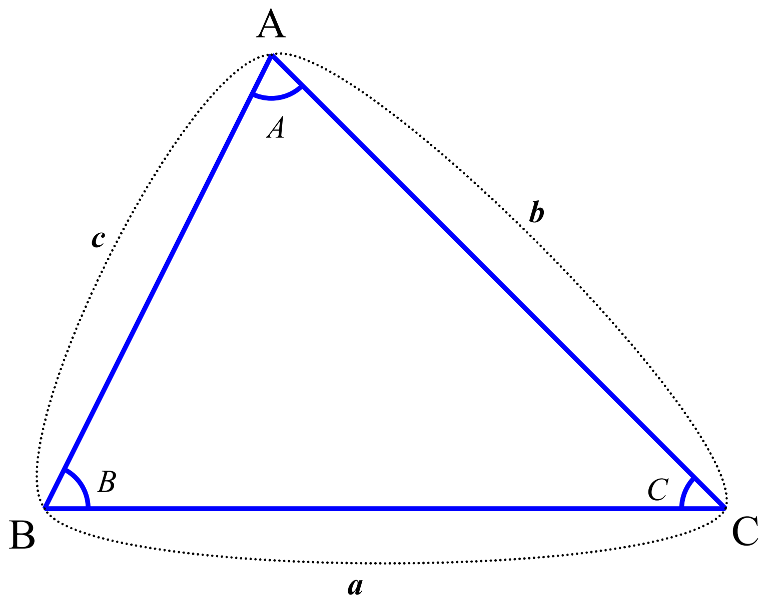
図形と計量 7　三角形の面積

三角形の面積 1

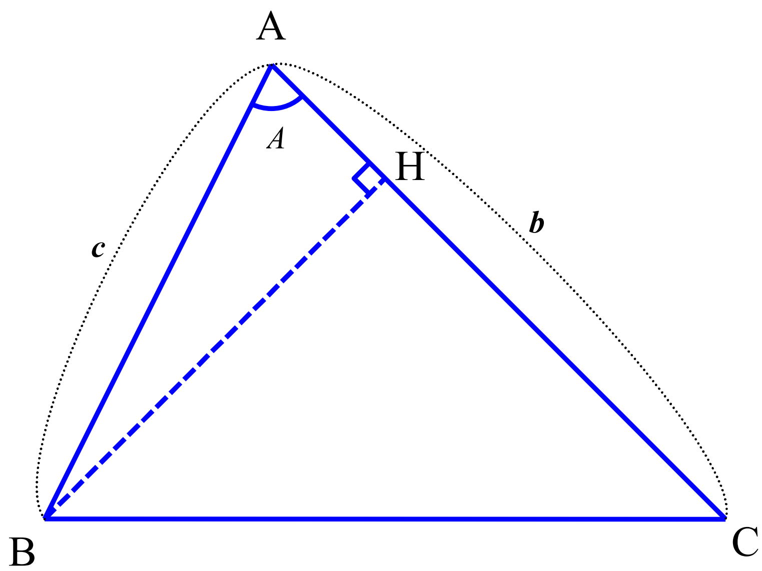
△ABC の面積を S とすると，$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$



解説

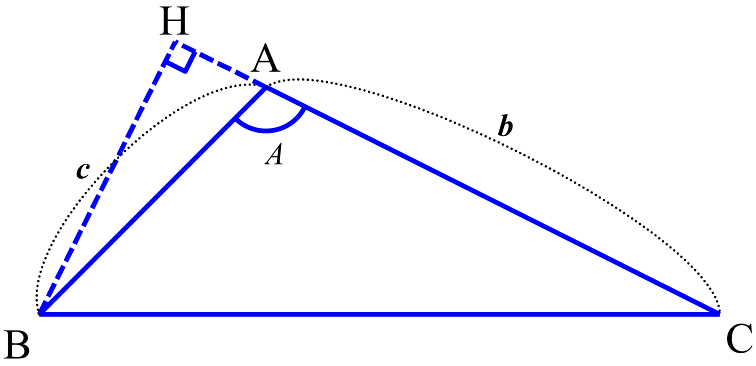
B から直線 AC に下ろした垂線の足を H とすると，

$\mathrm{BH}=c\sin A$ より，$S=\frac{1}{2}b\cdot\mathrm{BH}=\frac{1}{2}bc\sin A$



B から直線 AC に下ろした垂線の足を H とすると，

$\mathrm{AH} = c\sin(180° - A) = c\sin A$ より，$S = \frac{1}{2}b \cdot \mathrm{AH} = \frac{1}{2}bc\sin A$



同様にして，$S = \frac{1}{2}ca\sin B$，$S = \frac{1}{2}ab\sin C$ も成り立つ。

よって，$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

三角形の面積 2　ヘロンの公式

3 辺の長さが a, b, c である三角形の面積 S は

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　ただし，$s = \frac{a+b+c}{2}$

導き方

$$
\begin{aligned}
S &= \sqrt{S^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A}
\end{aligned}
$$

ここで，$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より，$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

また，△ABC において，余弦定理より，$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

よって，

$$
\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}.$$
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$
$$=\frac{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}}{2bc}\cdot\frac{\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}{2bc}$$
$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

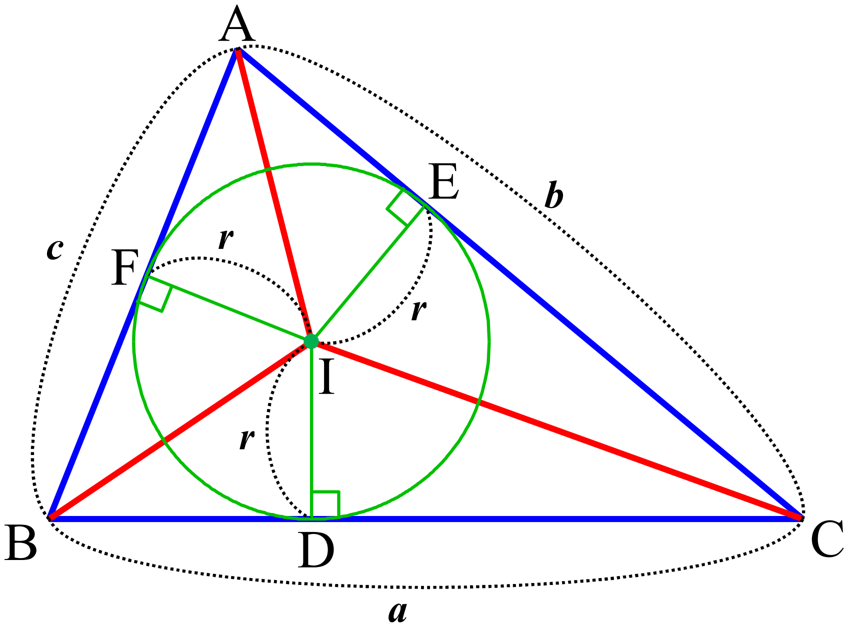
ゆえに,

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2\cdot\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}}$$
$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

したがって, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおけば, $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と表せる。

三角形の内接円と面積

△ABC＝△ABI＋△BCI＋△CAI より, $S=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=\frac{1}{2}r(a+b+c)$



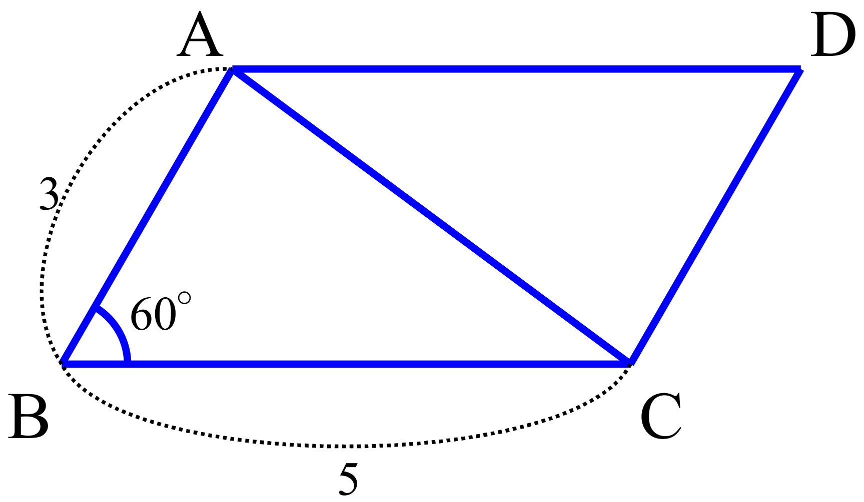
288

(1)

