図形と計量　演習問題

23

(1)

$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}-\sin\theta$

これを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると，$\left(\dfrac{1}{2}-\sin\theta\right)^2+\sin^2\theta=1$

両辺を $\sin\theta$ について整理すると，$2\sin^2\theta-\sin\theta-\dfrac{3}{4}=0$

両辺を 4 倍すると，$8\sin^2\theta-4\sin\theta-3=0$

この $\sin\theta$ についての 2 次方程式を解の公式を使って解くと，$\sin\theta=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

ここで，$0°\leq\theta\leq180°$ において，$0\leq\sin\theta\leq1$ だから，$\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

(2)

(1)より，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$

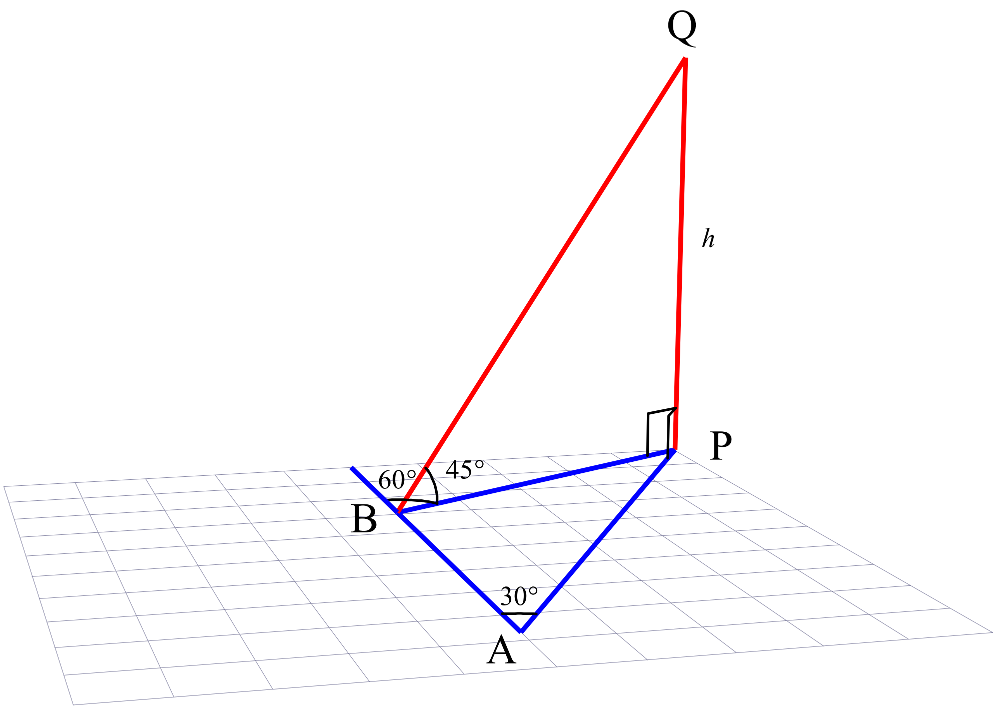
(3)

(1)，(2)より，

$$
\begin{aligned}
\tan\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\
&=\frac{\frac{1+\sqrt{7}}{4}}{\frac{1-\sqrt{7}}{4}}\\
&=\frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}\\
&=\frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}\\
&=\frac{\left(1+\sqrt{7}\right)^2}{\left(1-\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt{7}\right)}\\
&=\frac{8+2\sqrt{7}}{-6}\\
&=-\frac{4+\sqrt{7}}{3}
\end{aligned}
$$

24

(1)



