式と証明 6　等式の証明

47

ポイント

$a+b=-c$ ，　$b+c=-a$ ，　$c+a=-b$

解

$$与式 = a\cdot\frac{c+b}{bc}+b\cdot\frac{a+c}{ca}+c\cdot\frac{b+a}{ab}$$

ここで，　$c+b=-a, a+c=-b, b+a=-c$ より，

$$\begin{aligned}与式 &= -\frac{a^2}{bc}-\frac{b^2}{ca}-\frac{c^2}{ab}\\ &= -\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\\ &= -\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}\\ &= -\frac{3abc}{abc}\\ &= -3\end{aligned}$$

補足

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

参考：4STEP Ⅰ 問題 42

または,

$$\begin{aligned}与式 &= -\frac{a^2}{bc}-\frac{b^2}{ca}-\frac{c^2}{ab}\\ &= -\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\\ &= -\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3}{abc}\\ &= -\frac{(-c)^3-3ab\cdot(-c)+c^3}{abc}\\ &= -\frac{-c^3+3abc+c^3}{abc}\\ &= -\frac{3abc}{abc}\\ &= -3\end{aligned}$$

補足

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

参考：4STEP Ⅰ 問題 42

48

ポイント

比例式＝k （k は実数） とおく。

解

$\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}=k$ とおくと，

$y+z=k(b-c)$，　$z+x=k(c-a)$，　$x+y=k(a-b)$

よって，　$(y+z)+(z+x)+(x+y)=k(b-c)+k(c-a)+k(a-b)$

左辺$=2(x+y+xz)$，右辺$=k\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}=0$ より，　$2(x+y+z)=0$

ゆえに，　$x+y+z=0$

49

ポイント

$a:b:c=x:y:z \Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\left(\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\right)$

比例式＝k （k は実数） とおく。

解

条件より，　$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k$ とおくと，　$a=kx, b=ky, c=kz$

よって，

$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(k^2x^2+k^2y^2+k^2z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=k^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$

$(ax+by+cz)^2=\left(kx^2+ky^2+kz^2\right)^2=k^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$

ゆえに，　$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=(ax+by+cz)^2$

50

ポイント

1 文字消去

解

$x+y+z=0$ より，　$z=-x-y$

これを $2x^2+2y^2-z^2=0$ に代入すると，　$2x^2+2y^2-(-x-y)^2=0$　　$\therefore (x-y)^2=0$

よって，　$x=y$

51

$$x^2-yz-(y^2-zx)=x^2-y^2+zx-zy$$
$$=(x-y)(x+y)+z(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y+z)$$

これと $x^2-yz=y^2-zx$ より，$(x-y)(x+y+z)=0$

$x\neq y$ だから，$x+y+z=0$

計算処理方法 1

$x^2-yz=(-y-z)^2-yz=y^2+z^2+yz$

これと $x^2-yz=2$ より，$y^2+z^2+yz=2$

一方，$z^2-xy=z^2-(-y-z)\cdot y=y^2+z^2+yz$

よって，$z^2-xy=2$

計算処理方法 2

$x^2-yz-(z^2-xy)=x^2-z^2+xy-yz=(x-z)(x+z)+y(x-z)=(x-z)(x+y+z)$

$x+y+z=0$ より，$x^2-yz-(z^2-xy)=0$

$\therefore z^2-xy=x^2-yz=2$

52

(1)

$$(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+(xy+yz+zx)+xyz+1$$
$$=xy+yx+zx+xyz+(-1)+1$$
$$=0$$

よって，$x=-1$ または $y=-1$ または $z=-1$

すなわち，x,y,z のうち少なくとも 1 つは -1 である。

(2)

$a+b+c=k$ とおくと，

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(k-c)(k-a)(k-b)$$
$$=k^3-k^2(a+b+c)+k(ab+bc+ca)-abc$$

ここで，$(bc+ca+ab)(a+b+c)=abc$ より，$k(bc+ca+ab)=abc$

$$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)=k^3-k^2\cdot k+abc-abc$$
$$=k^3-k^3+abc-abc$$
$$=0$$

よって，a,b,c のうちどれか 2 つの和は 0 である。