△ABC≡△CDA より，平行四辺形 ABCD の面積は△ABC の面積の 2 倍である。

よって，平行四辺形 ABCD の面積を S とすると，

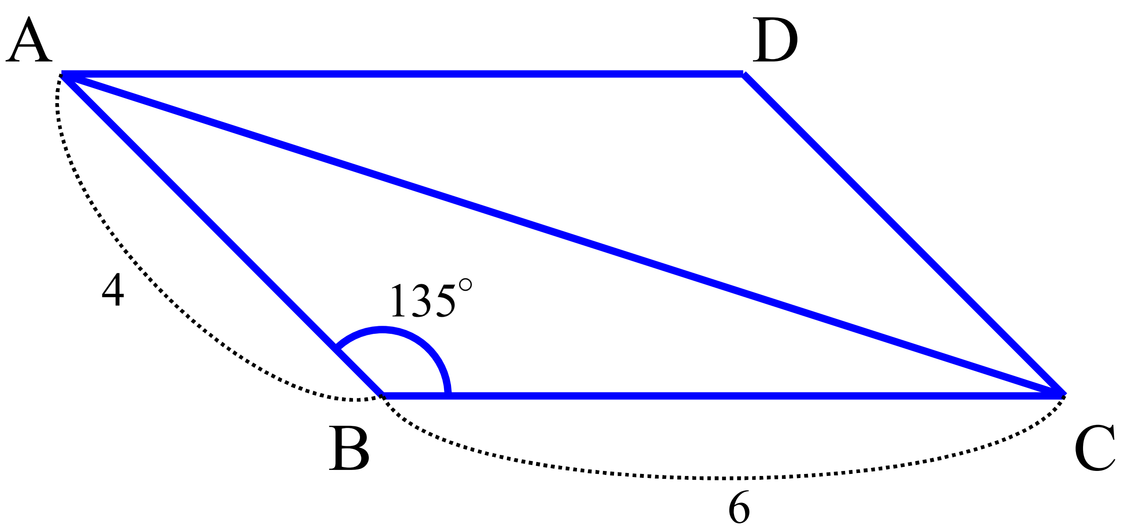
$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$



(2)

BC = AD = 6 より，△ABC の面積は $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin 135^\circ = 12 \sin(180^\circ - 45^\circ) = 12 \sin 45^\circ = 6\sqrt{2}$

よって，平行四辺形 ABCD の面積は $12\sqrt{2}$



289

(1)

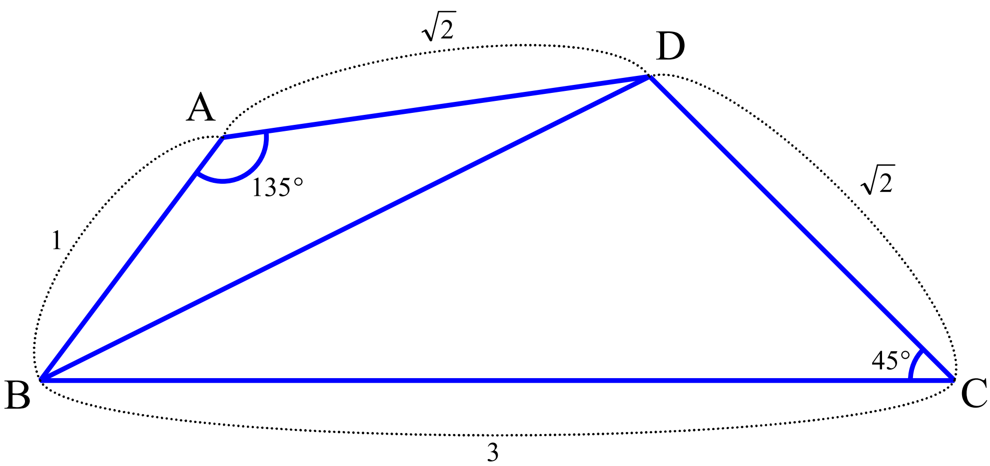
△ABD の面積

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{A} &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\sin 135^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(180^\circ - 45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

△BCD の面積

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{C} &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}\sin 45^\circ \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって，四角形 ABCD の面積は$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$



(2)

△ABC の面積

$$\frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{B}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin 120^\circ$$
$$=\frac{15}{2}\sin(180^\circ-60^\circ)$$
$$=\frac{15}{2}\sin 60^\circ$$
$$=\frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

△ACD の面積

$$\frac{1}{2}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DC}\sin\angle\mathrm{D}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\sin\angle\mathrm{D}$$
$$=10\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{D}}\quad\left(\because \sin\angle\mathrm{D}>0,\ \sin^2\angle\mathrm{D}+\cos^2\angle\mathrm{D}=1\right)$$

ここで，△ABC において，余弦定理より，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{BA}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cos 120^\circ}$$
$$=\sqrt{9+25-2\cdot 3\cdot 5\cos(180^\circ-60^\circ)}$$
$$=\sqrt{34-30\cdot(-\cos 60^\circ)}$$
$$=\sqrt{34-30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=7$$

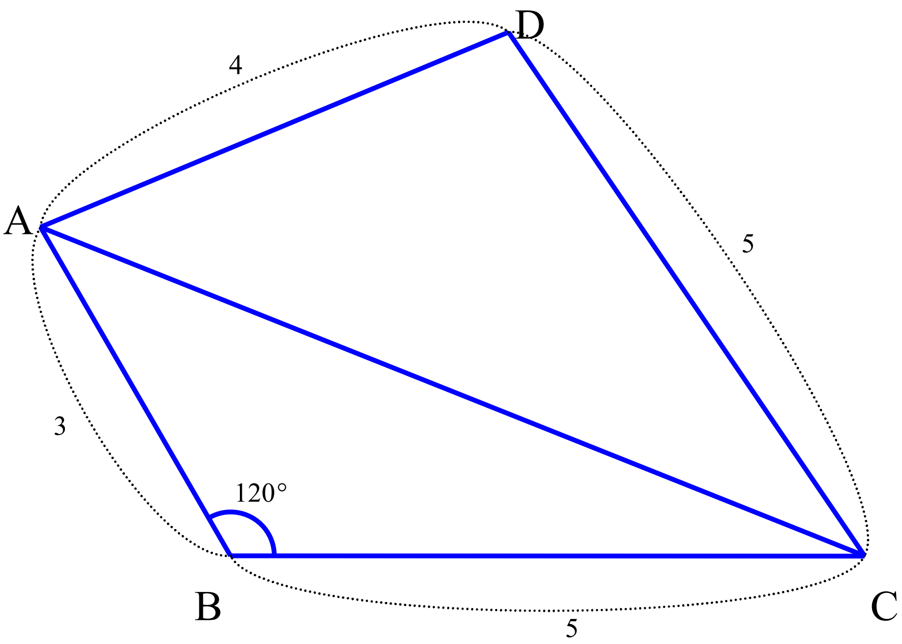
よって，△ACD において，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{D}=\frac{\mathrm{DA}^2+\mathrm{DC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DC}}$$
$$=\frac{16+25-49}{2\cdot 4\cdot 5}$$
$$=-\frac{1}{5}$$

ゆえに，

$$\frac{1}{2}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DC}\sin\angle\mathrm{D}=10\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{D}}$$
$$=10\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}$$
$$=4\sqrt{6}$$

よって，四角形 ABCD の面積は $\frac{15\sqrt{3}}{4}+4\sqrt{6}$



補足

△ACD の面積をヘロンの公式を使って求めると，

$AC=7,\ CD=5,\ DA=4$ より，

$$\sqrt{\frac{7+5+4}{2}\cdot\left(\frac{7+5+4}{2}-7\right)\left(\frac{7+5+4}{2}-5\right)\left(\frac{7+5+4}{2}-4\right)}=\sqrt{8\cdot1\cdot3\cdot4}$$
$$=4\sqrt{6}$$

ヘロンの公式

3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形の面積 S は

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{ただし,}\quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

290

(1)

△ABC において，余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{B}$$
$$= 4 + 16 - 2\cdot 2\cdot 4\cos\angle\mathrm{B}$$
$$= 20 - 16\cos\angle\mathrm{B} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

