図形と計量 4 正弦定理 & 5 余弦定理

正弦定理

$\boldsymbol{R}$ を△ABC の外接円の半径とすると，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}}=\dfrac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}}=2\boldsymbol{R}$

解説

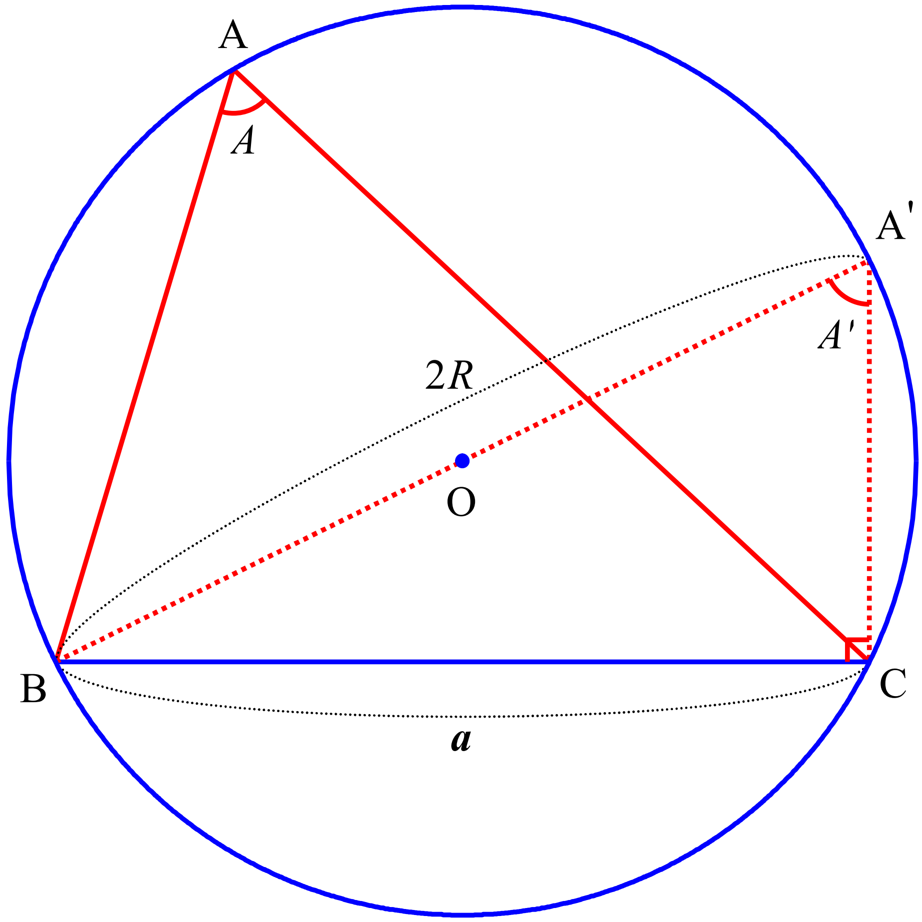
$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ を導いてみる。（数学 A 平面図形の知識が必要）

$A<90^\circ$ のとき

円周角の定理より $\angle A=\angle A'$ $\therefore \sin A=\sin A'$ ・・・①

$\angle$A'CB は直径の円周角だから，$\angle$A'CB $=90^\circ$ $\therefore \sin A'=\dfrac{a}{2R}$ ・・・②

①，②より，$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ $\therefore \dfrac{a}{\sin A}=2R$