△APB において，∠B の外角が 60° だから，$\angle P = 60° - \angle A = 30°$

よって，△APB はBA = BP の二等辺三角形

これと $AB = 10$ m/秒×10 秒 = 100 m より，$BP = 100$ m　・・・①

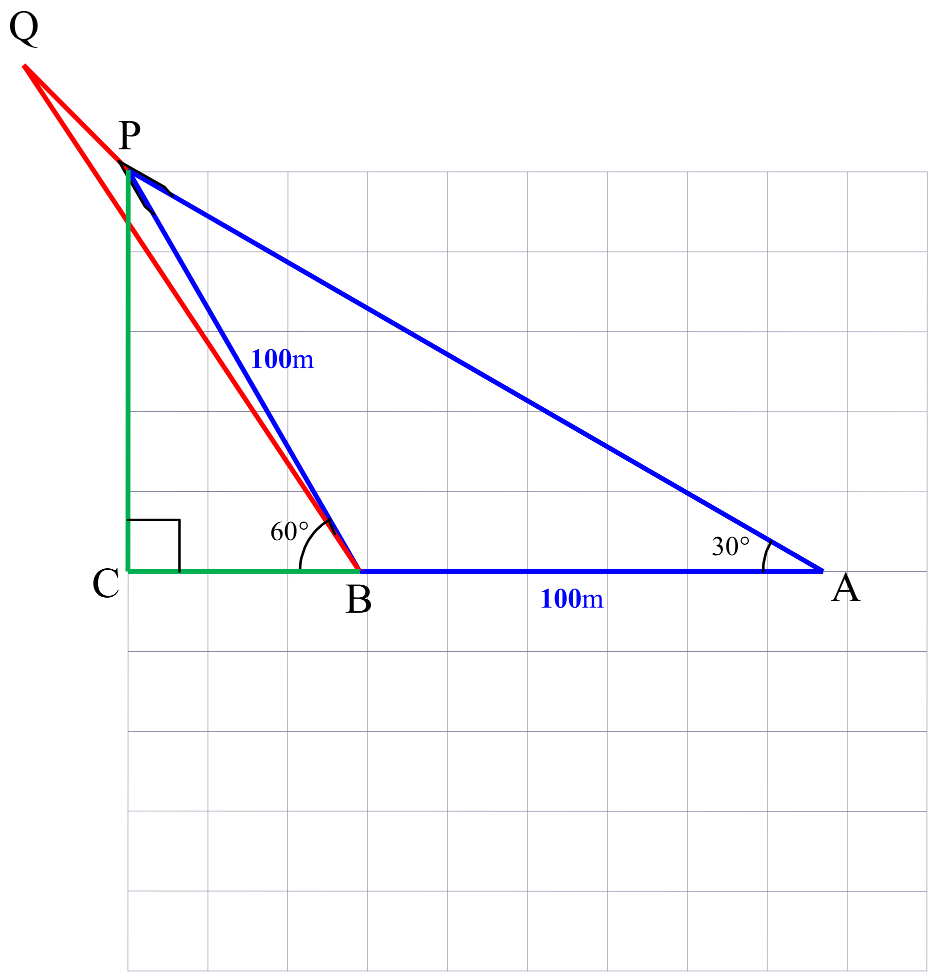
△BPQ はPB = PQ の直角二等辺三角形だから，$PB = h$　・・・②

①，②より，$h = 100$ m

(2)

条件より， $\angle PCB = 90°$ になるから， $BC = PB\cos 60° = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50\,\mathrm{m}$

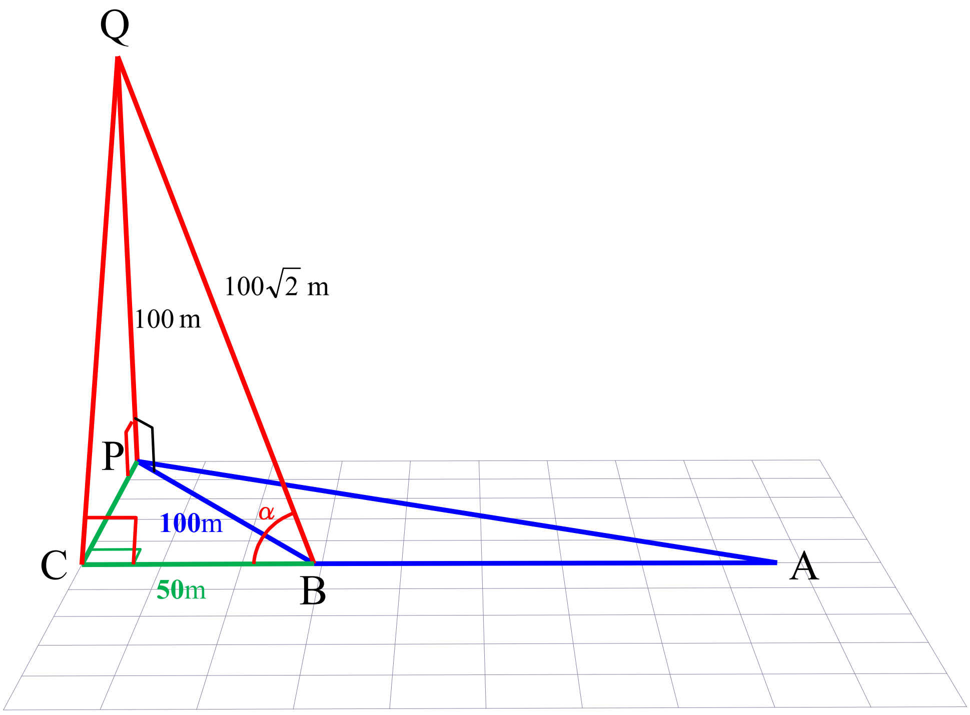
よって，50m ÷ 10m/秒= 5 秒



(3)

△BPQ は PB = PQ の直角二等辺三角形だから， $QB = PQ \times \sqrt{2} = 100\sqrt{2}$ m

これと ∠QCB = 90° より， $\cos \alpha = \dfrac{BC}{QB} = \dfrac{50}{100\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$



