図形と計量 3　三角比の拡張

1. 三角比の定義（$0° \leq \theta \leq 180°$）

下図で，点 P を，O を軸とし，点 A から反時計回りに回転させた角度を θ とすると，
θ が三角比の角度である。
このとき，$\mathrm{OP} = r$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ と定義する。

2. 三角比の値の範囲

$\sin\theta$ の値の範囲

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$0 \leq y \leq r$ より，$\dfrac{0}{r} \leq \sin\theta \leq \dfrac{r}{r}$　すなわち $0 \leq \sin\theta \leq 1$

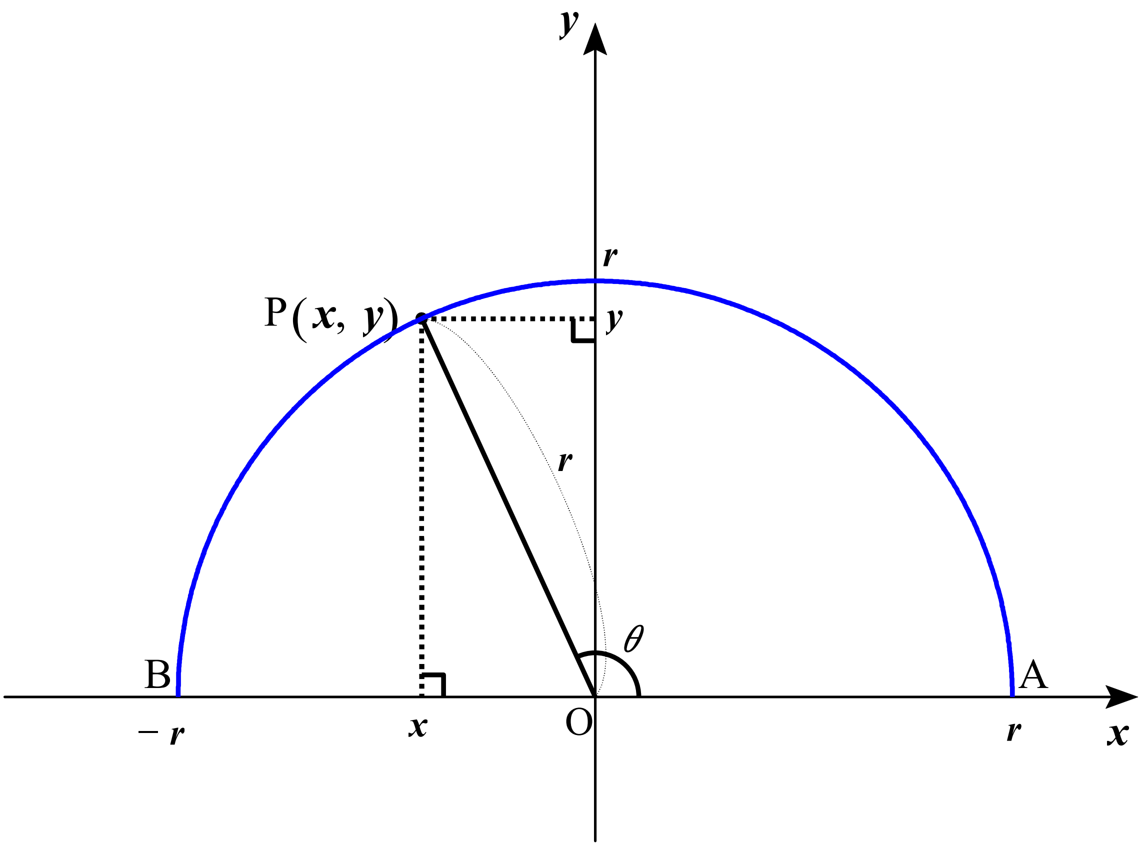
$\cos\theta$ の値の範囲

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$-r \leq x \leq r$ より，$\dfrac{-r}{r} \leq \cos\theta \leq \dfrac{r}{r}$　すなわち $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$\tan\theta$ の値の範囲

すべての実数値をとる。

ただし，$\tan 90°$ は，$\dfrac{y}{x}$ の x が 0 となるため，定義されない。



3.　180° − θ の三角比

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta,\ \cos(180°-\theta)=-\cos\theta,\ \tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

解説

$\angle AOP=\theta$，$\angle AOQ=180°-\theta$ とすると，点 P と点 Q は y 軸に関して対称である。

したがって，$P(a,\ b)$ とすると，$Q(-a,\ b)$

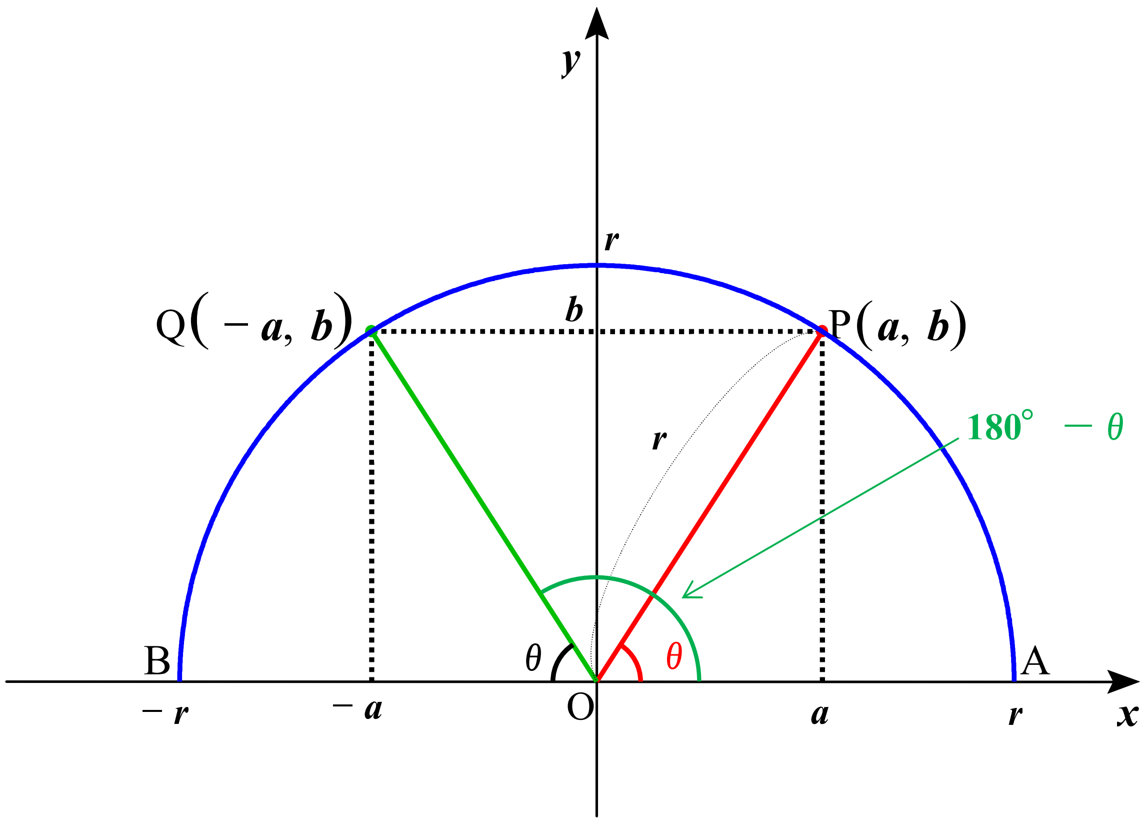
よって，

$\sin\theta=\dfrac{b}{r},\ \cos\theta=\dfrac{a}{r},\ \tan\theta=\dfrac{b}{a}$

$\sin(180°-\theta)=\dfrac{b}{r},\ \cos(180°-\theta)=\dfrac{-a}{r},\ \tan(180°-\theta)=\dfrac{b}{-a}$

ゆえに，

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta,\ \cos(180°-\theta)=-\cos\theta,\ \tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