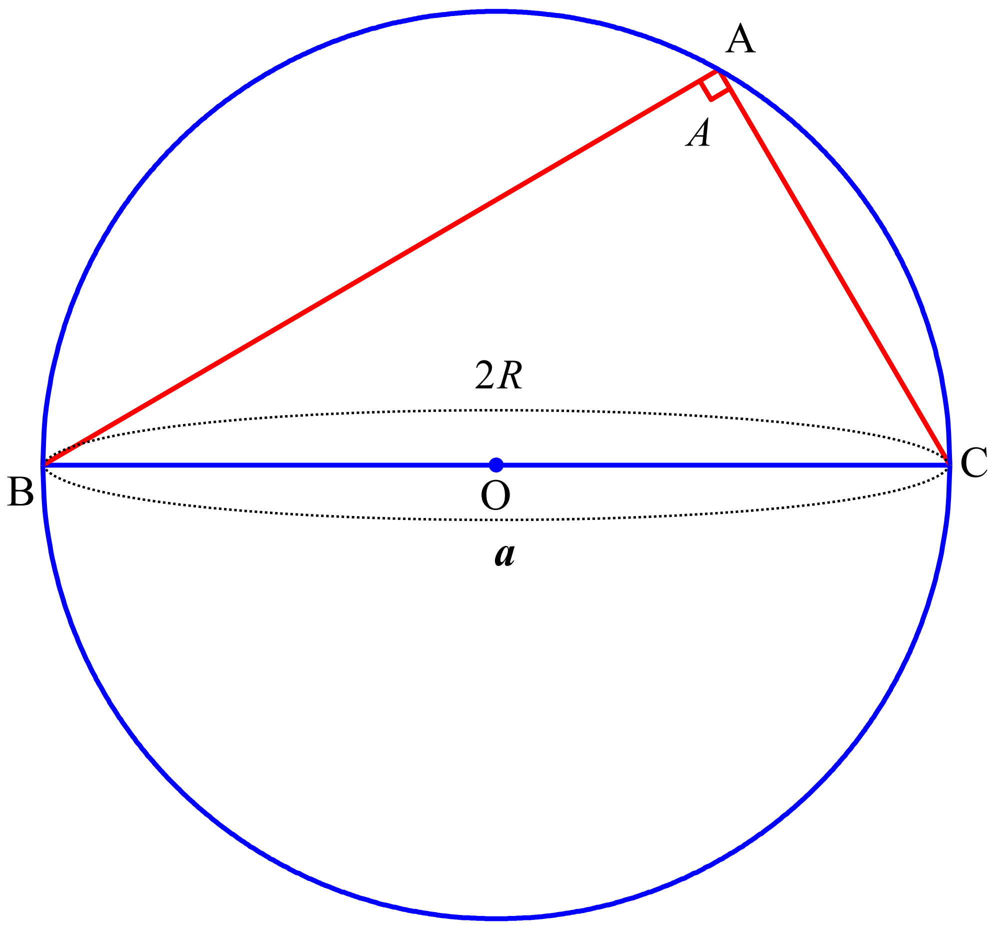


$A=90°$ のとき

三角比の拡張から，$\sin A=\sin 90°=1$　・・・③

$2R=a$ より，$\dfrac{a}{2R}=1$　・・・④

③，④より，$\sin A=\dfrac{a}{2R}$　$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=2R$