25

(1)

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2\cdot 15$

よって，$\sin A=\dfrac{\mathrm{BC}}{2\cdot 15}=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$

(2)

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2\cdot 15$

$0<B<180^\circ$ より，$\sin B>0$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}&=2\cdot 15\sin B\\&=30\sqrt{1-\cos^2 B}\\&=30\cdot\frac{4}{5}\\&=24\end{aligned}$$

余弦定理より，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B=\mathrm{AC}^2$

これと $\mathrm{BC}=10,\ \mathrm{AC}=24$ より，$\mathrm{AB}^2+100-2\cdot\mathrm{AB}\cdot 10\cdot\dfrac{3}{5}=576$

よって，$\mathrm{AB}^2-12\mathrm{AB}-476=0$

$\mathrm{AB}>0$ および解の公式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=6+\sqrt{6^2+476}\\&=6+\sqrt{512}\\&=6+\sqrt{256\cdot 2}\\&=6+16\sqrt{2}\end{aligned}$$

補足

$ax^2+2b'x+c=0$ の解の公式は $\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

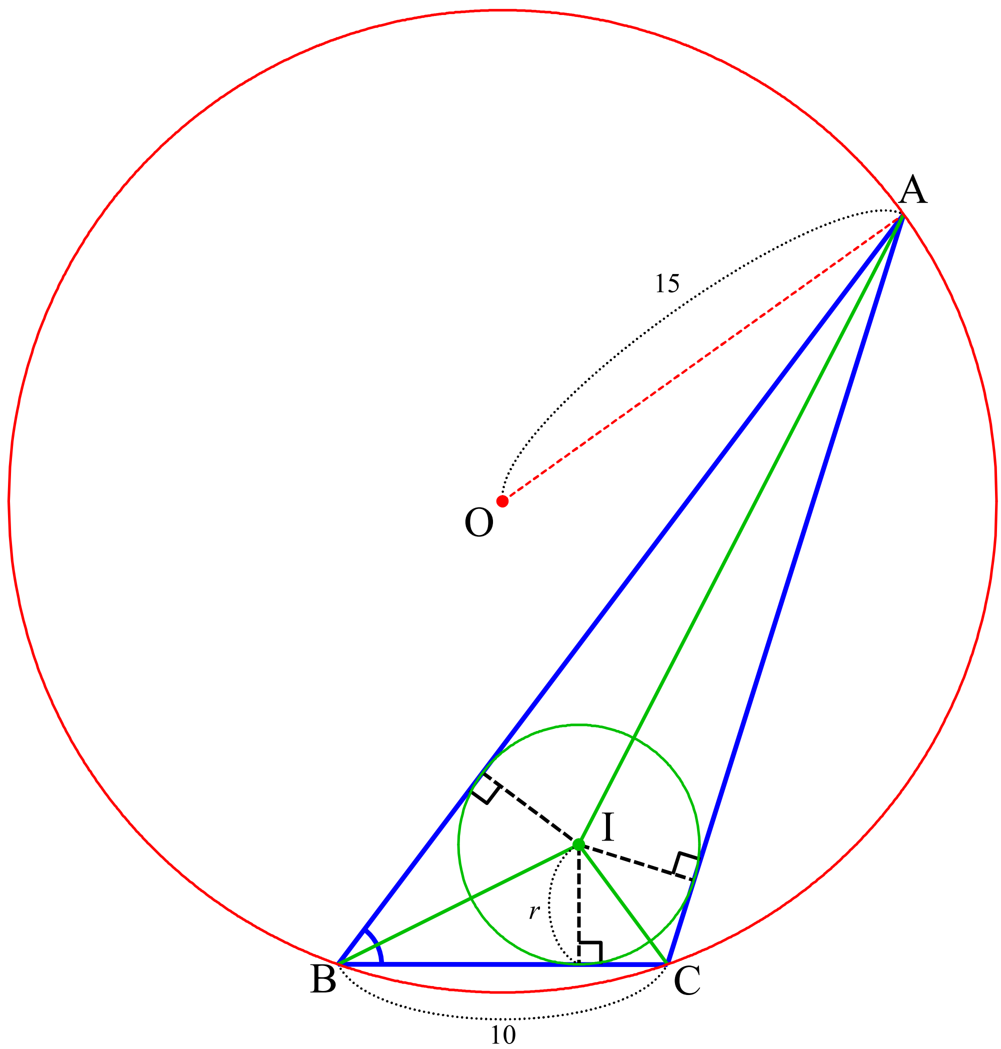
(3)

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(6+16\sqrt{2}\right)\cdot 24\cdot\frac{1}{3}\\&=24+64\sqrt{2}\end{aligned}$$

(4)

