

式と証明 2 二項定理

12

(1)

与式の展開式の一般項は ${}_6C_k (2x^2)^k (-1)^{6-k} = {}_6C_k 2^k x^{2k} (-1)^{6-k} = {}_6C_k 2^k (-1)^{6-k} \cdot x^{2k}$

$x^{2k} = x^6$ より, $k=3$

よって, 求める係数は ${}_6C_3 2^3 (-1)^{6-3} = 20 \cdot 8 \cdot (-1) = -160$

(2)

与式の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} {}_5C_k (2x^3)^k (-3x)^{5-k} &= {}_5C_k 2^k (x^3)^k (-3)^{5-k} x^{5-k} \\ &= {}_5C_k 2^k (-3)^{5-k} \cdot x^{3k} \cdot x^{5-k} \\ &= {}_5C_k 2^k (-3)^{5-k} x^{3k+5-k} \\ &= {}_5C_k 2^k (-3)^{5-k} \cdot x^{2k+5} \end{aligned}$$

$x^{2k+5} = x^9$ より, $k=2$

よって, 求める係数は ${}_5C_2 2^2 (-3)^3 = 10 \cdot 4 \cdot (-27) = -1080$

13

(1)

解法 1

$a+b$ を 1 つの文字とみなし $(a+b+c)^6 = \{(a+b)+c\}^6$ とすると,

展開式の一般項は ${}_6C_k (a+b)^k c^{6-k}$

c の指数が 3 であることが必要だから, $6-k=3 \quad \therefore k=3$

このとき ${}_6C_3 (a+b)^3 c^3 = (a+b)^3 \times {}_6C_3 c^3$

続いて $(a+b)^3$ を展開すると, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ より, ab^2 の係数は 3 である。

よって, 求める係数は $3 \cdot {}_6C_3 = 60$

解法 2: 組み合わせの発想

(a, b, c) の組が 6 つ並んでいて, 各組から a, b, c のどれか 1 つを取り出してから掛ける場合,

ab^2c^3 の項ができるのは, a を 1 つ, b を 2 つ, c を 3 つ取り出す場合であるから,

その場合の数は ${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3$

$(a, b, c) \quad (a, b, c) \quad (a, b, c) \quad (a, b, c) \quad (a, b, c) \quad (a, b, c)$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

a を 1 つ, b を 2 つ, c を 3 つ取り出す: ${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3$ 通り

これと a, b, c の係数がいずれも 1 であることから,

ab^2c^3 の項の係数は ${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 1^3 = 60$

解法 3 : 順列の発想 (最も楽な方法)

ab^2c^3 の項ができるのは, 1 つの a と 2 つの b と 3 つの c を並べてから掛ける場合である。

$abbccc, abcbcc, \dots$

並べ方 (順列) の数は $\frac{(1+2+3)!}{2!3!} = \frac{6!}{2!3!}$ であることと

a, b, c の係数がいずれも 1 であることから,

ab^2c^3 の項の係数は $\frac{6!}{2!3!} \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 1^3 = 60$

(2)

解法 3 で解く。

5 つの x と 1 つの y と 2 つの $-3z$ を並べてから掛けた場合だから,

$$\frac{8!}{5!2!} \cdot 1^5 \cdot 1^1 \cdot (-3)^2 = 1512$$

14

二項定理を利用した不等式の証明は入試頻出

(1)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= {}_nC_0 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + {}_nC_1 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + {}_nC_2 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots \\ &> {}_nC_0 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + {}_nC_1 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} \\ &= 2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \dots \\ &\geq {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \end{aligned}$$

等号が成り立つのは $n=2$ のとき

15

(1)

$$\text{展開式の一般項は } {}_7C_k (x^2)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{7-k} = {}_7C_k \frac{x^{2k}}{x^{7-k}}$$

$$\frac{x^{2k}}{x^{7-k}} = x^2 \text{ のとき, } x^{2k} = x^2 \cdot x^{7-k} \text{ より, } x^{2k} = x^{9-k} \quad \therefore 2k = 9 - k \quad \therefore k = 3$$

$$\text{よって, } x^2 \text{ の項は } {}_7C_3 x^2 = 35x^2 \quad \therefore 35$$

(2)