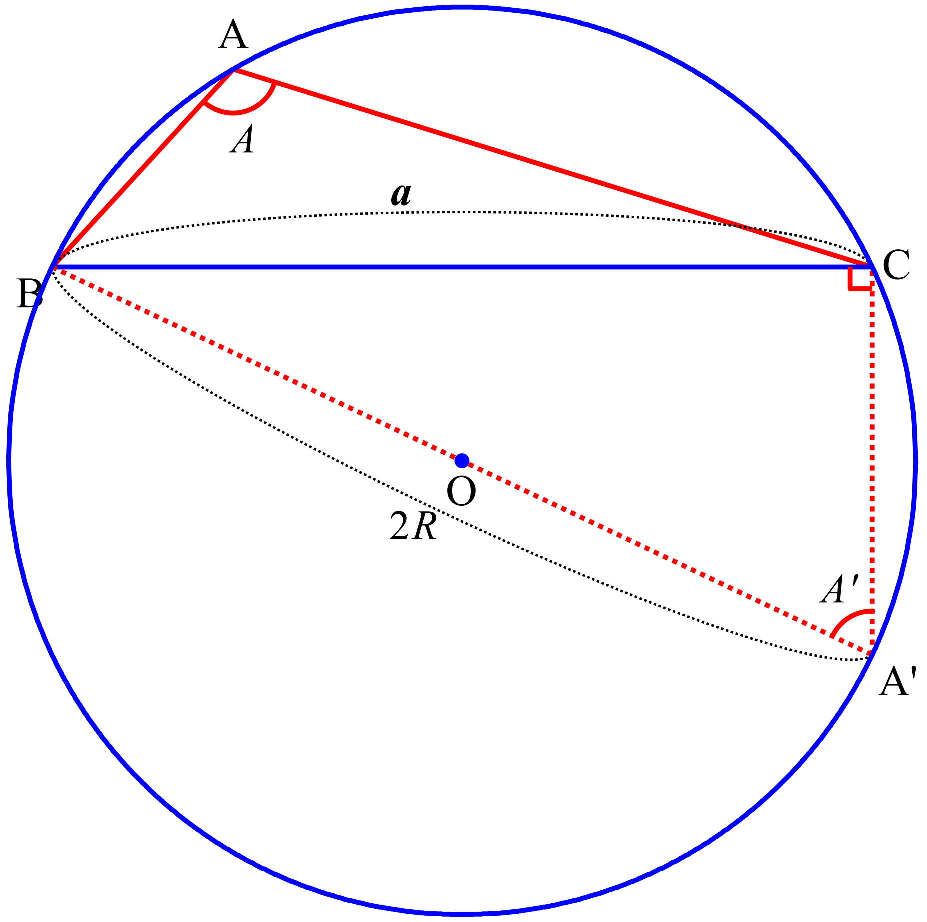
$A > 90°$ のとき

四角形 ABA'C は円に内接しているから， $A = 180° - A'$

これと三角比の拡張から， $\sin A = \sin(180° - A') = \sin A'$ ・・・⑤

$A' < 90°$ より， $\dfrac{a}{\sin A'} = 2R$ ・・・⑥

よって，⑤と⑥より， $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

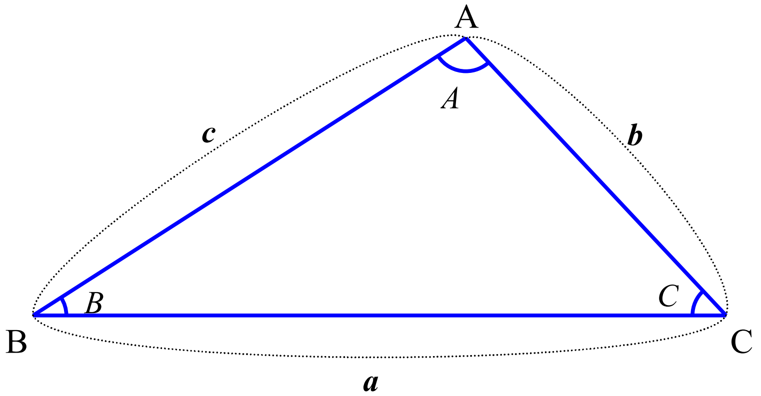


以上より， $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ が成り立つ。同様に， $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ も成り立つ。

ゆえに， $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

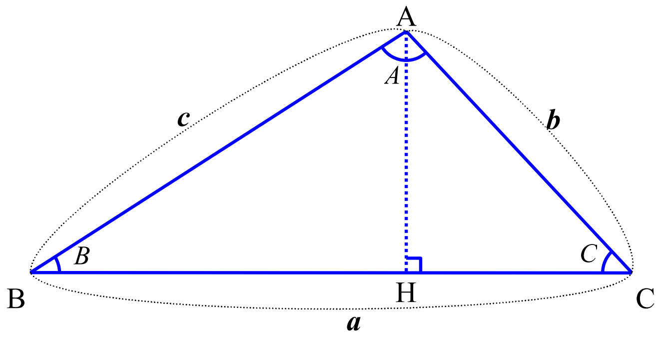
第 1 余弦定理（正射影の定理）

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = b\cos C + c\cos B} \\ \boldsymbol{b = a\cos C + c\cos A} \\ \boldsymbol{c = a\cos B + b\cos A} \end{cases}$$