$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ より， $24+64\sqrt{2}=\frac{1}{2}r\{(6+16\sqrt{2})+10+24\}=r(20+8\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}\therefore r&=\frac{24+64\sqrt{2}}{20+8\sqrt{2}}\\&=\frac{6+16\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}\\&=\frac{(6+16\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}\\&=4\sqrt{2}-2\end{aligned}$$



26

「どこに注目すれば計算処理が楽になるか?」から始めよう。

内接球の中心を O とすると，四面体 ABCD の体積は四面体 OABC, OBCD, OCDA, ODAB の体積の和と等しい。

また，内接球の半径を r とすると，内接球の中心から各面に下ろした垂線の長さと内接球の半径は等しいから，頂点を O とする上の 4 つの四面体の高さは r である。

よって，

四面体 ABCD の体積$=\frac{1}{3}r\Delta\mathrm{ABC}+\frac{1}{3}r\Delta\mathrm{BCD}+\frac{1}{3}r\Delta\mathrm{CDA}+\frac{1}{3}r\Delta\mathrm{DAB}$

$$=\frac{1}{3}r(\Delta\mathrm{ABC}+\Delta\mathrm{BCD}+\Delta\mathrm{CDA}+\Delta\mathrm{DAB})$$

ここで，

△ABC は，AB：AC：BC＝1：1：$\sqrt{2}$ より，BC を斜辺とする直角二等辺三角形だから，

$\Delta\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6^2=18$

(または，△ABC の面積は，ヘロンの公式より，

$$\sqrt{\frac{6+6\sqrt{2}+6}{2}\left(\frac{6+6\sqrt{2}+6}{2}-6\right)\left(\frac{6+6\sqrt{2}+6}{2}-6\sqrt{2}\right)\left(\frac{6+6\sqrt{2}+6}{2}-6\right)}$$
$$=\sqrt{\left(6+3\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}\cdot\left(6-3\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{18^2}$$
$$=18$$
)

これと△ABC，△CDA，△DAB は合同であることから，

$\Delta\mathrm{ABC}+\Delta\mathrm{CDA}+\Delta\mathrm{DAB}=3\cdot 18=54$

△BCD は 1 辺の長さが $6\sqrt{2}$ の正三角形だから，$\Delta\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\left(6\sqrt{2}\right)^2\sin 60^\circ=18\sqrt{3}$

よって，四面体 ABCD の体積$=\frac{1}{3}r\left(54+18\sqrt{3}\right)=r\left(18+6\sqrt{3}\right)$　・・・①

次に，四面体 ABCD の底面を△ABC，頂点を D とすると，

△CDA，△DAB はそれぞれ CD, DB を斜辺とする直角二等辺三角形だから，

$\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{DAC}=90^\circ$ より，DA⊥△ABC

よって，四面体 ABCD の体積$=\frac{1}{3}\times\Delta\mathrm{ABC}\times\mathrm{DA}=\frac{1}{3}\cdot 18\cdot 6=36$　・・・②

または，四面体 ABCD の体積は，

頂点 A から底面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，

四面体 ABCD の体積$=\frac{1}{3}\times\Delta\mathrm{BCD}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\times 18\sqrt{3}\times\mathrm{AH}$

ここで，AH について，

△ABH，△ACH，△ADH において，AH が共通かつ斜辺 AB＝AC＝AD より，

△ABH≡△ACH≡△ADH

よって，BH＝CH＝DH　すなわち H は△BCD の外心である。

そこで，△BCD の外接円の半径を R とすると，

正弦定理より，$\frac{6\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2R$　$\therefore R=\frac{6\sqrt{2}}{2\sin 60^\circ}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$

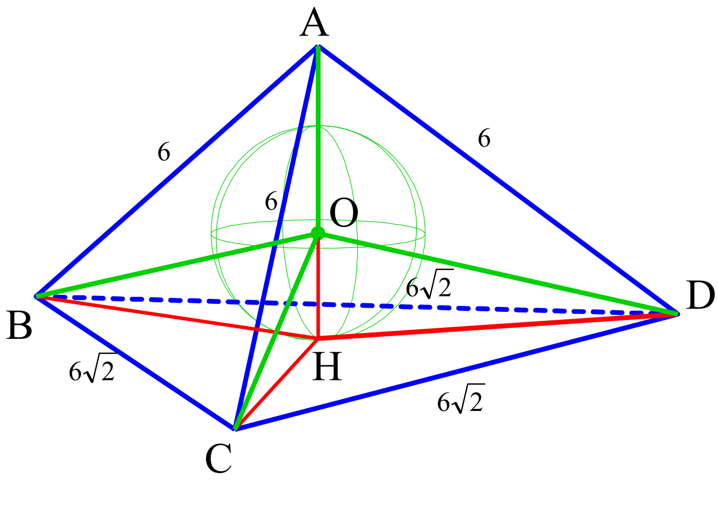
△ABH は AB を斜辺とする直角三角形だから，

三平方の定理より，$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-R^2}=\sqrt{36-24}=2\sqrt{3}$