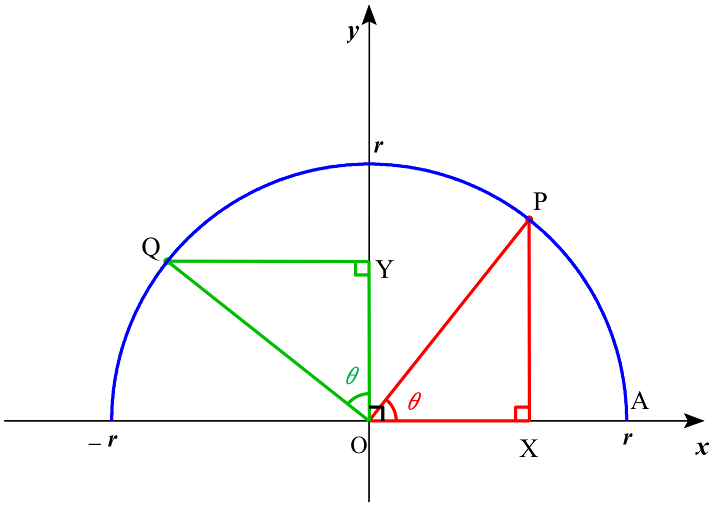


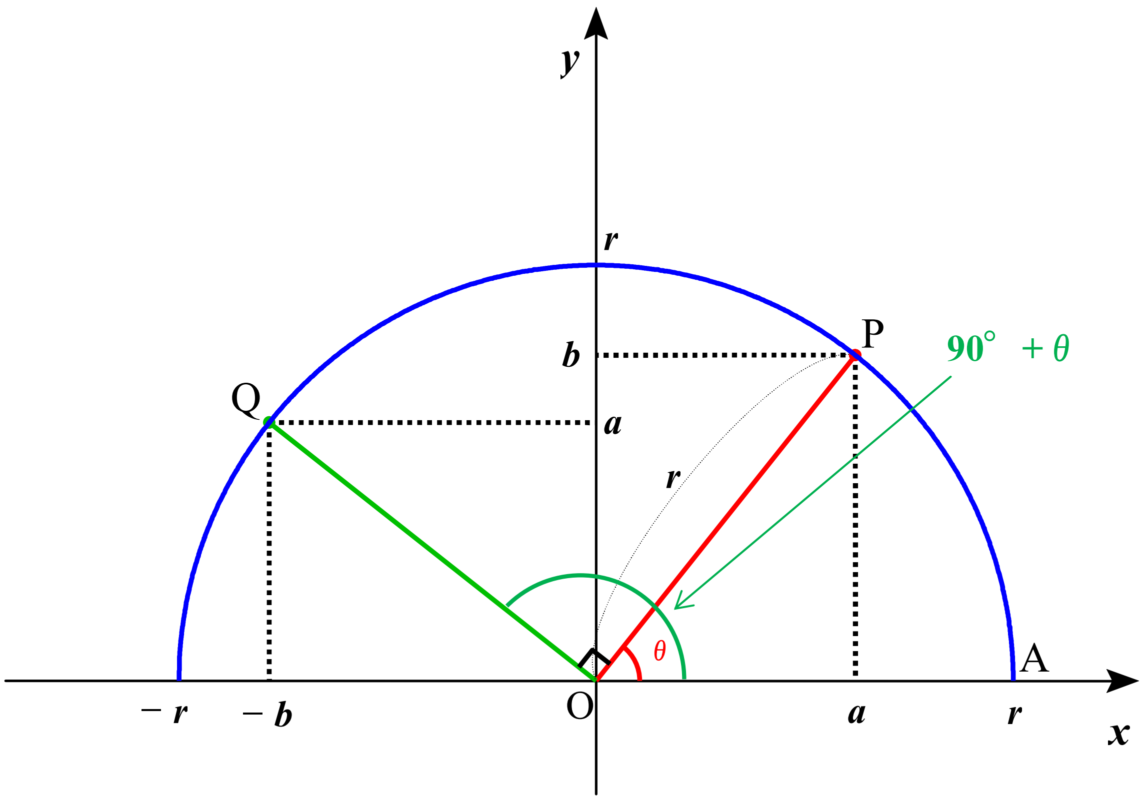
4.　$90° + \theta$ の三角比

$$\sin(90° + \theta) = \cos\theta,\ \cos(90° + \theta) = -\sin\theta,\ \tan(90° + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

解説

下図で, 直角三角形 POX を原点 O のまわりに $90°$ 回転すると, 直角三角形 QOY になる。
したがって, $\angle\mathrm{POA} = \theta$ とすると $\angle\mathrm{QOA} = 90° + \theta$, $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると $\mathrm{Q}(-b,\ a)$ となる。





よって，

$\sin\theta = \dfrac{b}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

$\sin(90° + \theta) = \dfrac{a}{r}$，$\cos(90° + \theta) = \dfrac{-b}{r}$，$\tan(90° + \theta) = \dfrac{a}{-b}$

ゆえに，

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta,\ \cos(90° + \theta) = -\sin\theta,\ \tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

まとめ

すでに学んだ$90° - \theta$の三角比も合わせると，

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta,\ \cos(180° - \theta) = -\cos\theta,\ \tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta,\ \cos(90° - \theta) = \sin\theta,\ \tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta,\ \cos(90° + \theta) = -\sin\theta,\ \tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

254

直線 $y=-\sqrt{3}x$ は点 $\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$ を通るから， x 軸の正の向きとのなす角を θ_1 とすると，

$\tan\theta_1=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}\left(=-\sqrt{3}\right)$　　$\therefore\ \theta_1=120°$　・・・①

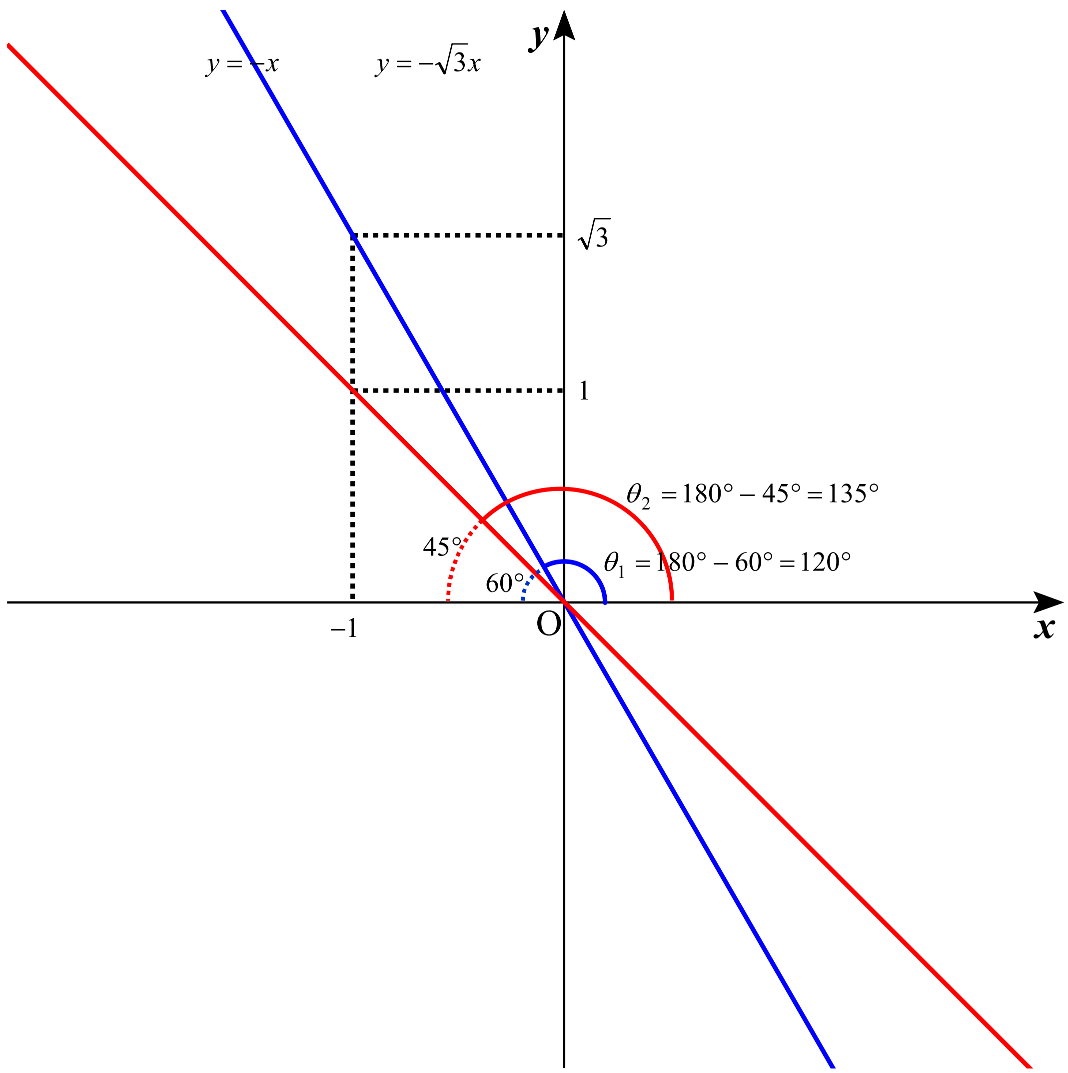
直線 $y=-x$ は点 $(-1,\ 1)$ を通るから， x 軸の正の向きとのなす角を θ_2 とすると，