△ACD において，余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{DA}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2\mathrm{DA}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{D}$$
$$= 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot 3\cos\angle\mathrm{D}$$
$$= 13 - 12\cos\angle\mathrm{D}$$

ここで，四角形 ABCD は円に内接しているから，

$$\cos\angle\mathrm{D} = \cos(180° - \angle\mathrm{B})$$
$$= -\cos\angle\mathrm{B}$$

よって， $\mathrm{AC}^2 = 13 + 12\cos\angle\mathrm{B} \quad \cdot\cdot\cdot ②$

①，②より， $20 - 16\cos\angle\mathrm{B} = 13 + 12\cos\angle\mathrm{B} \quad \therefore \cos\angle\mathrm{B} = \dfrac{1}{4}$

これを①に代入すると， $\mathrm{AC}^2 = 16 \quad \therefore \mathrm{AC} = 4$

(2)

△ABC の面積

$$\frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{B} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{B}}$$
$$= 4\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{15}$$

または

ヘロンの公式より，

$$\sqrt{\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}-\mathrm{AB}\right)\left(\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}-\mathrm{BC}\right)\left(\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}-\mathrm{CA}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{2+4+4}{2}\left(\frac{2+4+4}{2}-2\right)\left(\frac{2+4+4}{2}-4\right)\left(\frac{2+4+4}{2}-4\right)}$$
$$= \sqrt{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}$$
$$= \sqrt{15}$$

△ACD の面積

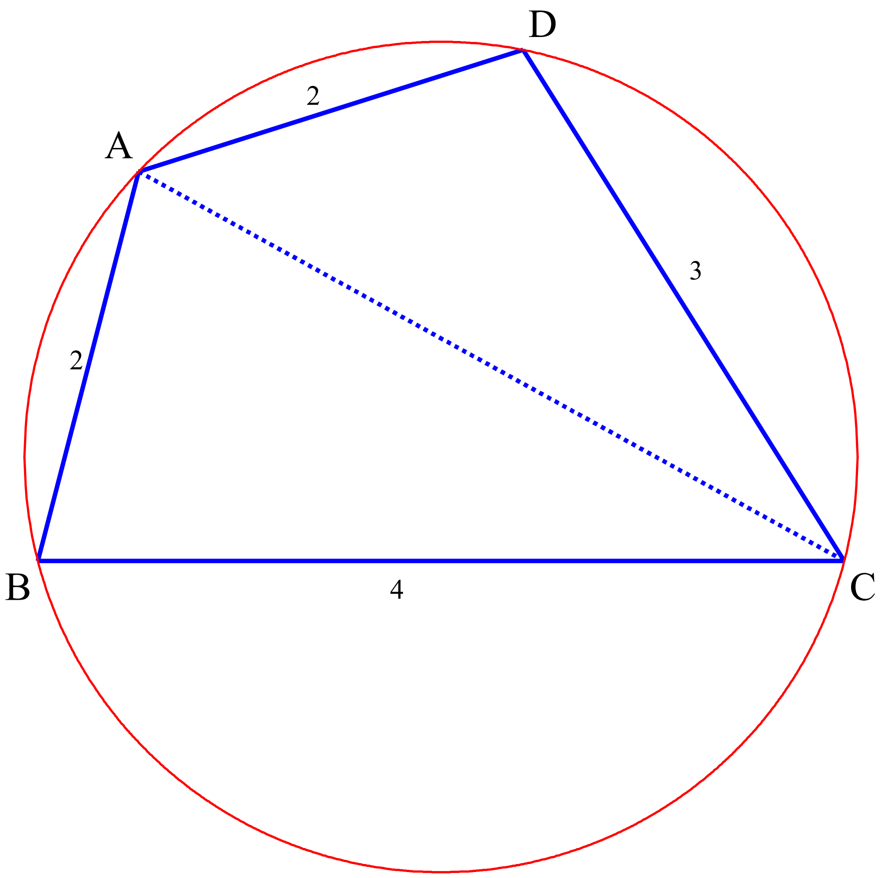
$$\frac{1}{2}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DC}\sin\angle\mathrm{D}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{D}}$$
$$=3\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

または

ヘロンの公式より,

$$\sqrt{\frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA}}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA}}{2}-\mathrm{AC}\right)\left(\frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA}}{2}-\mathrm{CD}\right)\left(\frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA}}{2}-\mathrm{DA}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{4+3+2}{2}\left(\frac{4+3+2}{2}-4\right)\left(\frac{4+3+2}{2}-3\right)\left(\frac{4+3+2}{2}-2\right)}$$
$$=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

よって，四角形 ABCD の面積は $\sqrt{15}+\frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$



291

(1)

△ABC において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle B\\ &= 9 + 1 - 2\cdot 3\cdot 1\cos 120^\circ\\ &= 10 - 6\cos(180^\circ - 60^\circ)\\ &= 10 + 6\cos 60^\circ\\ &= 13\end{aligned}$$

これより，△ACD において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}13 &= CD^2 + DA^2 - 2CD\cdot DA\cos\angle D\\ &= 9 + DA^2 - 2\cdot 3\cdot DA\cos(180^\circ - \angle B)\\ &= 9 + DA^2 - 6DA\cos 60^\circ\\ &= 9 + DA^2 - 3DA\end{aligned}$$

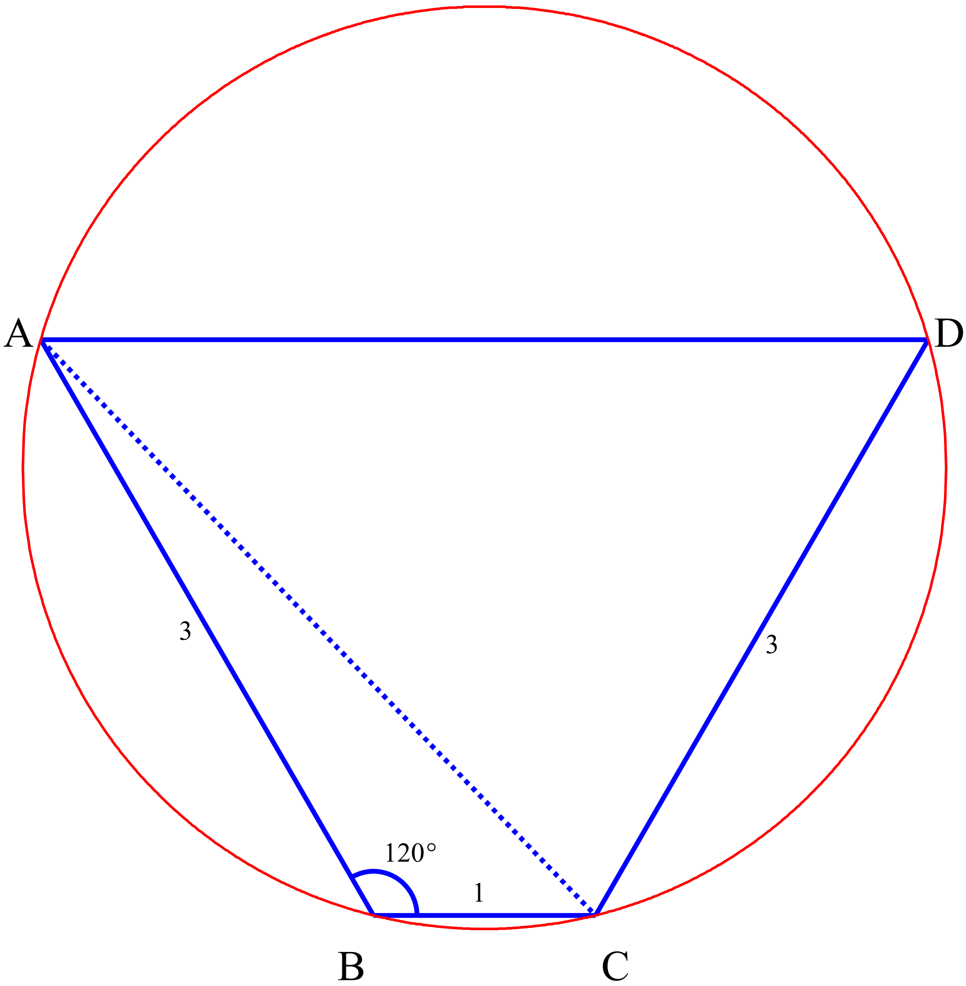
よって，$DA^2 - 3DA - 4 = 0$　すなわち $(DA+1)(DA-4) = 0$