よって，四面体 ABCD の体積$=\frac{1}{3}\times 18\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=36$　・・・②

①，②より，$r\left(18+6\sqrt{3}\right)=36$

$\therefore r=\frac{36}{18+6\sqrt{3}}=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$



27

(1)

$$4\sin^2\theta-4\cos\theta-1=4(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta-1$$
$$=-(4\cos^2\theta+4\cos\theta-3)$$
$$=-(2\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)$$

これと，$4\sin^2\theta-4\cos\theta-1=0$ より，

$-(2\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)=0$

ここで，$0°\leq\theta\leq180°$ より，$-1\leq\cos\theta\leq1$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$\theta=60°$

(2)

$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=(2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)$，$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$ より，

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)=0$

ここで，$0°\leq\theta\leq180°$ より，$0\leq\sin\theta\leq1$

よって，$\sin\theta=\dfrac{1}{2},\ 1$

ゆえに，$\theta=30°,\ 150°,\ 90°$

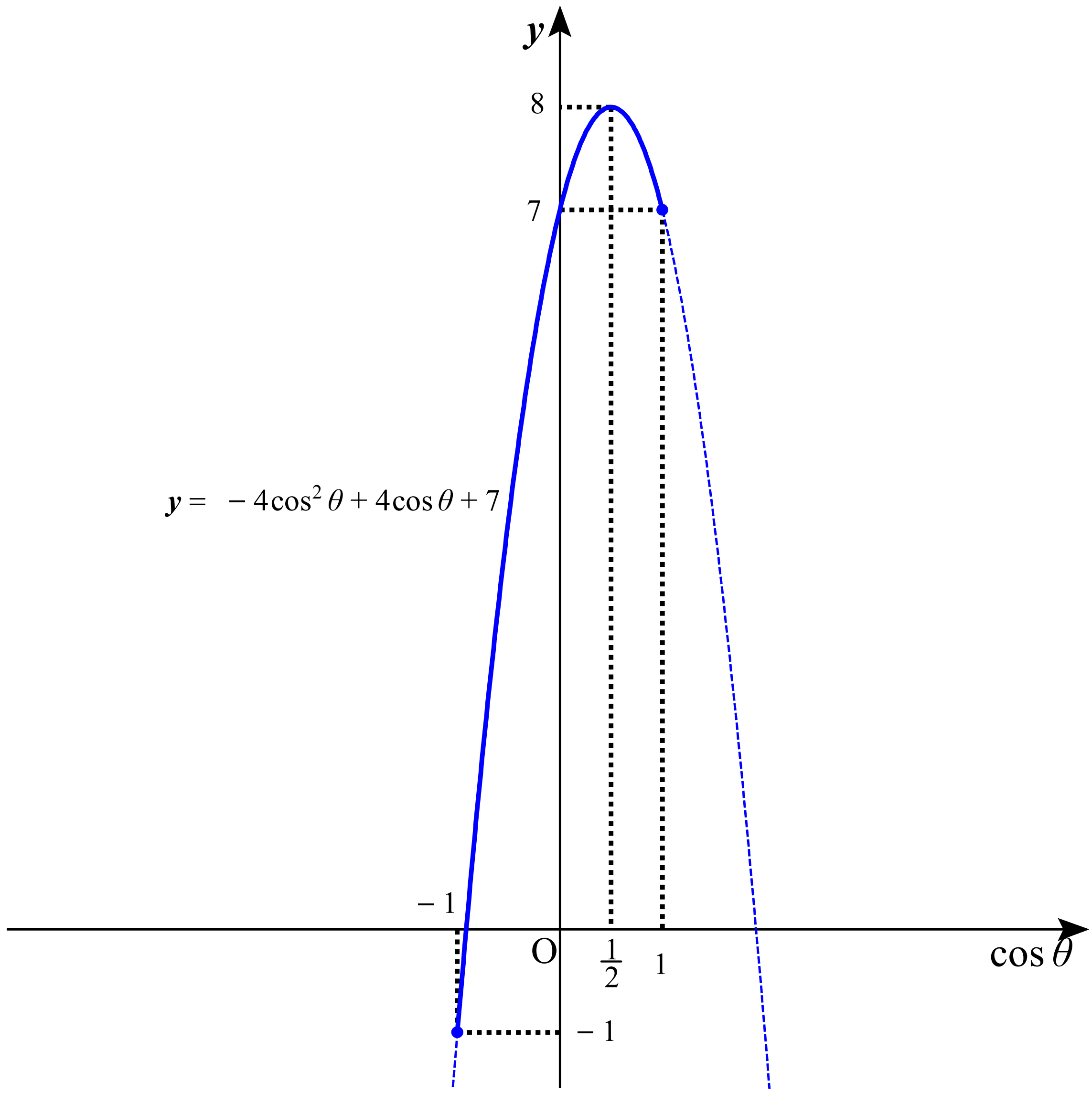
28

$$y=4\sin^2\theta+4\cos\theta+3$$
$$=4(1-\cos^2\theta)+4\cos\theta+3$$
$$=-4\cos^2\theta+4\cos\theta+7$$
$$=-4(\cos^2\theta-\cos\theta)+7$$
$$=-4\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+8$$