$\tan\theta_2=\dfrac{1}{-1}(=-1)$　　$\therefore\ \theta_2=135°$　・・・②

①，②より，これら 2 直線のなす角は $\theta_2-\theta_1=135°-120°=15°$

補足

直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると　$m=\tan\theta$



255

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta,\ \cos(180°-\theta)=-\cos\theta,\ \tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta,\ \cos(90°-\theta)=\sin\theta,\ \tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\sin(90°+\theta)=\cos\theta,\ \cos(90°+\theta)=-\sin\theta,\ \tan(90°+\theta)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$， $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$， $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$， $1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

(1)

$$\begin{aligned}\sin10°\cos80°-\sin100°\cos170°&=\sin10°\cos(90°-10°)-\sin(90°+10°)\cos(180°-10°)\\&=\sin10°\sin10°-\cos10°(-\cos10°)\\&=\sin^2 10°+\cos^2 10°\\&=1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 20°}-\tan^2 110°&=\frac{1}{\sin^2 20°}-\tan^2(90°+20°)\\&=\frac{1}{\sin^2 20°}-\{\tan(90°+20°)\}^2\\&=\frac{1}{\sin^2 20°}-\left(-\frac{1}{\tan 20°}\right)^2\\&=\frac{1}{\sin^2 20°}-\frac{1}{\tan^2 20°}\\&=\frac{1}{\sin^2 20°}-\left(-1+\frac{1}{\sin^2 20°}\right)\quad\left(\because 1+\frac{1}{\tan^2 20°}=\frac{1}{\sin^2 20°}\right)\\&=1\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sin^2(180°-\theta)+\sin^2(90°-\theta)&=\{\sin(180°-\theta)\}^2+\{\sin(90°-\theta)\}^2\\&=\sin^2\theta+\cos^2\theta\\&=1\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sin^2(90°+\theta)+\cos^2(90°-\theta)&=\{\sin(90°+\theta)\}^2+\{\cos(90°-\theta)\}^2\\&=\cos^2\theta+\sin^2\theta\\&=1\end{aligned}$$

256

(1)

$0 \leq \theta \leq 180°$ より，$0 \leq \sin\theta \leq 1$

よって，$0+2 \leq \sin\theta + 2 \leq 1+2$　すなわち　$2 \leq \sin\theta + 2 \leq 3$

(2)

$0 \leq \theta \leq 180°$ より，$-1 \leq \cos\theta \leq 1$

よって，$2\cdot(-1) \leq 2\cos\theta \leq 2\cdot 1$　すなわち　$-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$

(3)

$0 \leq \theta \leq 180°$ より，$0 \leq \sin\theta \leq 1$

よって，$0 \leq 2\sin\theta \leq 2$

ゆえに，$0+(-1) \leq 2\sin\theta + (-1) \leq 2+(-1)$　すなわち　$-1 \leq 2\sin\theta - 1 \leq 1$

(4)

$0 \leq \theta \leq 180°$ より，$-1 \leq \cos\theta \leq 1$

よって，$-3\cdot(-1) \geq -3\cos\theta \geq -3\cdot 1$　すなわち $-3 \leq -3\cos\theta \leq 3$

ゆえに，$-3+1 \leq -3\cos\theta + 1 \leq 3+1$　すなわち $-2 \leq -3\cos\theta + 1 \leq 4$

(5)

$0° \leq \theta \leq 60°$ より，$0 \leq \tan\theta \leq \sqrt{3}$

よって，$2\cdot 0 \leq 2\tan\theta \leq 2\cdot\sqrt{3}$　すなわち $0 \leq 2\tan\theta \leq 2\sqrt{3}$

ゆえに，$0+1 \leq 2\tan\theta + 1 \leq 2\sqrt{3}+1$　すなわち $1 \leq 2\tan\theta + 1 \leq 2\sqrt{3}+1$

(6)

$0° \leq \theta < 90°$ より，$0 \leq \tan\theta$

よって，$\tan^2\theta \geq 0$

ゆえに，$\tan^2\theta + 1 \geq 1$

257

$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると，$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

よって，$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

ゆえに，$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

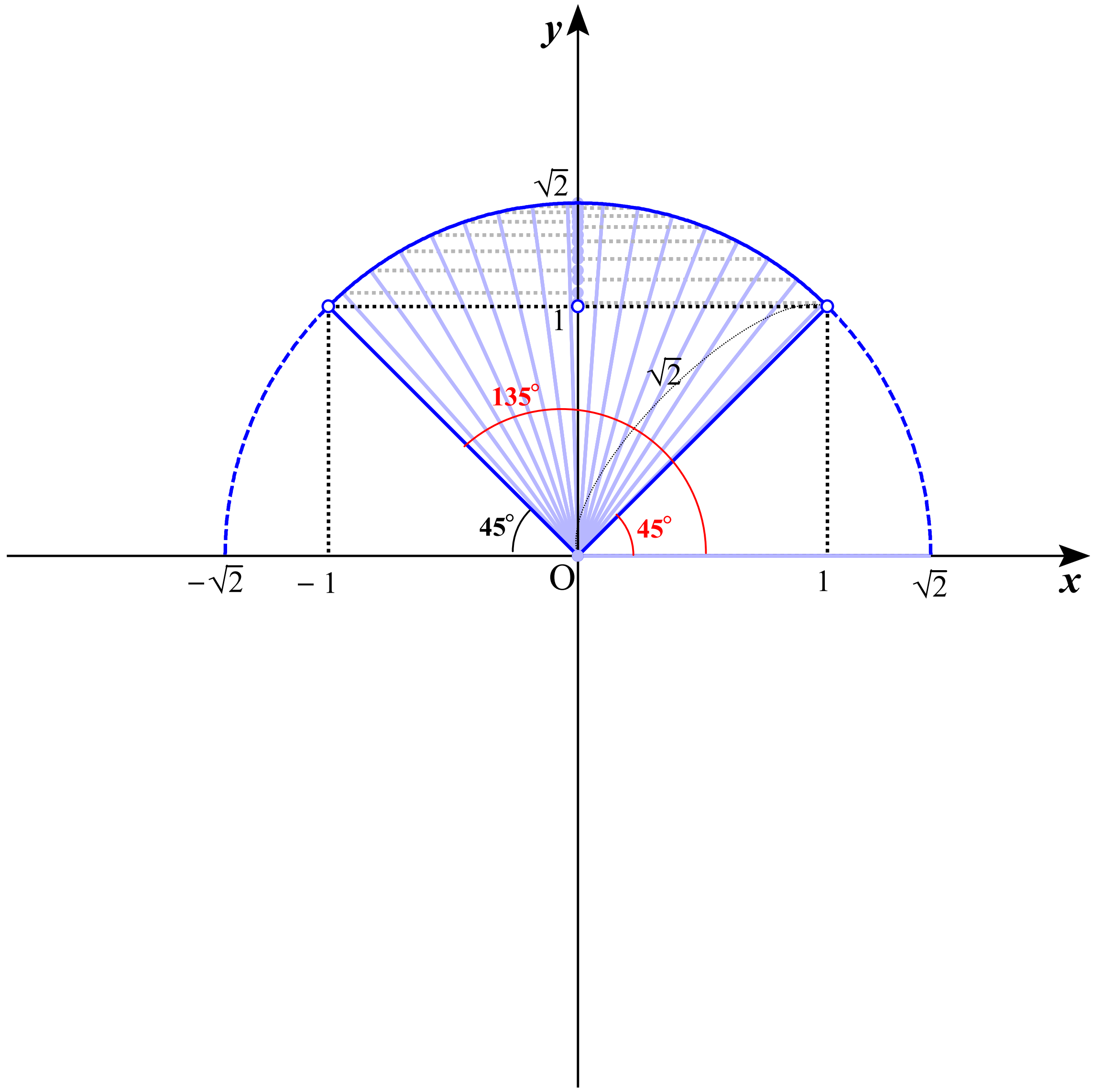
258

(1)

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ において，$r = \sqrt{2}$ とすると，$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{2}}$