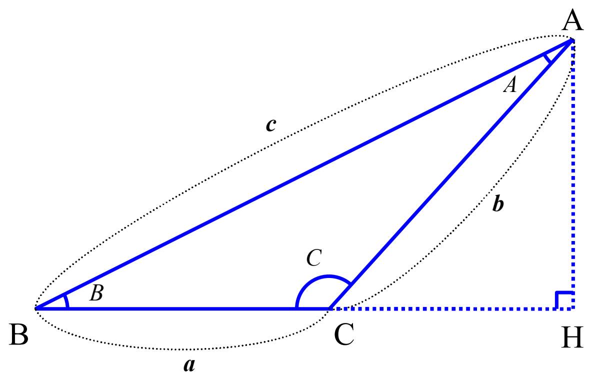
解説

$\boldsymbol{a = c\cos B + b\cos C}$ を導いてみる。



△ABH において $\mathrm{BH} = c\cos B$，△ACH において $\mathrm{CH} = b\cos C$

よって，$a = \mathrm{BH} + \mathrm{CH} = c\cos B + b\cos C$



△ABH において $\mathrm{BH} = c\cos B$，△ACH において $\mathrm{CH} = b\cos(180° - C) = -b\cos C$

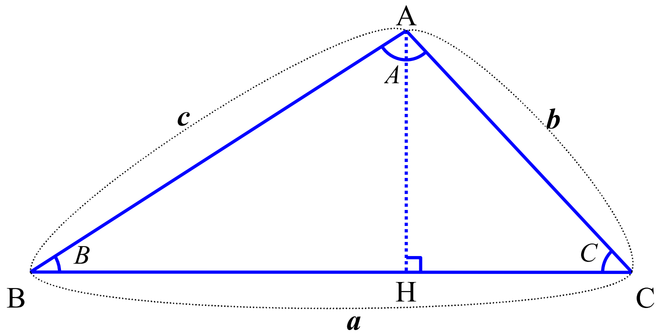
よって，$a = \mathrm{BH} + \mathrm{CH} = c\cos B + b\cos C$

第 2 余弦定理（余弦定理）

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

解説

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ を導いてみる。



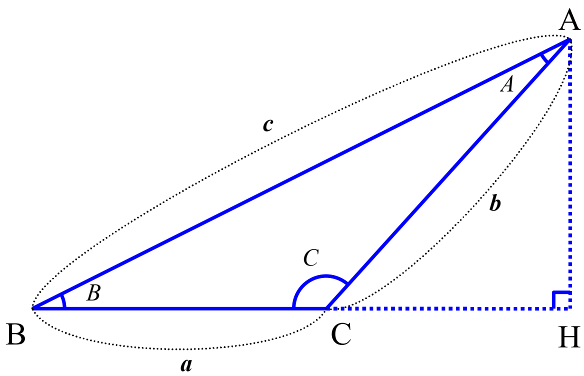
△ABH において，三平方の定理より，

$$\begin{aligned} c^2 &= \mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= \mathrm{AH}^2 + (\mathrm{BC} - \mathrm{CH})^2 \\ &= \mathrm{AH}^2 + (a - \mathrm{CH})^2 \end{aligned}$$

ここで，△ACH に注目すると，$\mathrm{AH} = b\sin C$，$\mathrm{CH} = b\cos C$

よって，

$$\begin{aligned} c^2 &= \mathrm{AH}^2 + (a - \mathrm{CH})^2 \\ &= (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 \\ &= b^2\sin^2 C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos^2 C \\ &= a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$



△ABH において，三平方の定理より，

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\
&= \mathrm{AH}^2 + (\mathrm{BC} + \mathrm{CH})^2 \\
&= \mathrm{AH}^2 + (a + \mathrm{CH})^2
\end{aligned}
$$