ここで，$0°\leq\theta\leq180°$ より，$-1\leq\cos\theta\leq1$

よって，y は $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta=60°$ で最大値 8 を，

$\cos\theta=-1$ すなわち $\theta=180°$ で最小値 -1 をとる。



y
8
7
$y = -4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 7$
−1
O
$\frac{1}{2}$
1
$\cos\theta$
−1

29

$\cos 0° = 1$， $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$， $\cos 90° = 0$， $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$

余弦定理より，

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16 + 81 - 49}{72} = \frac{2}{3}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{81 + 49 - 16}{126} = \frac{19}{21}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 16 - 81}{56} = -\frac{2}{7}$$

よって，

$\cos^2 60° < \cos^2 A < \cos^2 45°$ より， $\cos 60° < \cos A < \cos 45°$

$\cos^2 30° < \cos^2 B < \cos^2 0°$ より， $\cos 30° < \cos B < \cos 0°$

$\cos 120° < \cos C < \cos 90°$

$0° \leq \theta \leq 180°$ において， $\cos\alpha > \cos\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ 　が成り立つから，

$0° < B < 30°$， $45° < A < 60°$， $90° < C < 120°$

30

$\mathrm{DC} = x,\ \mathrm{BC} = y$ とおく。

点 D は長さが 3 の線分 AB を 2：1 に 分ける点だから，$\mathrm{AD} = 2$，$\mathrm{BD} = 1$

また， $\mathrm{AC} = 2\mathrm{BC} = 2y$

△ABC において，余弦定理より， $4y^2 = x^2 + 4 - 4x\cos 135°$

$\therefore 4y^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$ 　・・・①

△DBC において，余弦定理より， $y^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 45°$

$\therefore y^2 = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ 　・・・②

①，②より， $4\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$

これを整理すると， $3x\left(x - 2\sqrt{2}\right) = 0$

$x > 0$ より， $\mathrm{DC} = x = 2\sqrt{2}$ 　・・・$\boxed{ア}$

これを②に代入すると， $y^2 = 5$

$y > 0$ より， $\mathrm{BC} = y = \sqrt{5}$ 　・・・$\boxed{イ}$

△ADC において，正弦定理より， $\dfrac{\mathrm{DC}}{\sin\angle\mathrm{CAD}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\sin 135°}$

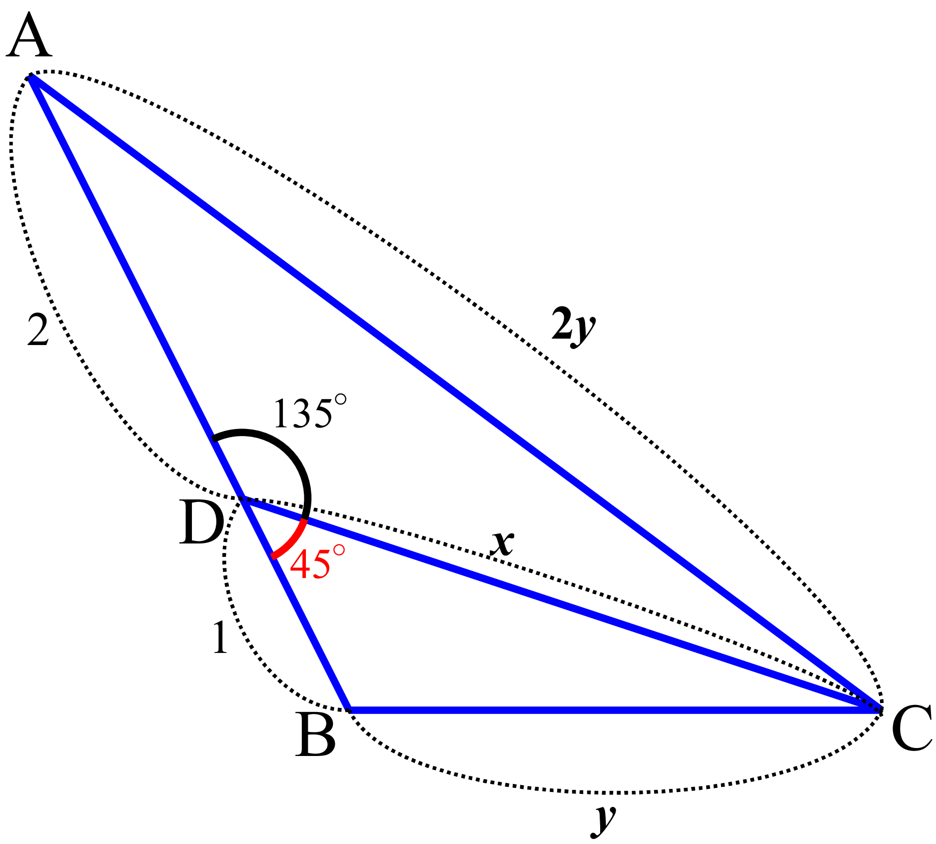
$\therefore \sin\angle\mathrm{CAB} = \sin\angle\mathrm{CAD} = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}} \cdot \sin 135° = \dfrac{x}{2y} \cdot \sin 135° = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 　・・・$\boxed{ウ}$