よって，$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\dfrac{y}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$1 < y \leq \sqrt{2}$

ゆえに，$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は，下図より，$45° < \theta < 135°$

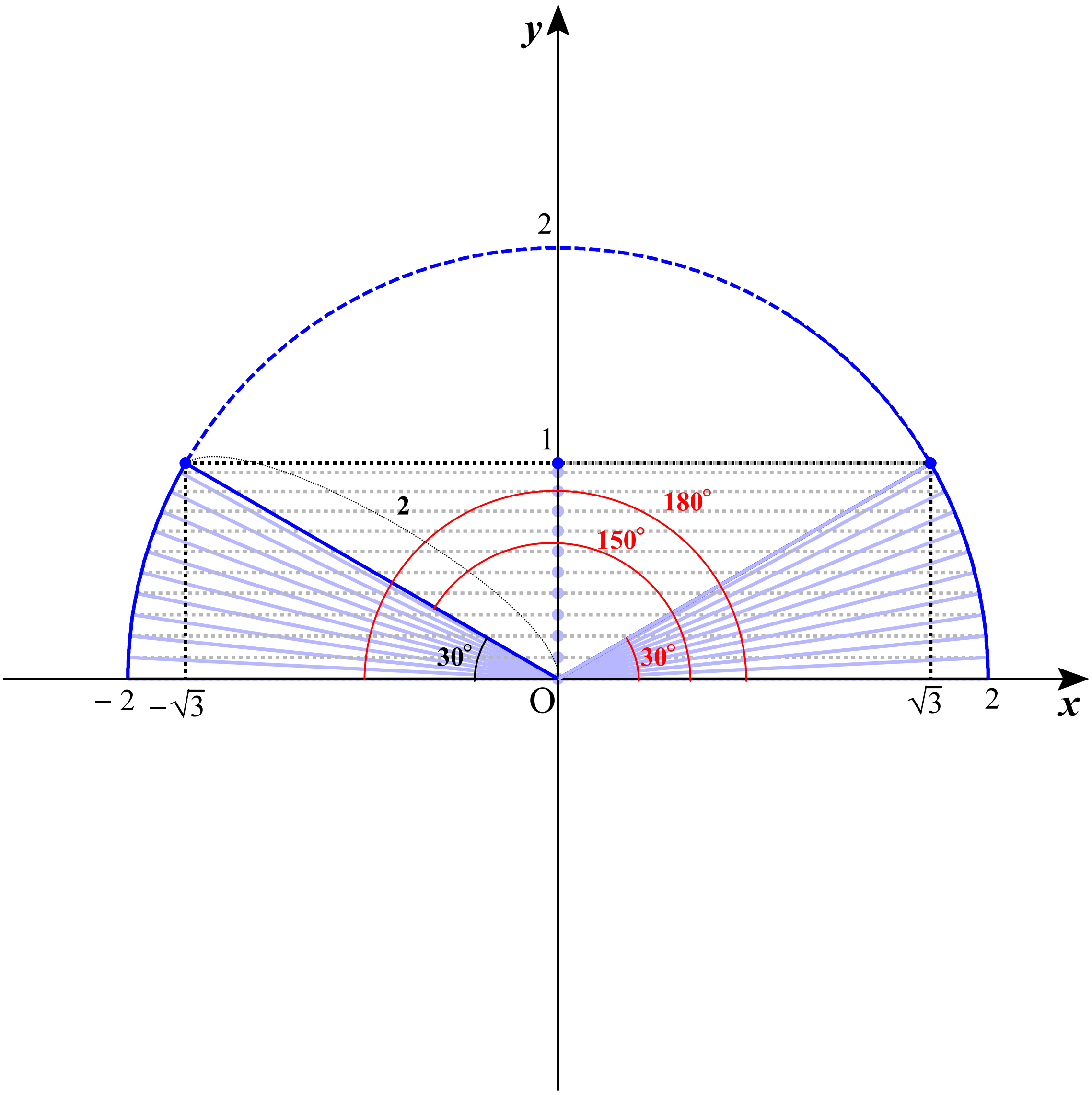


(2)

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ において，$r = 2$ とすると，$\sin\theta = \dfrac{y}{2}$

よって，$\sin\theta \leq \dfrac{1}{2}$ のとき，$0 \leq \dfrac{y}{2} \leq \dfrac{1}{2}$ より，$0 \leq y \leq 1$

ゆえに，$\sin\theta \leq \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は，下図より，$0° \leq \theta < 30°,\ 150° \leq \theta \leq 180°$

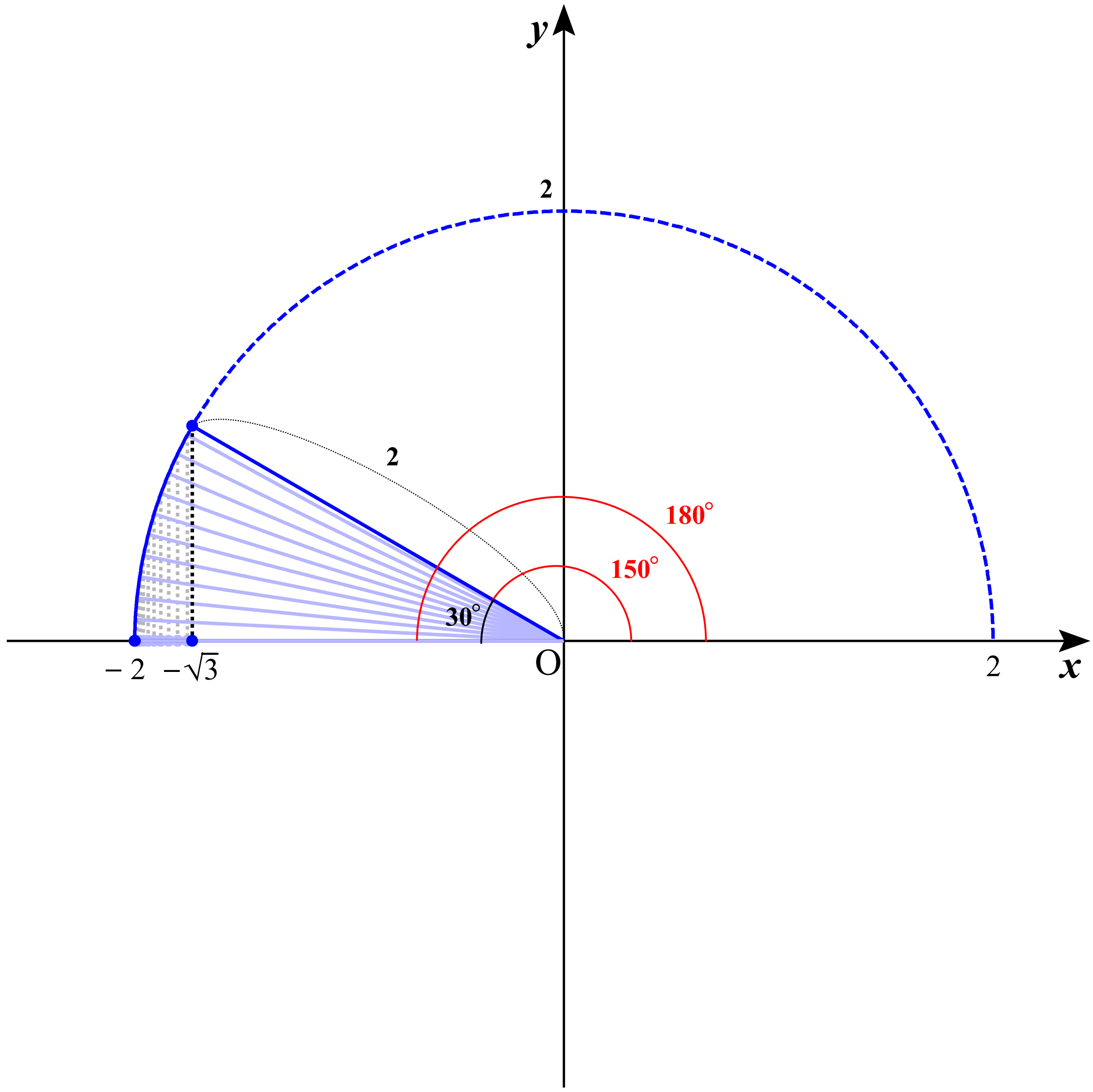


(3)

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ において，$r = 2$ とすると，$\cos\theta = \dfrac{x}{2}$

よって，$\cos\theta \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$-2 \leq x \leq -\sqrt{3}$