展開式の一般項は

$$\begin{aligned} {}_5C_k (2x^3)^k \left(-\frac{1}{3x^2}\right)^{5-k} &= {}_5C_k 2^k x^{3k} \left(\frac{-1}{3x^2}\right)^{5-k} \\ &= {}_5C_k 2^k x^{3k} (-1)^{5-k} \frac{1}{(3x^2)^{5-k}} \\ &= {}_5C_k 2^k (-1)^{5-k} x^{3k} \frac{1}{3^{5-k} x^{2(5-k)}} \\ &= {}_5C_k 2^k (-1)^{5-k} \frac{1}{3^{5-k}} \frac{x^{3k}}{x^{10-2k}} \end{aligned}$$

$$\frac{x^{3k}}{x^{10-2k}} = x^0 \text{ より, } x^{3k} = x^{10-2k} \quad \therefore 3k = 10 - 2k \quad \therefore k = 2$$

$$\text{よって, } {}_5C_2 2^2 (-1)^3 \frac{1}{3^3} = -\frac{40}{27}$$

16

$11^{11} = (10+1)^{11}$ とし, これを展開し, 10^2 の倍数の項とそうでない項に分けることで,
 11^{11} を 10^2 で割った商と余りの式にする。

$$\begin{aligned} 11^{11} &= (10+1)^{11} \\ &= {}_{11}C_0 10^0 \cdot 1^{11} + {}_{11}C_1 10^1 \cdot 1^{10} + {}_{11}C_2 10^2 \cdot 1^9 + {}_{11}C_3 10^3 \cdot 1^8 + \cdots + {}_{11}C_{11} 10^{11} \cdot 1^0 \\ &= 1 + 11 \cdot 10 + 10^2 ({}_{11}C_2 1^9 + {}_{11}C_3 10^1 \cdot 1^8 + \cdots + {}_{11}C_{11} 10^9) \\ &= 10^2 ({}_{11}C_2 1^9 + {}_{11}C_3 10^1 \cdot 1^8 + \cdots + {}_{11}C_{11} 10^9) + 111 \end{aligned}$$

よって, 111

17

右辺の式 $(1+x)^{2n}$ の x^n の項は ${}_n C_n x^n$ だから、 ${}_n C_n$ は $(1+x)^{2n}$ の x^n の項の係数を表す。

よって、等式 $(1+x)^n (x+1)^n = (1+x)^{2n}$ の x^n の項の係数は ${}_n C_n$ と等しい。

そこで、 $(1+x)^n (x+1)^n$ の x^n の項の係数を求めてみる。

$(1+x)^n$ の展開式の一般項は ${}_n C_k 1^n x^{n-k} = {}_n C_k x^{n-k}$ ($k=0,1,2,\dots,n$)

$(x+1)^n$ の展開式の一般項は ${}_n C_l x^l \cdot 1^{n-l} = {}_n C_l x^l$ ($l=0,1,2,\dots,n$)

より、

$(1+x)^n (x+1)^n$ の展開式の一般項は

$${}_n C_k x^{n-k} \cdot {}_n C_l x^l = {}_n C_k \cdot {}_n C_l x^{n-k+l} \quad (k=0,1,2,\dots,n, \quad l=0,1,2,\dots,n)$$

x^n の項の場合、 $n-k+l=n$ より、 $k=l$

$$\text{よって、} {}_n C_k x^{n-k} \cdot {}_n C_k x^k = {}_n C_k^2 x^n \quad (k=0,1,2,\dots,n)$$