△ABC において，正弦定理より， $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{CAB}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$

$$\therefore \sin\angle ABC = \frac{AC}{BC} \cdot \sin\angle CAB$$
$$= \frac{2y}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{エ}$$

$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$ より，

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}}}$$
$$= \frac{5}{2} \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{オ}$$



31

(1)

正弦定理より， $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

よって， $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ ならば $a^2 + b^2 = c^2$

または

△ABC の外接円の半径を R とすると，

正弦定理より， $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \quad \therefore \sin A = \dfrac{a}{2R},\ \sin B = \dfrac{b}{2R},\ \sin C = \dfrac{c}{2R}$

これと $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ より， $\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2R}\right)^2 = \left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$

両辺に $4R^2$ をかけると， $a^2 + b^2 = c^2$

これより，△ABC は辺 AB を斜辺とする直角三角形である。 $\therefore \angle \mathrm{C} = 90°$

(2)

$C = 90°$ より，

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= \cos A + 4\cos B + \cos 90° \\ &= \cos A + 4\cos\{180° - (A + 90°)\} + 0 \\ &= \cos A + 4\cos(90° - A) \\ &= \cos A + 4\sin A\end{aligned}$$

これと $\cos A + \cos B + \cos C = 4$ より， $\cos A + 4\sin A = 4 \quad \therefore \cos A = 4(1 - \sin A)$

これを $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ に代入し，整理すると， $17\sin^2 A - 32\sin A + 15 = 0$

よって， $(17\sin A - 15)(\sin A - 1) = 0$

$A \neq 90°$ だから， $\sin A - 1 \neq 0 \quad \therefore \sin A = \dfrac{15}{17}$

(3)

解法 1：(1)，(2)を利用して解く

正弦定理より， $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

ここで，(1)より， $\sin C = \sin 90° = 1$

(2)より， $\sin A = \dfrac{15}{17}$， $\sin B = \cos A = 4(1 - \sin A) = 4\left(1 - \dfrac{15}{17}\right) = \dfrac{8}{17}$

よって， $\dfrac{17}{15}a = \dfrac{17}{8}b = c$ すなわち $a = \dfrac{15}{8}b,\ c = \dfrac{17}{8}b$

ゆえに， $\dfrac{c - a}{b} = \dfrac{\frac{17}{8}b - \frac{15}{8}b}{b} = \dfrac{1}{4}$

解法 2：(1)を利用して解く

$C=90°$， $a^2+b^2=c^2$ および余弦定理より，

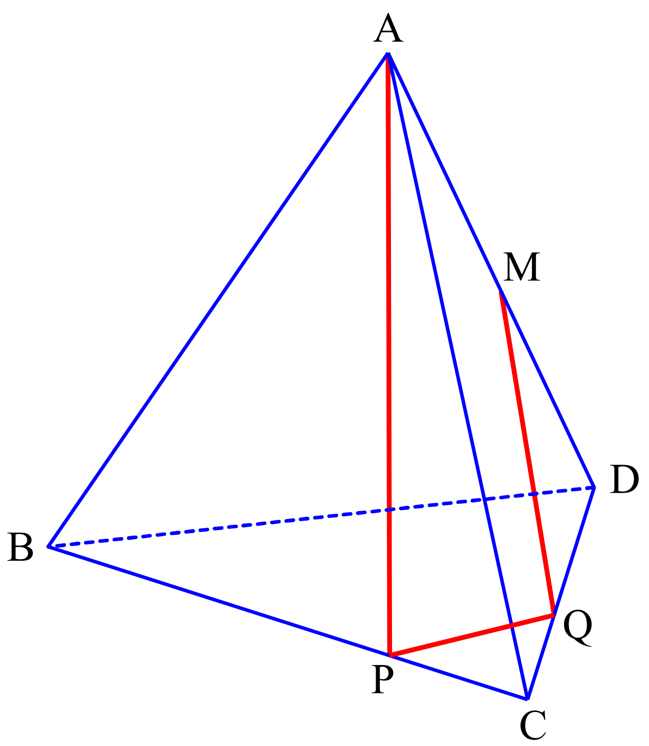
$$\begin{aligned}\cos A+4\cos B+\cos C&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+4\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\cos 90°\\&=\frac{b^2+\left(c^2-a^2\right)}{2bc}+4\cdot\frac{\left(c^2-b^2\right)+a^2}{2ca}\\&=\frac{2b^2}{2bc}+4\cdot\frac{2a^2}{2ca}\\&=\frac{b+4a}{c}\end{aligned}$$