ゆえに，$DA > 0$ より，$DA = 4$

四角形 ABCD の面積は△ABC の面積と△ACD の面積の和と等しいから，

求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle B + \frac{1}{2}DA\cdot DC\sin\angle D &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin 60^\circ\\ &= \frac{3}{2}\sin(180^\circ - 60^\circ) + \frac{12}{2}\sin 60^\circ\\ &= \left(\frac{3}{2} + \frac{12}{2}\right)\sin 60^\circ\\ &= \frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$


A
D
3
3
120°
1
B
C

(2)

△ABC において，余弦定理より，

$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle B$

$= 1 + 2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}\cos\angle B$

$= 3 - 2\sqrt{2}\cos\angle B$

△ACD において，余弦定理より，

$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2CA \cdot DA\cos\angle D$

$= 8 + 1 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1\cos(180° - \angle B)$

$= 9 + 4\sqrt{2}\cos\angle B$

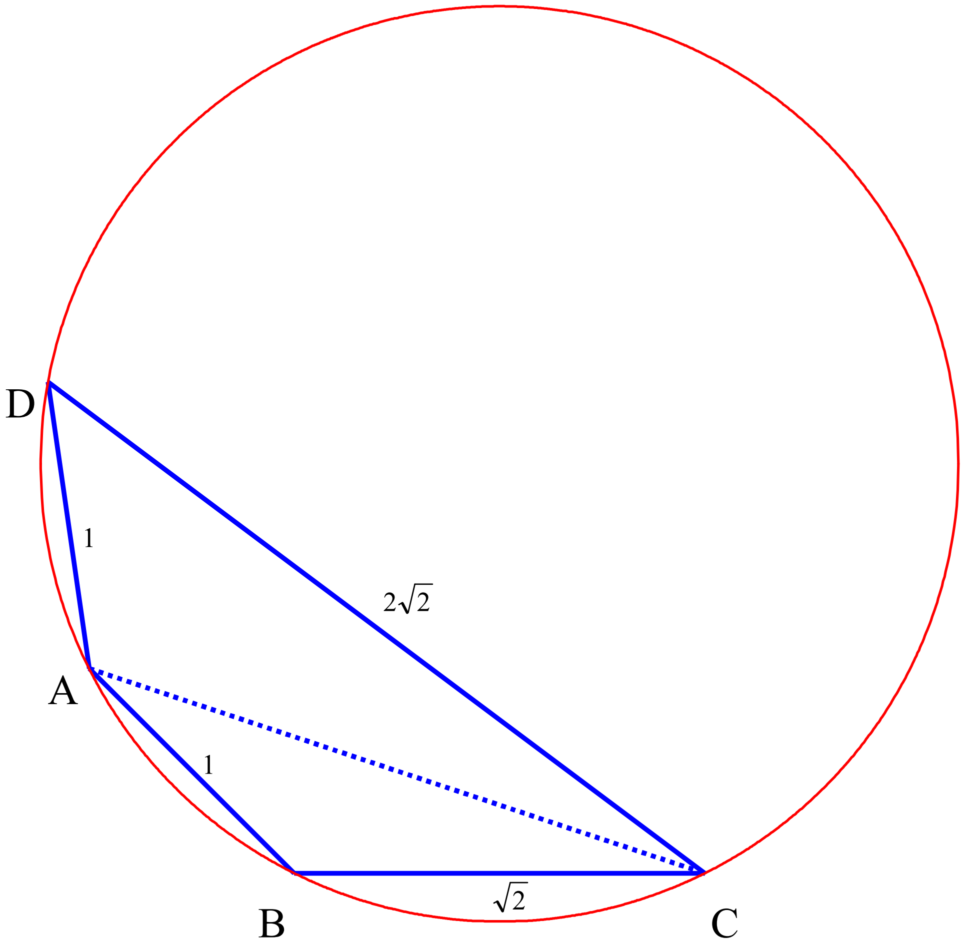
よって，$3 - 2\sqrt{2}\cos\angle B = 9 + 4\sqrt{2}\cos\angle B \quad \therefore \cos\angle B = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これより，$\angle B = 135°$

また，$\angle D = 180° - \angle B = 45°$

四角形 ABCD の面積は△ABC の面積と△ACD の面積の和と等しいから，求める面積は

$\dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC\cos 135° + \dfrac{1}{2} DA \cdot DC\cos 45° = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}$



292

内接する正 n 角形の面積

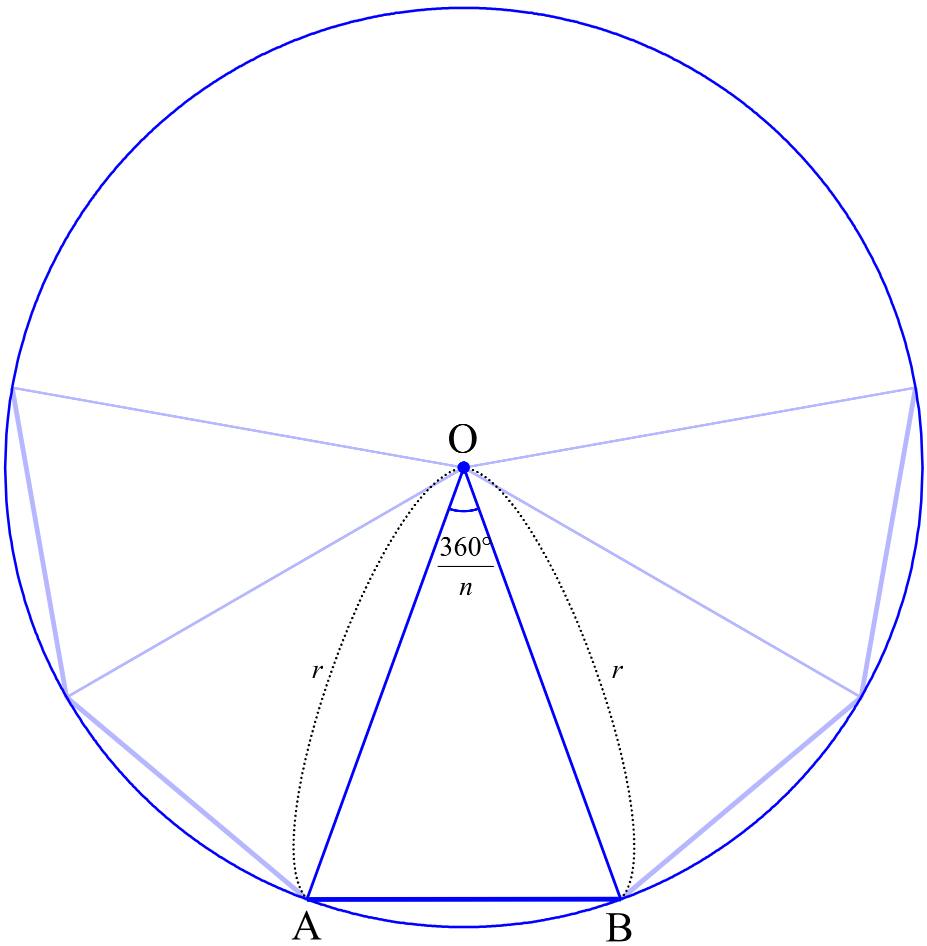
正 n 角形は，外接円の中心 O と頂点を結ぶことにより，

合同な n 個の二等辺三角形に分割できる。

よって，その 1 つの二等辺三角形を△OAB とすると，

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{360^\circ}{n}$， $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=r$ の頂角は $\dfrac{360^\circ}{n}$ より，△OAB の面積は $\dfrac{1}{2}r^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$

ゆえに，求める面積は $n\times\dfrac{1}{2}r^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}=\dfrac{1}{2}nr^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$