ゆえに，$\cos\theta \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は，下図より，$150° \leq \theta \leq 180°$

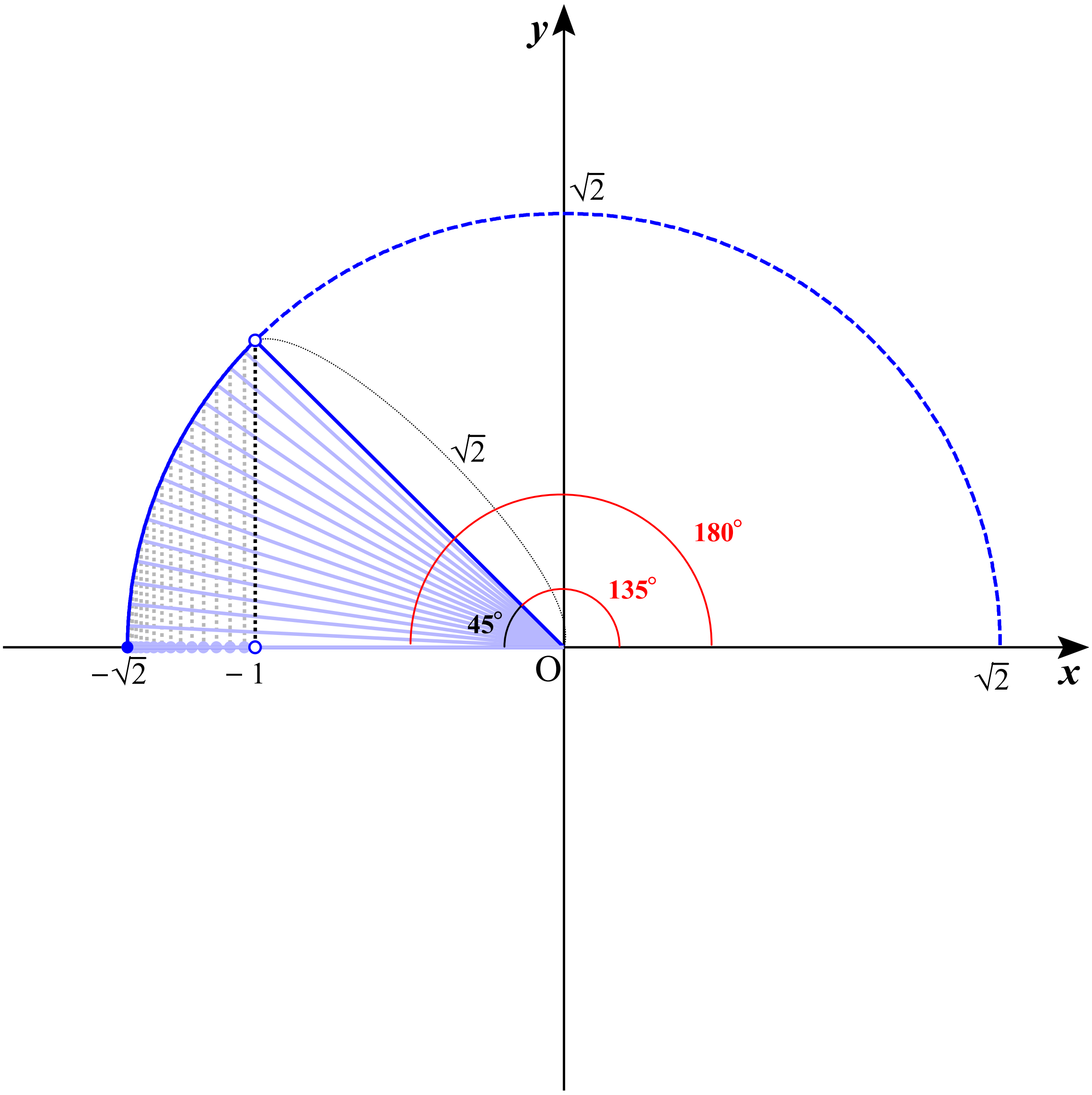


(4)

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ において，$r = \sqrt{2}$ とすると，$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$

よって，$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$-\sqrt{2} \leq x < -1$

ゆえに，$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は，下図より，$135° < \theta \leq 180°$

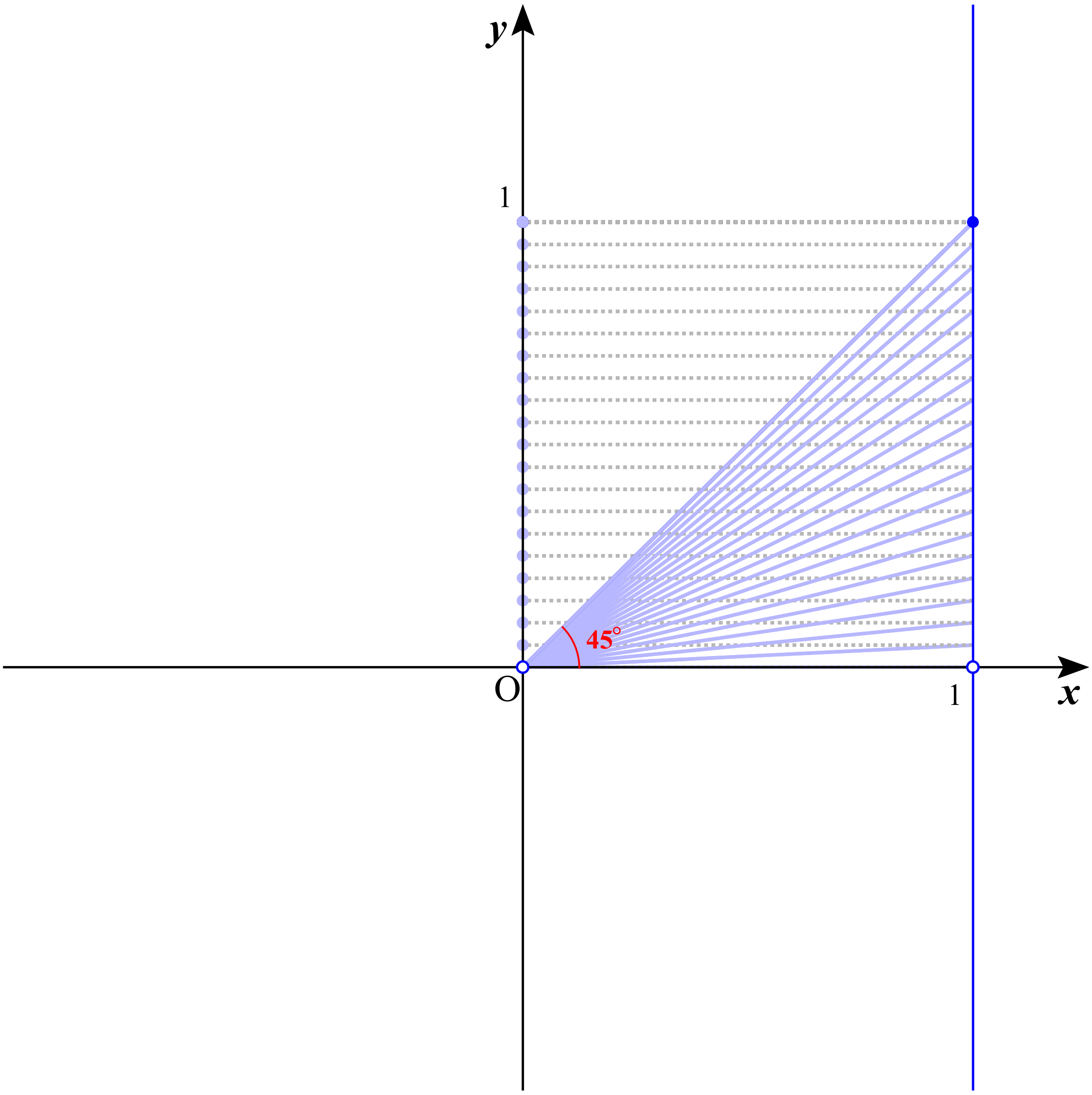


(5)

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ において，$x = 1$ とすると，$\tan\theta = y$