つまり、

$k=0$ のとき ${}_n C_0^2 x^n$ 、 $k=1$ のとき ${}_n C_1^2 x^n$ 、 $\dots$ 、 $k=n$ のとき ${}_n C_n^2 x^n$ となる。

よって、 $(1+x)^n (x+1)^n$ の展開式の x^n の項は $({}_n C_0^2 + {}_n C_1^2 + \dots + {}_n C_n^2) \cdot x^n$

$$\text{ゆえに、} {}_n C_0^2 + {}_n C_1^2 + \dots + {}_n C_n^2 = {}_{2n} C_n$$

18

(1)

$$k {}_n C_k = \frac{kn!}{(n-k)!k!}$$

$$n {}_{n-1} C_{k-1} = \frac{n(n-1)!}{\{(n-1)-(k-1)\}! \cdot (k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{k}{k!} = \frac{kn!}{(n-k)!k!}$$

$$\text{よって、} k {}_n C_k = n {}_{n-1} C_{k-1}$$

補足

n 人から k 人の委員とその委員長を選ぶ方法には、

n 人の中からまず k 人の委員を選び、その委員の中から委員長を 1 人選ぶ方法と

n 人の中からまず委員長を 1 人選び、残り $n-1$ 人の中から $k-1$ 人の委員を選ぶ方法があり、

前者の場合の数は ${}_n C_k \cdot {}_k C_1 = k {}_n C_k$ 、後者の場合の数は ${}_n C_1 \cdot {}_{n-1} C_{k-1} = n {}_{n-1} C_{k-1}$ と表され、

両者の場合の数が等しいから、 $k {}_n C_k = n {}_{n-1} C_{k-1}$

(2)

$$\begin{aligned} {}_n C_1 + 2 {}_n C_2 + 3 {}_n C_3 + \dots + n {}_n C_n &= n {}_{n-1} C_0 + n {}_{n-1} C_1 + n {}_{n-1} C_2 + \dots + n {}_{n-1} C_{n-1} \\ &= n({}_{n-1} C_0 + {}_{n-1} C_1 + {}_{n-1} C_2 + \dots + {}_{n-1} C_{n-1}) \\ &= n(1+1)^{n-1} \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

20

(1)

展開式の一般項は,

$$\begin{aligned}\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}(x^2)^p(-x)^q2^r &= \frac{4!}{p!q!r!}x^{2p+q}(-1)^q2^r \\ &= \frac{4!}{p!q!r!}(-1)^q2^rx^{2p+q}\end{aligned}$$

条件より,

$$p+q+r=4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2p+q=5 \quad \therefore q=5-2p \quad \cdots \textcircled{2}$$

 q は 0 以上 4 以下の整数だから, 考えられる p の値は, ②より, $p=1,2$

よって, ①と②より,

$$p=1 \text{ のとき } q=3, \quad r=0$$

$$p=2 \text{ のとき } q=1, \quad r=1$$

$$\text{これより, 求める係数の値は } \frac{4!}{1!3!0!}(-1)^32^0 + \frac{4!}{2!1!1!}(-1)^12^1 = -4 + (-24) = -28$$

(2)

展開式の一般項は,

$$\begin{aligned}\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}1^p(2x)^q(-x^2)^r &= \frac{10!}{p!q!r!}2^qx^q(-1)^rx^{2r} \\ &= \frac{10!}{p!q!r!}(-1)^r2^qx^{q+2r}\end{aligned}$$

条件より,

$$p+q+r=10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q+2r=3 \quad \therefore q=3-2r \quad \cdots \textcircled{2}$$

 q は 0 以上 10 以下の整数だから, 考えられる r の値は, ②より, $r=0,1$

よって, ①と②より,

$$r=0 \text{ のとき } q=3, \quad p=7$$

$$r=1 \text{ のとき } q=1, \quad p=8$$

$$\text{これより, 求める係数の値は } \frac{10!}{7!3!0!}(-1)^02^3 + \frac{10!}{8!1!1!}(-1)^12^1 = 780$$