二等辺三角形である。

これと $\angle AEB = \angle FEA$ より， 二等辺三角形 ABE∽二等辺三角形 FAE

よって，AB：FA＝BE：AE

これと $AB = AE = 1$， $FA = FE = BE - BF = BE - 1$ より， 1： $BE - 1$＝BE：1

これより， $(BE - 1) \cdot BE = 1$　 $\therefore BE^2 - BE - 1 = 0$

解の公式および $BE > 0$ より， $BE = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$