外接する正 n 角形の面積

正 n 角形は，内接の中心 O と頂点を結ぶことにより，

頂角が $\dfrac{360°}{n}$ の n 個の合同な二等辺三角形に分割できる。

そこで，その 1 つの二等辺三角形を△OAB,

O から辺 AB に下ろした垂線の足を H とすると，

$\mathrm{AB} \perp \mathrm{OH}$ より，H は辺 AB と内接円の接点だから，$\mathrm{OH} = r$

また，二等辺三角形の性質より，

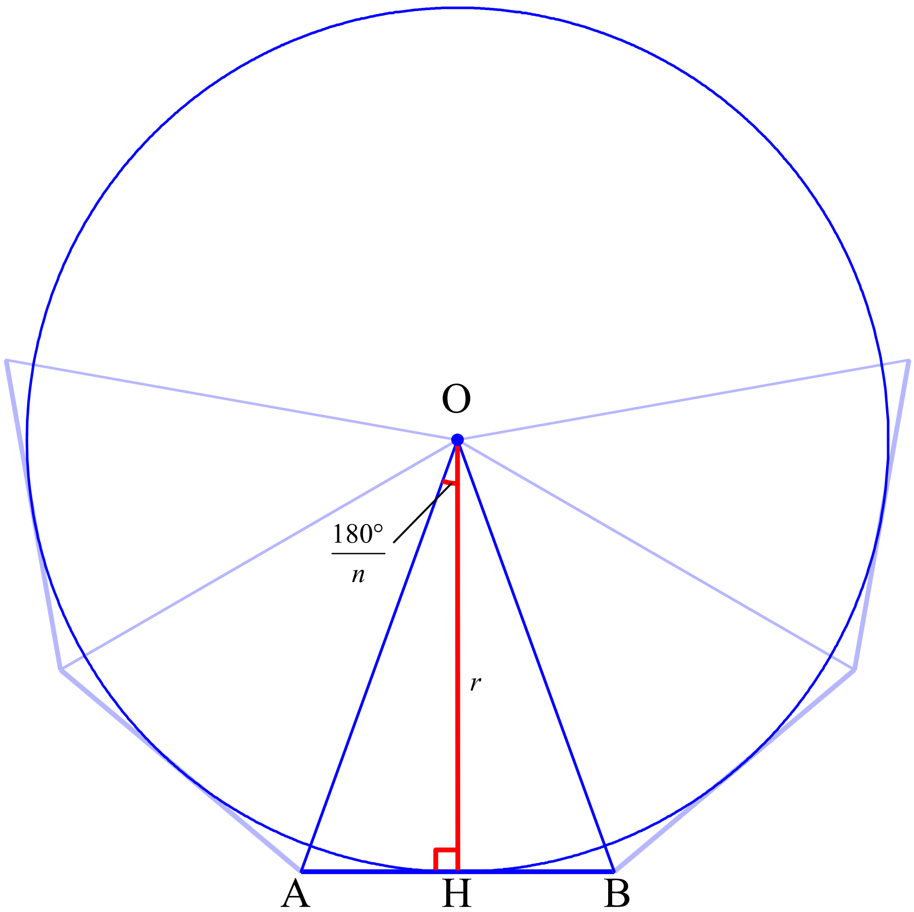
$$\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \qquad \therefore \mathrm{AB} = 2\mathrm{AH}$$

$$\angle\mathrm{AOH} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$$

よって，△OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{OH}\cdot\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OH}\cdot 2\mathrm{AH} = \mathrm{OH}\cdot\mathrm{AH} = \mathrm{OH}\cdot\mathrm{OH}\tan\frac{180°}{n} = r^2\tan\frac{180°}{n}$$

ゆえに，求める面積は $nr^2\tan\dfrac{180°}{n}$



293

(1)

△ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$
$$= \frac{1}{2}r(4+5+6)$$
$$= \frac{15}{2}r$$

また，

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$= \frac{1}{2}4\cdot 5\cdot\sqrt{1-\cos^2 C}$$
$$= 10\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$$
$$= 10\sqrt{1-\left(\frac{16+25-36}{2\cdot 4\cdot 5}\right)^2}$$
$$= \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

よって，$\frac{15}{2}r = \frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

補足

ヘロンの公式から S を求めると，

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

(2)

△ABC の面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \\
&= \frac{1}{2}r(a+7+8) \\
&= \frac{1}{2}r\left(\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}+15\right) \\
&= \frac{1}{2}r\left(\sqrt{49+64-2\cdot 7\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}+15\right) \\
&= \frac{1}{2}r(13+15) \\
&= 14r
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\
&= \frac{1}{2}7\cdot 8\cdot\sin 120^\circ \\
&= 28\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 14\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

よって，$14r = 14\sqrt{3}$　　$\therefore r=\sqrt{3}$

294

(1)

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\sin 60^\circ$$
$$=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=10\sqrt{3}$$

(2)

余弦定理より，

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$
$$=\sqrt{64+25-2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ}$$
$$=\sqrt{89-80\cdot\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{49}$$
$$=7$$

(3)

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$
$$=\frac{1}{2}r(8+5+7)$$
$$=10r$$

(1)より， $S=10\sqrt{3}$ だから， $10r=10\sqrt{3}$　 $\therefore r=\sqrt{3}$

(4)

正弦定理より， $\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$$\therefore R=\frac{c}{2\sin C}$$
$$=\frac{7}{2\sin 60^\circ}$$
$$=\frac{7}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

295

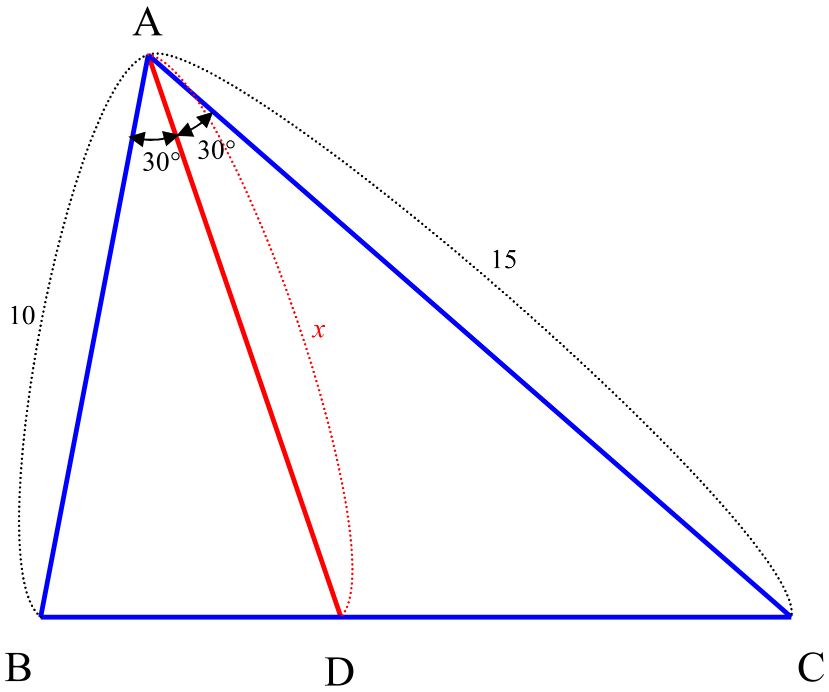
△ABC＝△ABD＋△ACD であるから，$AD = x$ とおくと，

$\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 10\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot x\cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot 15\cdot x\cdot \sin 30^\circ$ より，

$\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 10\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot x\cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 15\cdot x\cdot \frac{1}{2}$

両辺を 4 倍し，整理すると，$150\sqrt{3} = 25x$　$\therefore x = 6\sqrt{3}$

ゆえに，$AD = 6\sqrt{3}$



296

△OAB の面積$=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 45^\circ$

△OBC の面積$=\dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin 135^\circ=\dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin 45^\circ$

△OCD の面積$=\dfrac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}\sin 45^\circ$

△ODA の面積$=\dfrac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OA}\sin 135^\circ=\dfrac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OA}\sin 45^\circ$

よって，四角形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OA}\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sin 45^\circ}{2}(\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}+\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}+\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}+\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OA})$$