よって，$0 < \tan\theta \leq 1$ のとき，$0 < y \leq 1$

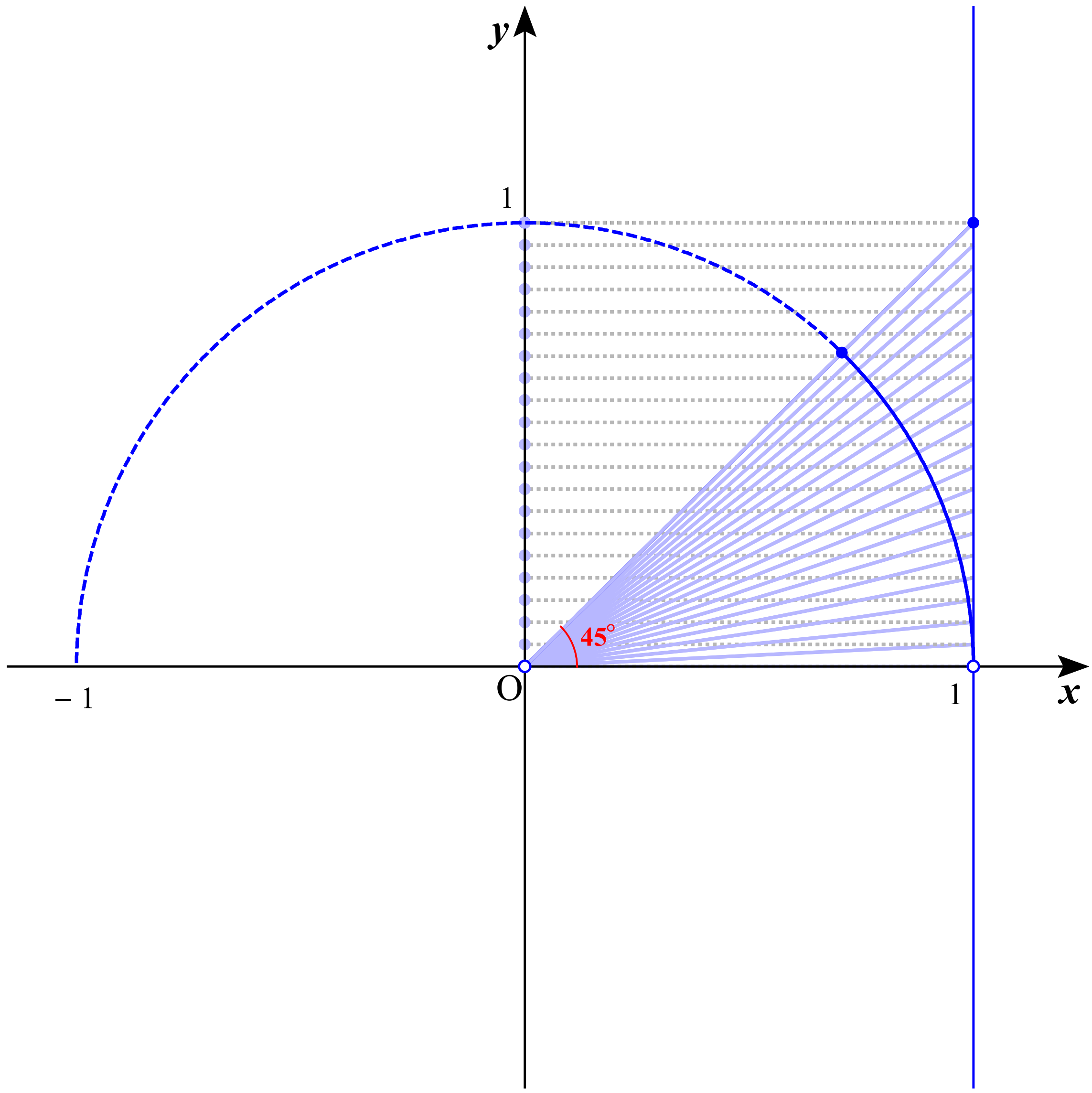
ゆえに，$0 < \tan\theta \leq 1$ を満たす θ は，下図より，$0° < \theta \leq 45°$



補足

例題では半円を描いてあるが，解を求めるにあたって特にその必要はない。

半円を入れた図を次ページに示す。



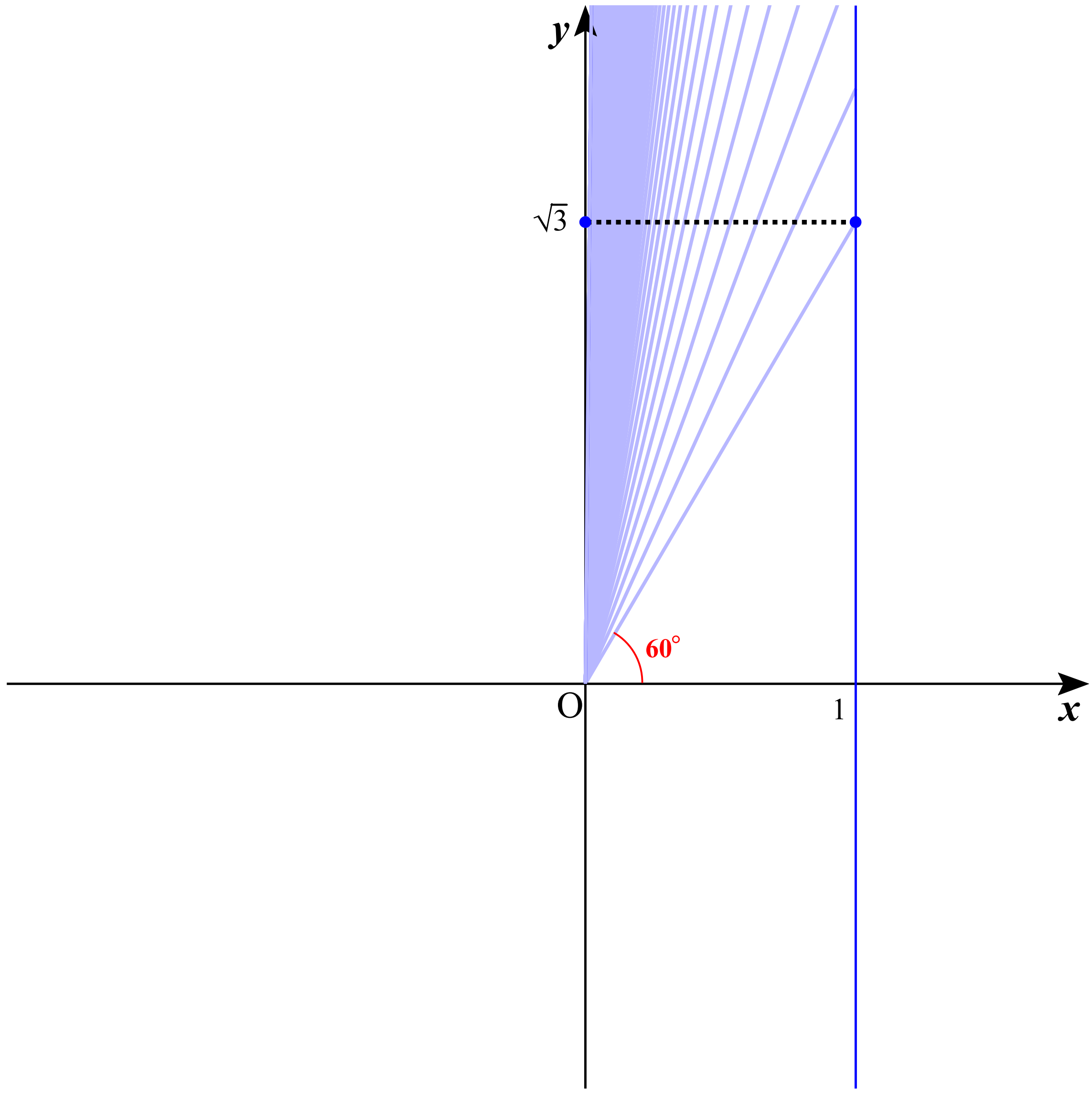
y
1
45°
－1
O
1
x

(6)

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ において，$x=1$ とすると，$\tan\theta = y$