これと $\cos A+4\cos B+\cos C=4$ より， $\dfrac{b+4a}{c}=4$

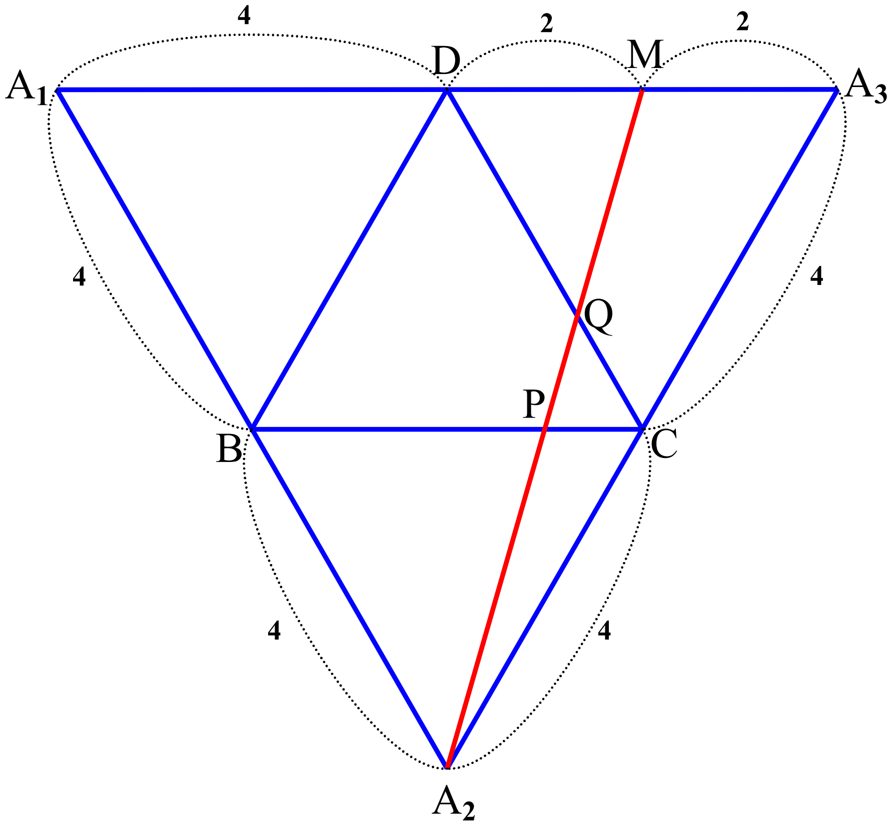
よって， $b+4a=4c$ 　すなわち $b=4(c-a)$

ゆえに， $\dfrac{c-a}{b}=\dfrac{1}{4}$

32



上図，見取り図の赤色実線が最短経路であるとすると，
見取り図の頂点 A を A_1, A_2, A_3 に区別した次図展開図において，
P と Q は，それぞれ線分 A_2M と BC，線分 A_2M と CD の交点となる。



(1)

B, P はそれぞれ A_2A_1, A_2M の中点だから，中点連結定理より， $BP=\frac{1}{2}A_1M=3$

$$
\begin{aligned}
\therefore \triangle A_2BP &= \frac{1}{2}\cdot BA_2\cdot BP\sin 60^\circ \\
&= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

(2)

$\triangle A_2A_3M$ において余弦定理より

$$
\begin{aligned}
A_2M &= \sqrt{A_2{A_3}^2 + A_3M^2 - 2A_2A_3\cdot A_3M\cos\angle A_3} \\
&= \sqrt{8^2+2^2-2\cdot 8\cdot 2\cos 60^\circ} \\
&= \sqrt{68-16} \\
&= 2\sqrt{13}
\end{aligned}
$$

(3)

ΔA_1A_2M において，余弦定理より，

$$\cos\angle A_1A_2M = \frac{A_1A_2{}^2 + A_2M^2 - MA_1{}^2}{2\cdot A_1A_2\cdot A_2M}$$
$$= \frac{8^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 - 6^2}{2\cdot 8\cdot 2\sqrt{13}}$$
$$= \frac{5}{2\sqrt{13}}$$

ゆえに， $\cos\angle BA_1P$ すなわち $\cos\angle BAP = \dfrac{5}{2\sqrt{13}}$