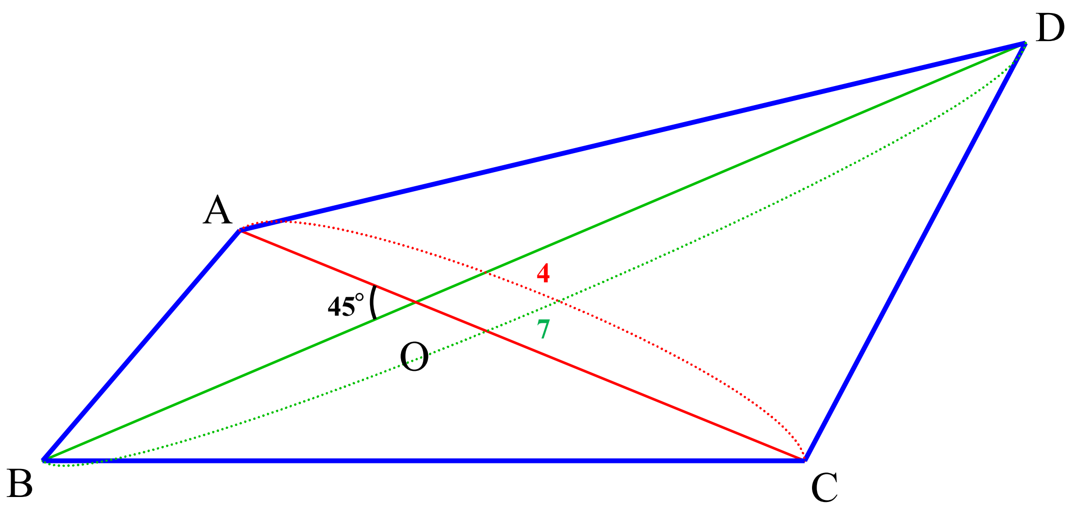
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\{\mathrm{OB}(\mathrm{OA}+\mathrm{OC})+\mathrm{OD}(\mathrm{OA}+\mathrm{OC})\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(\mathrm{OA}+\mathrm{OC})(\mathrm{OB}+\mathrm{OD})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 4\cdot 7$$

$$=7\sqrt{2}$$



297

(1)

正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

$$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$
$$=\frac{c\sin A}{\sin\{180^\circ-(A+B)\}}$$
$$=\frac{c\sin A}{\sin(A+B)}$$

(2)

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{c\sin A}{\sin(A+B)}\cdot c\sin B$$
$$=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$$

298

(1)

底面を△OBC とすると，

底面積=$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

高さ OA=2

よって，$V=\dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot 2=\dfrac{4}{3}$

(2)

△ABC は 1 辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正三角形であるから，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$$

(3)

$V=\dfrac{1}{3}S\cdot\mathrm{OH}$，$V=\dfrac{4}{3}$，$S=2\sqrt{3}$ より，

$$\mathrm{OH}=\frac{3V}{S}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

299

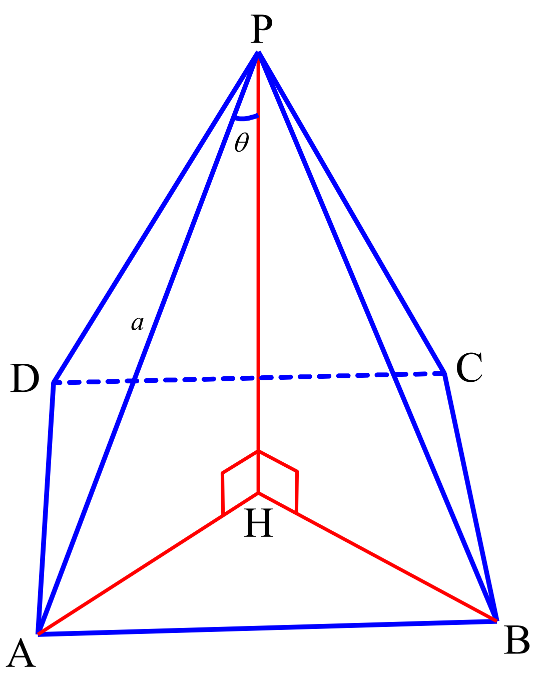
$\triangle$ABH は$\angle \mathrm{AHB}=90°$の直角二等辺三角形だから，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}\mathrm{AH}$

よって，正方形 ABCD の面積は$\mathrm{AB}^2=2\mathrm{AH}^2$

したがって，正四角錐の体積をVとすると，$V=\dfrac{1}{3}\mathrm{PH}\cdot 2\mathrm{AH}^2=\dfrac{2}{3}\mathrm{PH}\cdot\mathrm{AH}^2$

これと，$\angle \mathrm{AHP}=90°$の直角三角形 PAH において，$\mathrm{AH}=a\sin\theta$，$\mathrm{PH}=a\cos\theta$より，

$V=\dfrac{2}{3}a\cos\theta\cdot a^2\sin^2\theta=\dfrac{2}{3}a^3\sin^2\theta\cos\theta$



300

(1)

正三角形 BCD の面積$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sin 60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{4}$　・・・①

A から正三角形 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，△ABH，△ACH，△ADH は斜辺の長さが等しく AH を共有する直角三角形だから，合同である。よって，$BH=CH=DH$

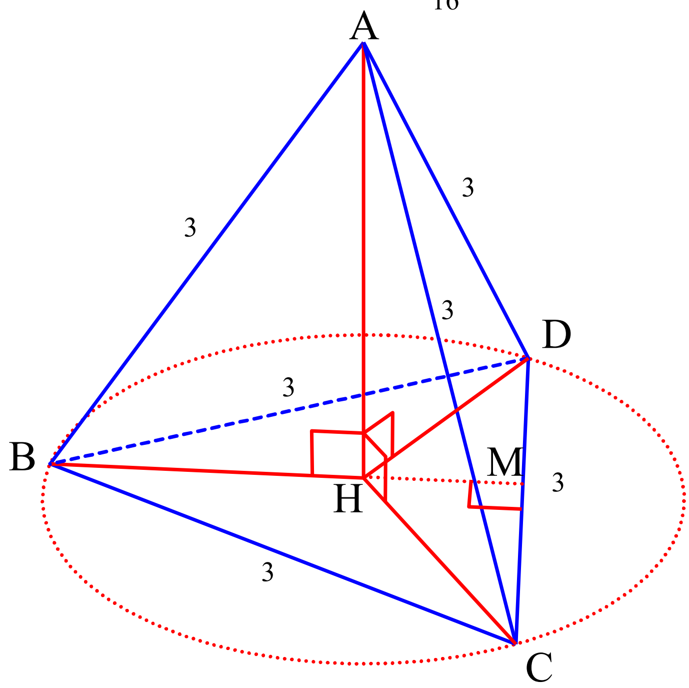
これより，H は正三角形 BCD の外接円の中心，BH は外接円の半径ということになり，

正弦定理より，$\frac{3}{\sin 60^\circ}=2BH$　$\therefore BH=\frac{3}{2\sin 60^\circ}=\sqrt{3}$

よって，△ABH において，三平方の定理より，$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$　・・・②

ゆえに，①，②より，正四面体 ABCD の体積$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{6}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

これと，正四面体 ABCD の体積$=4V$ より，$V=\frac{9\sqrt{2}}{16}$



補足：H は△BCD の重心でもある。

H が外心であるということは，H は各辺の垂直二等分線の交点である。

二等辺三角形の底辺の垂直二等分線は，頂点を通るから，頂点から底辺に引いた中線でもある。したがって，正三角形の場合，垂直二等分線の交点すなわち外心と中線の交点すなわち重心が一致する。ということは，H は△BCD の重心でもある。

すると，上図において，$BM=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$　$\therefore BH=\frac{2}{3}BM=\sqrt{3}$

(2)

△BCD を四面体 OBCD の底面にとると，底面積は$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，高さは内接球の半径rだから，

$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\cdot r=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r$

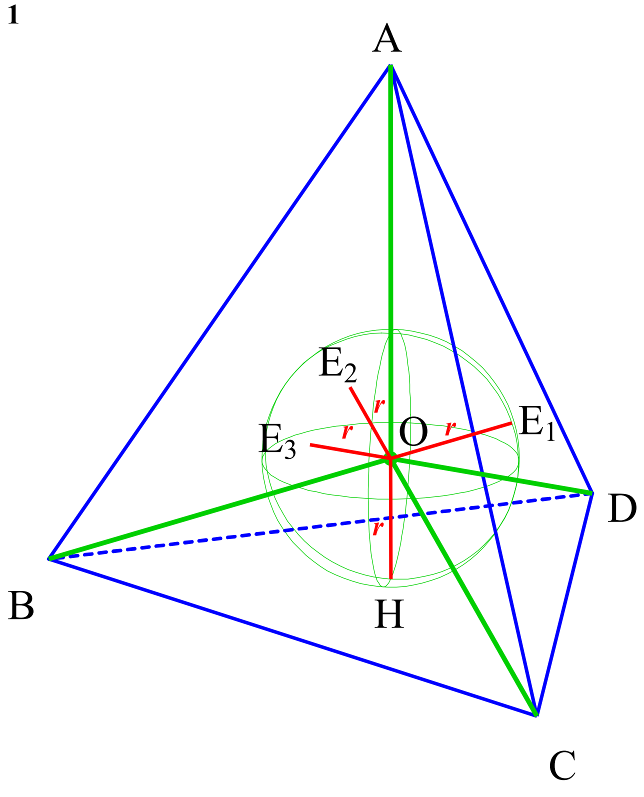
また，(1)より，$V=\dfrac{9\sqrt{2}}{16}$

よって，$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r=\dfrac{9\sqrt{2}}{16}$ $\therefore r=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