よって，$\tan\theta \geq \sqrt{3}$ とき，$y \geq \sqrt{3}$

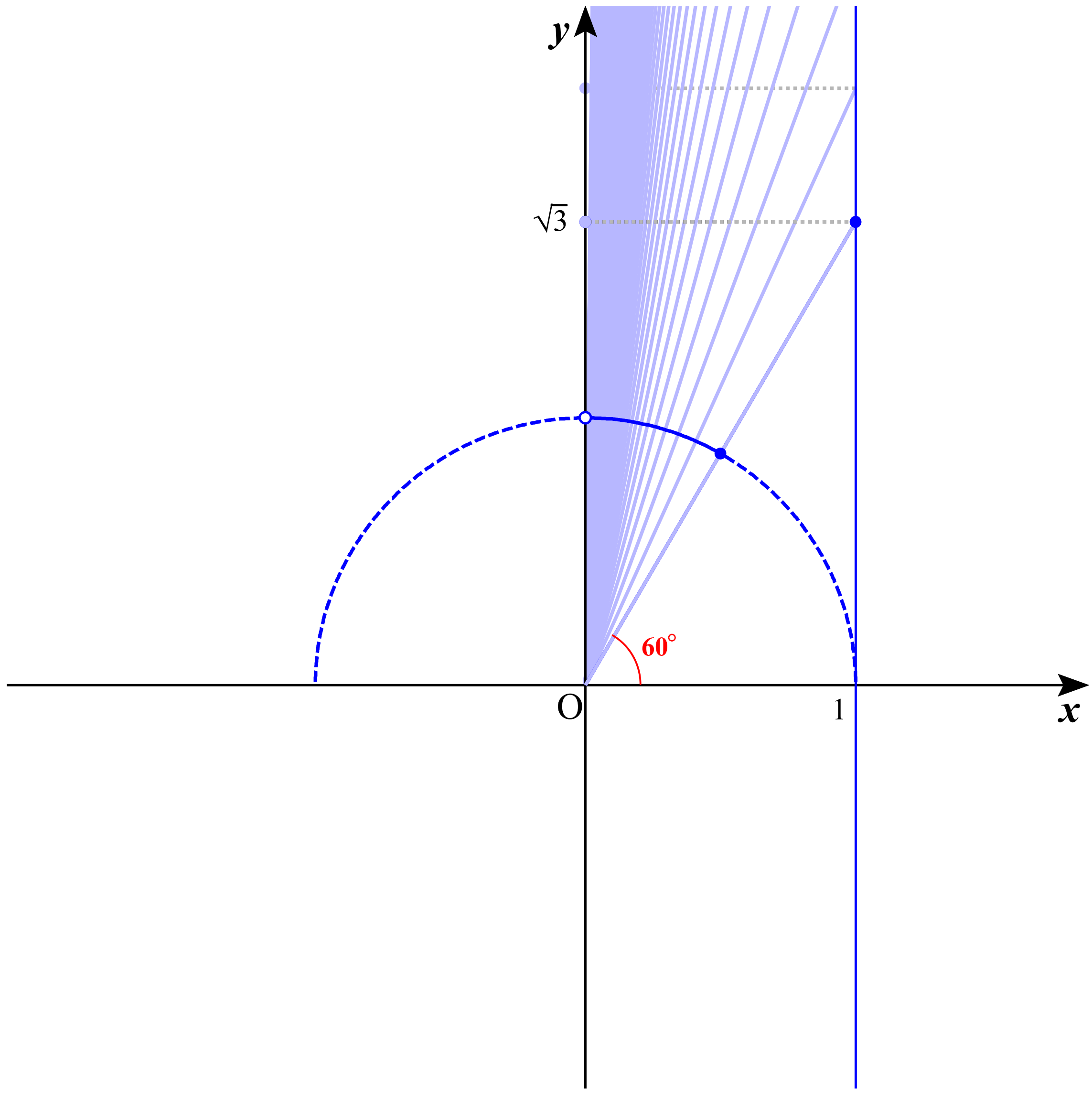
ゆえに，$\tan\theta \geq \sqrt{3}$ を満たす θ は，下図より，$60° \leq \theta < 90°$



補足

例題では半円を描いてあるが，解を求めるにあたって特にその必要はない。

半円を入れた図を次ページに示す。


y
√3
60°
O
1
x

(7)

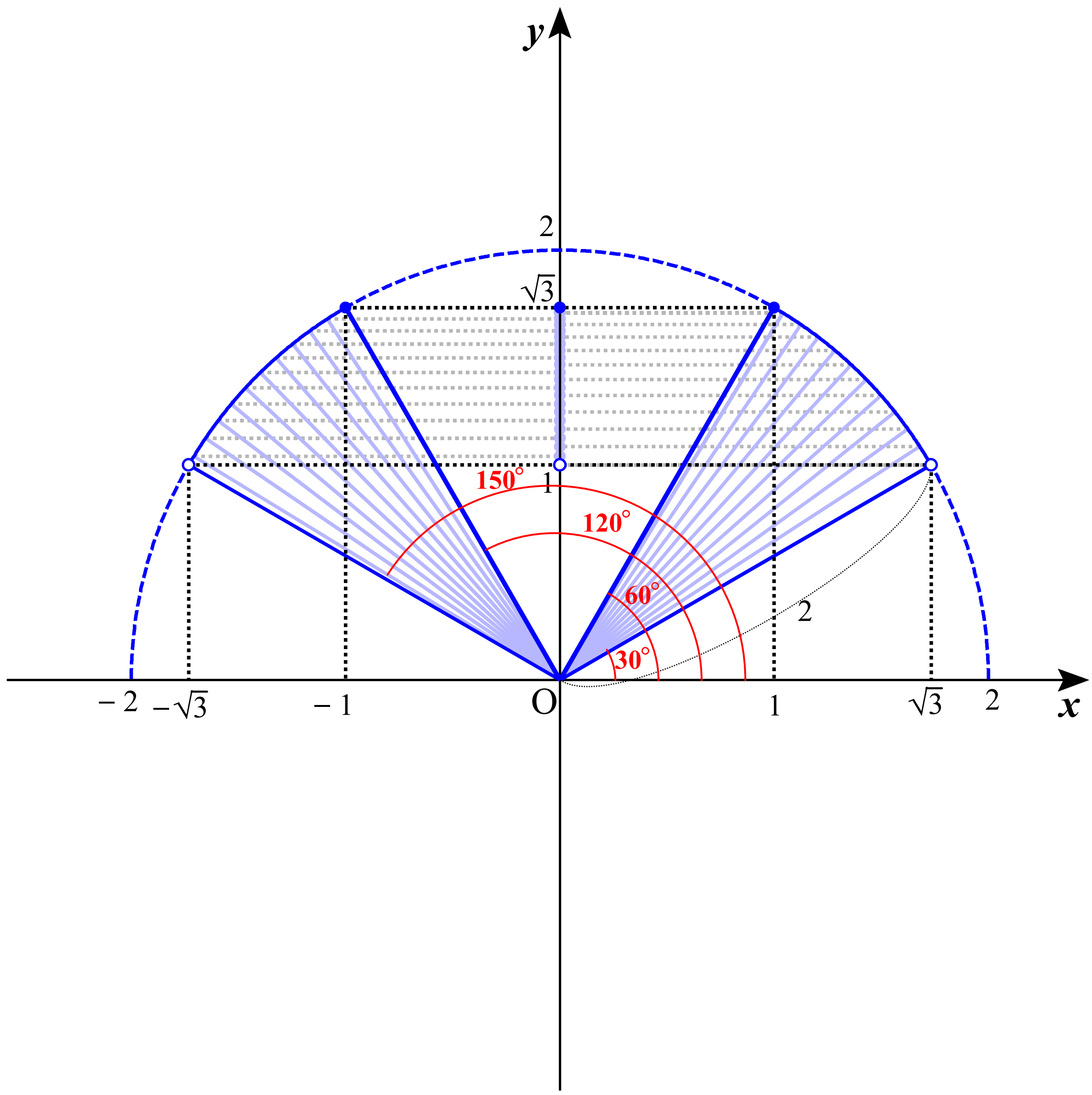
$1<2\sin\theta\leq\sqrt{3}$ より，$\dfrac{1}{2}<\sin\theta\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ において，$r=2$ とすると，$\sin\theta=\dfrac{y}{2}$

よって，$\dfrac{1}{2}<\sin\theta\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{y}{2}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$1<y\leq\sqrt{3}$

ゆえに，$\dfrac{1}{2}<\sin\theta\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $1<2\sin\theta\leq\sqrt{3}$ を満たす θ は，

下図より，$30°<\theta\leq 60°,\ 120°\leq\theta<150°$



(8)