ここで，△ACH に注目すると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AH} &= b \sin \angle \mathrm{ACH} \\
&= b \sin(180^\circ - C) \\
&= b \sin C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CH} &= b \cos \angle \mathrm{ACH} \\
&= b \cos(180^\circ - C) \\
&= -b \sin C
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \mathrm{AH}^2 + (a + \mathrm{CH})^2 \\
&= (b \sin C)^2 + \{a + (-b \cos C)\}^2 \\
&= (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2 \\
&= b^2 \sin^2 C + a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C \\
&= a^2 + b^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab \cos C \\
&= a^2 + b^2 - 2ab \cos C
\end{aligned}
$$

266

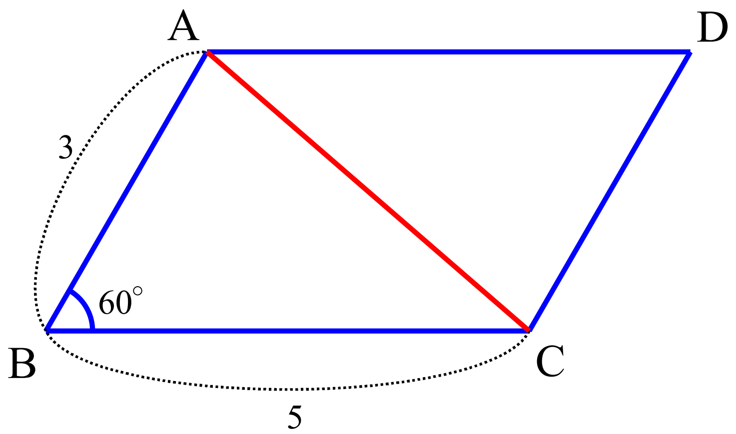
平行四辺形の性質より， $BC = AD = 5$， $\angle BAD = 180° - 60°$

AC の長さ

△ABC において，余弦定理より，

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos 60° \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 9 + 25 - 15 \\ &= 19 \end{aligned}$$

$\therefore AC = \sqrt{19}$

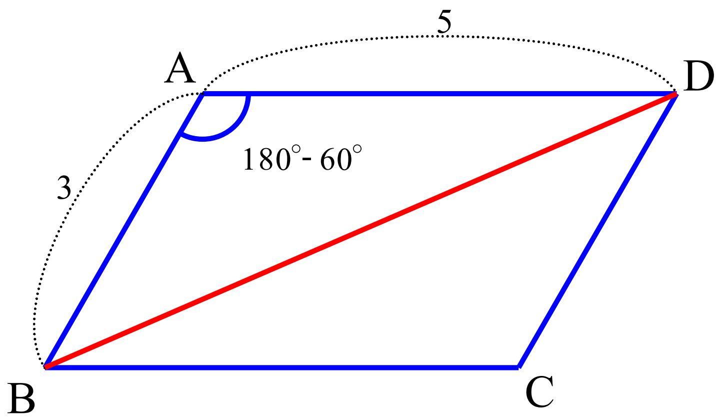


BD の長さ

△ABD において，余弦定理より，

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos(180° - 60°) \\ &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot (-\cos 60°) \\ &= AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD\cos 60° \\ &= 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 9 + 25 + 15 \\ &= 49 \end{aligned}$$

$\therefore BD = 7$



267

C

余弦定理より，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

これと，$c^2 = a^2 + b^2 - ab$ より，$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - ab$　$\therefore \cos C = \dfrac{1}{2}$

ゆえに，$C = 60°$

b

$c^2 = a^2 + b^2 - ab$ に $a = 3$　$c = \sqrt{7}$ を代入すると，$7 = 9 + b^2 - 3b$　すなわち $b^2 - 3b + 2 = 0$

よって，$(b-1)(b-2) = 0$　$\therefore b = 1,\ 2$