これより，球の表面積$=4\pi r^2=\dfrac{3}{2}\pi$，球の体積$=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{\sqrt{6}}{8}\pi$

解説：「正四面体 ABCD の体積＝4×四面体 OBCD の体積」の導き方

導き方 1

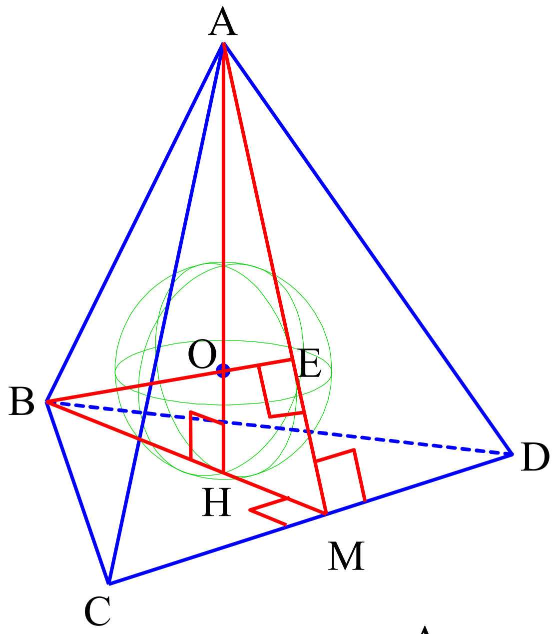


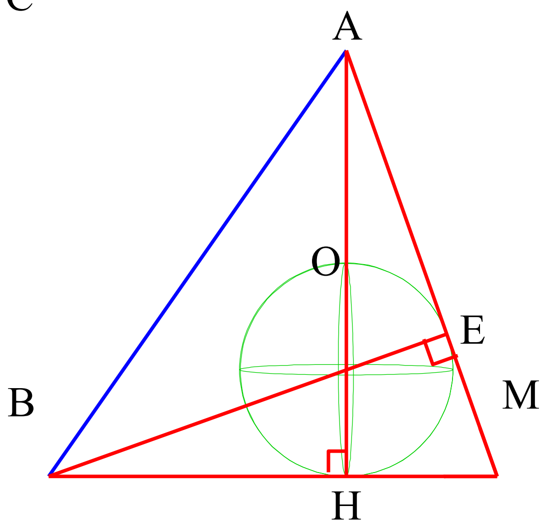
内接球と各面との接点を H, E_1, E_2,E_3 とすると，

OH, OE_1, OE_2, OE_3 は内接球の中心 O から各面に下ろした垂線かつ内接球の半径だから，それぞれ O を頂点としたときの四面体 OECD, OACD, OABD, OABC の高さは内接球の半径と等しい。よって，4 つの四面体はいずれも底面が合同で高さが等しい。

ゆえに，「正四面体 ABCD の体積＝4×四面体 OBCD の体積」が成り立つ。

導き方 2





△AHM と直線 BE において，メネラウスの定理より，$\dfrac{AO}{OH}\cdot\dfrac{HB}{BM}\cdot\dfrac{ME}{EA}=1$　・・・①

H，E はそれぞれ△BCD，△ACD の重心だから，BH：HM＝AE：EM＝2：1

よって，$\dfrac{HB}{BM}=\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$　・・・②　$\dfrac{ME}{EA}=\dfrac{1}{2}$　・・・③

①～③より，$\dfrac{AO}{OH}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=1$　$\therefore AO:OH=3:1$

ゆえに，AH：OH＝4：1　すなわち AH＝4OH

したがって，底面を△BCD とすると，

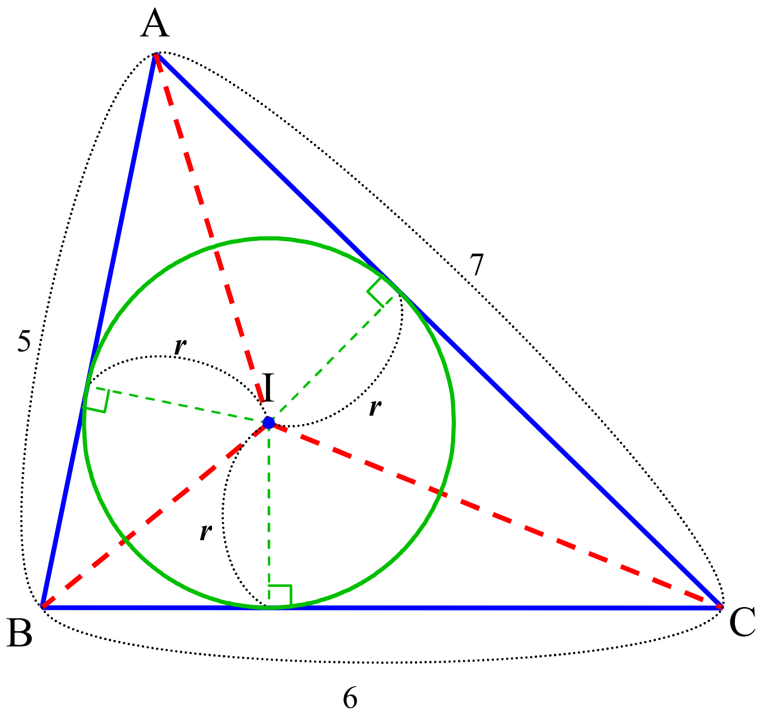
正四面体 ABCD の高さは四面体 OBCD の高さの 4 倍だから，

正四面体 ABCD の体積＝4×四面体 OBCD の体積

301

(1)

球の半径を r とし，立体を底面と平行に球の中心を通るように切断すると，
その断面は，3 辺の長さが 5,6,7 である三角形に半径 r の円が内接している図になる。



△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}r(5+6+7)=9r \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\sin\angle B\\&=15\sqrt{1-\cos^2\angle B}\\&=15\sqrt{1-\left(\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}\right)^2}\\&=15\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}\\&=6\sqrt{6} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，②より，$9r=6\sqrt{6}$　　$\therefore r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

ゆえに，球の表面積$=4\pi\cdot\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{2}\right)^2=\dfrac{32}{3}\pi$，球の体積$=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{2}\right)^3=\dfrac{64\sqrt{6}}{27}\pi$

補足

S をヘロンの公式から求めると，

$$S=\sqrt{\frac{5+6+7}{2}\left(\frac{5+6+7}{2}-5\right)\left(\frac{5+6+7}{2}-6\right)\left(\frac{5+6+7}{2}-7\right)}$$

$$=6\sqrt{6}$$

(2)

表面積 ＝ 側面積＋2×底面積

$$=2r(5+6+7)+2S$$

$$=\frac{4\sqrt{6}}{3}\cdot 18+2\cdot 6\sqrt{6}$$

$$=36\sqrt{6}$$

体積 ＝ 底面積×高さ

$$=S\cdot 2r$$

$$=6\sqrt{6}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$=48$$

(3)

球の表面積：三角柱の表面積＝$\frac{32}{3}\pi$ ： $36\sqrt{6}$

＝8π ： $27\sqrt{6}$

(4)