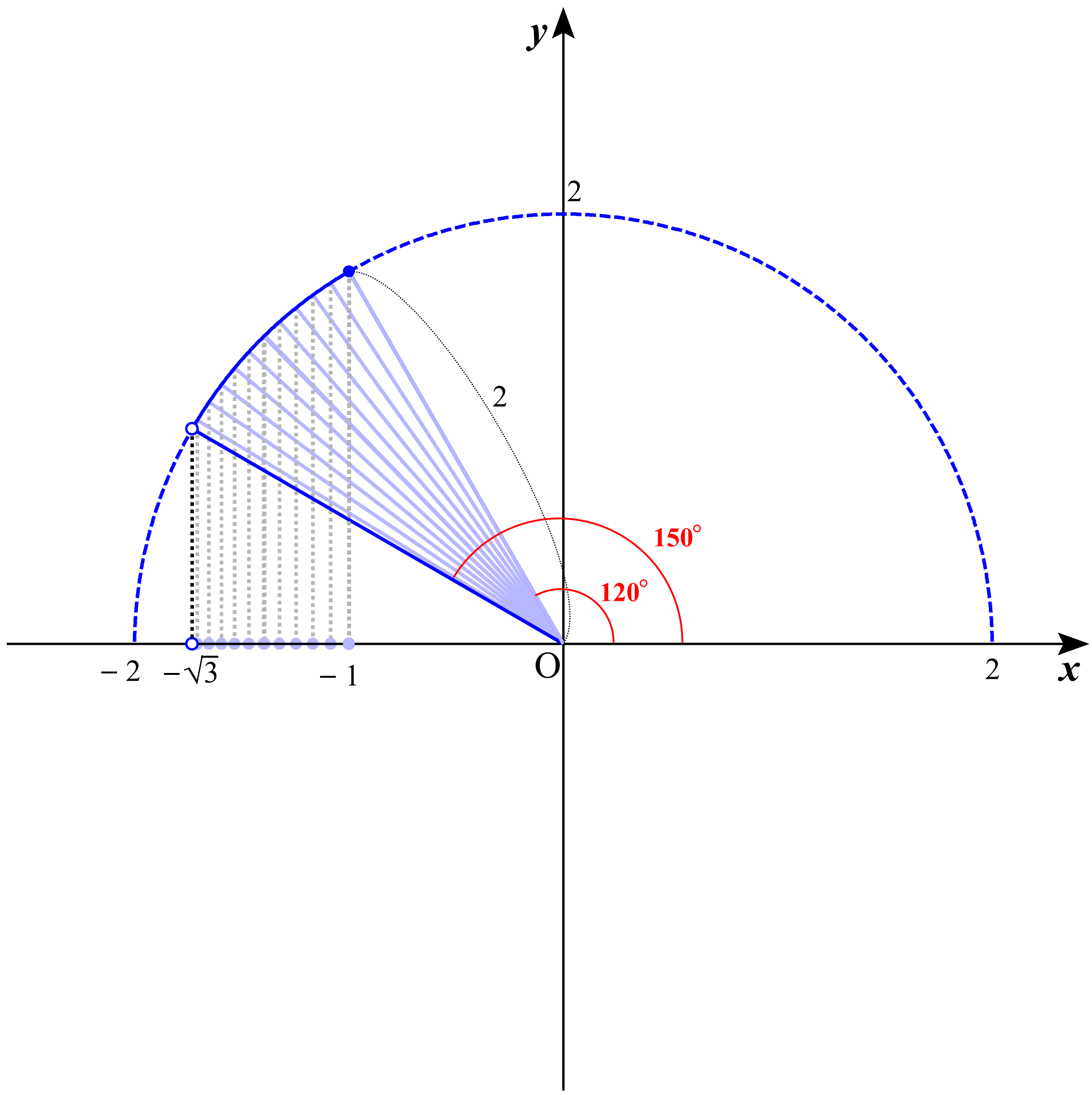
$1 \leq -2\cos\theta < \sqrt{3}$ より，$-\dfrac{1}{2} \geq \cos\theta > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ において，$r = 2$ とすると，$\cos\theta = \dfrac{x}{2}$

よって，$-\dfrac{1}{2} \geq \cos\theta > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$-\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{x}{2} > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$-\sqrt{3} < x \leq -1$

ゆえに，$-\dfrac{1}{2} \geq \cos\theta > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $1 \leq -2\cos\theta < \sqrt{3}$ を満たす θ は，

下図より，$120° \leq \theta < 150°$



(9)

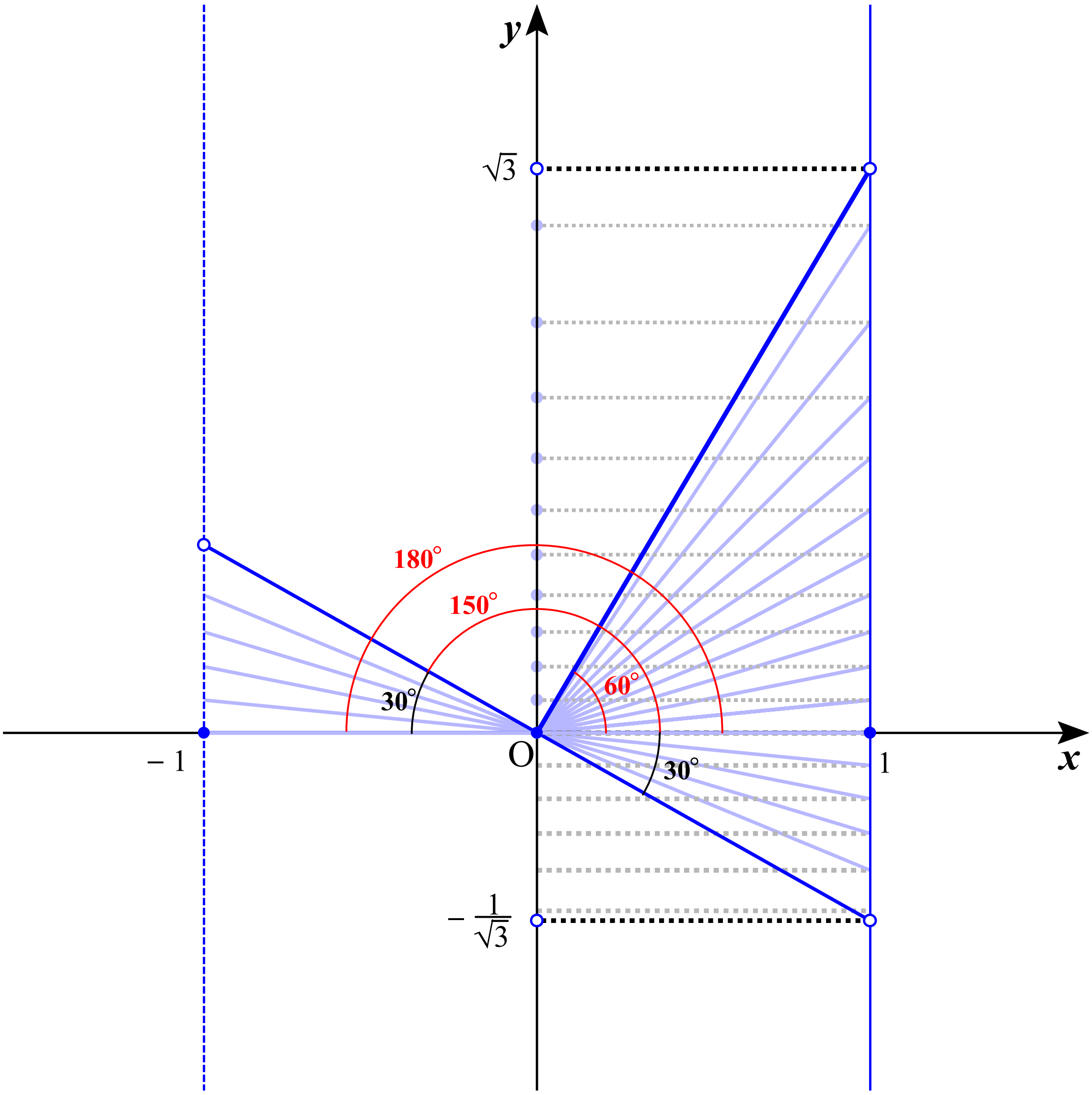
$-1<\sqrt{3}\tan\theta<3$ より，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta<\sqrt{3}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ において，$x=1$ とすると，$\tan\theta=y$

よって，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta<\sqrt{3}$ とき，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<y<\sqrt{3}$

ゆえに，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta<\sqrt{3}$ すなわち $-1<\sqrt{3}\tan\theta<3$ を満たす θ は,

下図より，$0°\leqq\theta<60°,\ 150°<\theta\leqq180°$



補足

例題では半円を描いてあるが，解を求めるにあたって特にその必要はない。

半円を入れた図を下に示す。