球の体積：三角柱の体積＝$\frac{64\sqrt{6}}{27}\pi$ ：48

＝8π ： $27\sqrt{6}$

＝球の表面積：三角柱の表面積

補足

球の表面積＝$4\pi r^2$，

三角柱の表面積＝側面積＋2×底面積＝$2r(a+b+c)+r(a+b+c)=3r(a+b+c)$

よって，球の表面積：三角柱の表面積＝$4\pi r$ ： $3(a+b+c)$

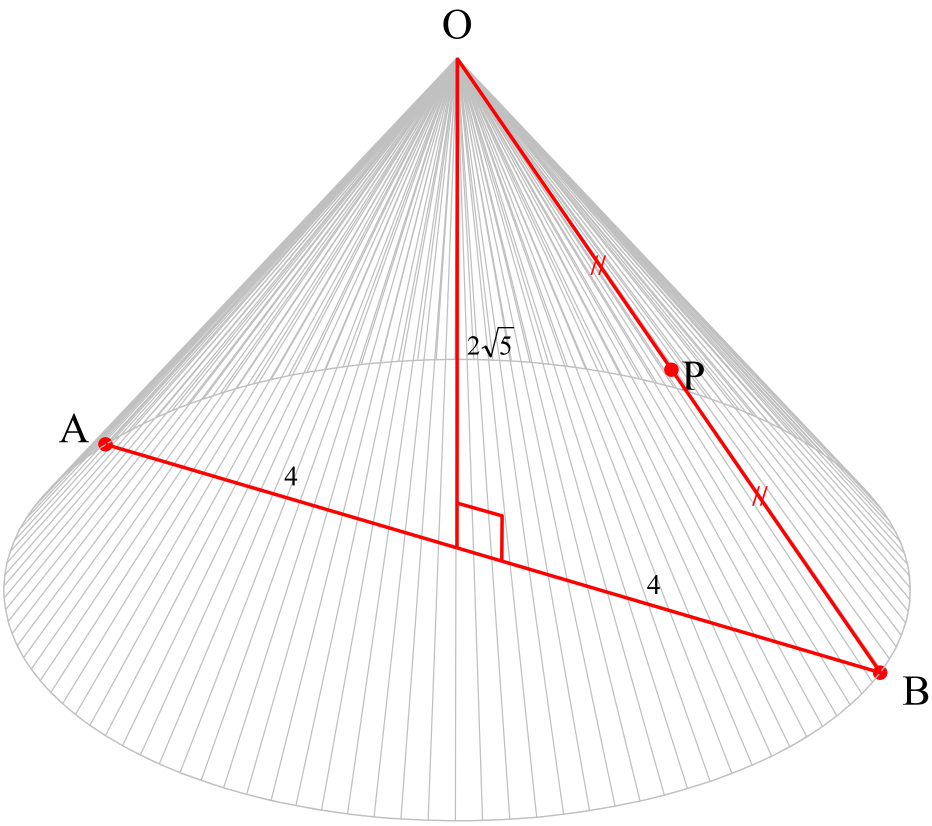
球の体積＝$\frac{4}{3}\pi r^3$

三角柱の体積＝底面積×高さ＝$\frac{1}{2}r(a+b+c)\cdot 2r=r^2(a+b+c)$

よって，球の体積：三角柱の体積＝$4\pi r$ ： $3(a+b+c)$

ゆえに，球の体積：三角柱の体積＝球の表面積：三角柱の表面積

302



三平方の定理より， $OB=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+4^2}=6$

よって， $OP=3$

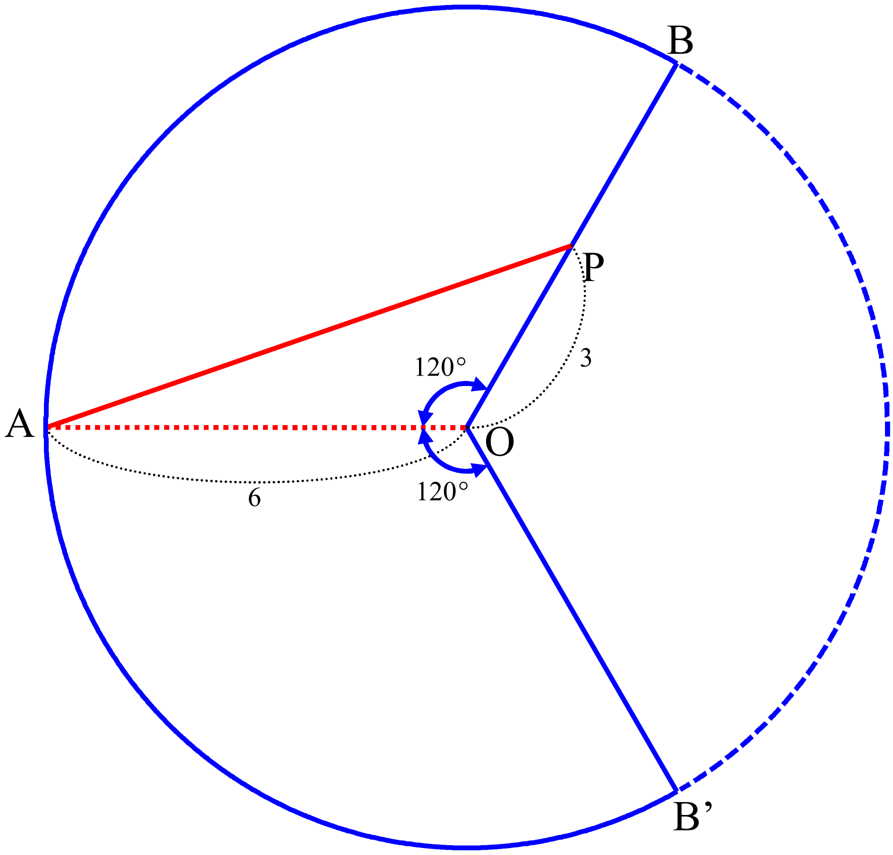
直円錐の側面を母線 OB から切り開いてできる扇形を OBB' とすると，
弧 BB' の長さは，直円錐の底面の円周の長さと等しいから，$2\pi \cdot 4 = 8\pi$

一方，扇形の中心角の大きさを $x°$ とすると，弧 BB' の長さは $2\pi \cdot 6 \times \frac{x°}{360°} = \frac{x}{30}\pi$

よって，$\frac{x}{30}\pi = 8\pi$ より，$x = 240$

したがって，側面図は下図のようになる。
ゆえに，△AOP において，余弦定理より，

$$\begin{aligned} \mathrm{AP} &= \sqrt{6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3\cos 120°} \\ &= \sqrt{45 + 18} \\ &= 3\sqrt{7} \end{aligned}$$



303

(1)

$$\sqrt{\frac{3+5+6}{2}\left(\frac{3+5+6}{2}-3\right)\left(\frac{3+5+6}{2}-5\right)\left(\frac{3+5+6}{2}-6\right)}=\sqrt{7\cdot 4\cdot 2\cdot 1}=2\sqrt{14}$$

(2)

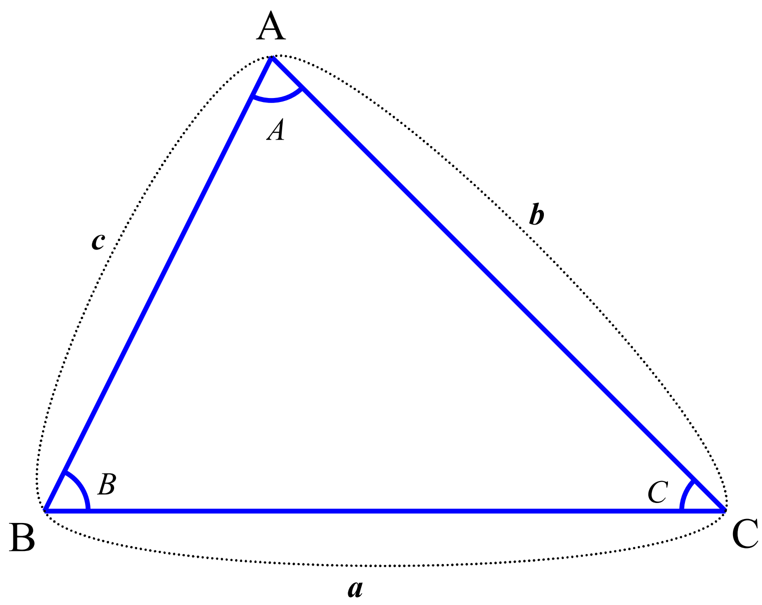
$$\sqrt{\frac{2+3+4}{2}\left(\frac{2+3+4}{2}-2\right)\left(\frac{2+3+4}{2}-3\right)\left(\frac{2+3+4}{2}-4\right)}=\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

ヘロンの公式

3 辺の長さが a, b, c である三角形の面積 S は

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

導き方



$$\begin{aligned}S&=\sqrt{S^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A}\end{aligned}$$

ここで，$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より，$\sin^2 A=1-\cos^2 A$

また，△ABC において，余弦定理より，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

よって，

$$
\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\
&= \left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc} \\
&= \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}. \\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} \\
&= \frac{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}}{2bc}\cdot\frac{\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}{2bc} \\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
S &= \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2\cdot\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}
\end{aligned}
$$

したがって， $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおけば， $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と表せる。